NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. CLAUDE

Solution de la question 254

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 274-278

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__274_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 254

(voir t XI, p. 115);

PAR M. L'ABBÉ L. CLAUDE,
De la maison ecclésiastique de Vals (Haute-Loire).

Soient, dans un même plan,

A, B, C, trois points situés sur la droite X;
A', B', C', trois points situés sur la droite X';
A'', B'', C'', trois points situés sur la droite X''.

Formons un système de neuf droites,

$$\begin{array}{lll} A'A'', & B'B'', & C'C'', \\ A''A, & B''B, & C''C, \\ AA', & BB', & CC', \end{array}$$

où AA' est la droite qui passe par les points A et A', et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf points,

$$\begin{array}{lll} B'B''.C'C'', & C'C''.A'A'', & A'A''.B'B'', \\ B''B.C''C, & C''C.A''A, & A''A.B''B, \\ BB'.CC', & CC'.AA', & AA'.BB', \end{array}$$

où $B'B''.C'C''$ est le point d'intersection des droites $B'B''$ et $C'C''$, etc.

Si les points de l'une quelconque des colonnes verticales sont en ligne droite, les points des deux autres lignes verticales sont aussi en ligne droite; les trois droites se rencontrent en un même point (*), et les trois droites X, X', X'' se rencontrent aussi en un même point. La réciproque a lieu.

(*) Ou sont parallèles entre elles. Cette addition doit être faite partout où il est sujet de la convergence de trois droites en un même point. (*Voir* le corollaire du lemme 1.)

Soient, dans un même plan,

A, B, C, trois droites concourant au point X;
A', B', C', trois droites concourant au point X';
A'', B'', C'', trois droites concourant au point X''.

Formons un système de neuf points (tableau 1), où $A'\,A''$ est maintenant le point d'intersection des droites A' et A'', et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf droites (tableau 2), où $B'B''$, $C'C''$ est maintenant la droite qui passe par les points $B'B''$ et $C'C''$, etc. Si les droites de l'une quelconque des colonnes verticales concourent en un même point, il en sera de même des droites des deux autres colonnes verticales; les trois points de concours sont sur une même droite, et les trois points X, X', X'' sont aussi sur une même droite. La réciproque a lieu.

Donner une démonstration géométrique sans figure, ou une démonstration algébrique sans calculs. (Cayley.)

1. *Lemme.* Deux triangles quelconques étant tellement disposés sur un plan, que leurs sommets respectifs s'appuient, deux à deux, sur trois droites convergeant en un même point, les côtés opposés aux sommets qui se correspondent iront concourir, dans le même ordre, en trois points situés en ligne droite. (Poncelet, *Propr. project.*, sect. II, chap. I.)

2. *Corollaire.* Si les trois droites, au lieu de converger en un même point, sont parallèles entre elles, la même propriété a lieu. Cette proposition est manifeste par la considération des limites.

3. *Lemme.* Réciproquement, si ces côtés concourent, deux à deux, en trois points situés en ligne droite, les droites qui joignent dans le même ordre les sommets correspondants des triangles iront converger en un même point (ou seront parallèles). (Poncelet, *id.*)

4. Théorème I. *Démonstration.* Supposons les points de la première ligne verticale en ligne droite ; ces trois points sont les sommets de trois triangles dont les autres sommets respectifs B et C, B′ et C′, B″ et C″ s'appuient sur les trois droites X, X′, X″. Donc (lemme 3) ces trois droites sont parallèles ou convergent en un même point. Les deux triangles AA′A″, CC′C″ ayant leurs sommets respectifs sur les trois droites X, X′, X″ parallèles ou convergeant en un même point, les côtés opposés aux sommets correspondants iront concourir dans le même ordre en trois points situés en ligne droite (lemme 1 ou 2) ; donc les trois points de la seconde ligne verticale sont en ligne droite. Il en est de même de ceux de la troisième, puisque les triangles AA′A″, BB′B″ ont leurs sommets sur les mêmes droites X, X′, X″.

Désignons par D, D′, D″ les trois droites que nous venons de former, et considérons deux des trois triangles dont les sommets s'appuient, deux à deux, sur ces trois droites, par exemple les deux triangles

$$(B'B''.C'C'',\quad C'C''.A'A'',\quad A'A''.B'B'')$$

et

$$(B''B.C''C,\quad C''C.A''A,\quad A''A.B''B),$$

dont les sommets respectifs sont les points des deux premières lignes horizontales (tableau 2). Leurs côtés concourent, deux à deux, aux trois points A″, B″, C″, situés sur la droite X″. Donc (lemme 3) les droites D, D′, D″ convergent en un même point ou sont toutes trois parallèles.

5. *Réciproque.* Si les trois droites X, X′, X″ sont parallèles ou concourent en un même point, les points de l'une quelconque des colonnes verticales sont en ligne droite, et ces trois droites sont parallèles ou se rencontrent en un même point.

Cette réciproque a déjà été démontrée, puisque c'est sur elle que nous nous sommes appuyé pour démontrer que les points des deux dernières colonnes verticales étaient respectivement en ligne droite.

6. Théorème II. Ce théorème n'étant que le corrélatif du précédent, s'en déduit immédiatement d'après la théorie de la corrélation des figures; nous allons toutefois en donner la démonstration directe.

Démonstration. Supposons que les droites de la première colonne verticale soient parallèles ou convergent vers un point P; les sommets des deux triangles

$$(B'B'', \ B''B, \ BB')$$

et

$$(C'C'', \ C''C, \ CC')$$

s'appuient sur ces trois droites; donc (lemme 1 ou 2) les points de concours X, X', X'' des côtés respectifs sont en ligne droite. Les côtés des deux triangles

$$(C'C'', \ C''C, \ CC')$$

et

$$(A'A'', \ A''A, \ AA')$$

concourent, deux à deux, en ces points; par conséquent (lemme 3), les droites de la seconde colonne verticale concourent en un même point P' ou sont parallèles; il en est de même des droites de la troisième colonne verticale.

Supposons que ces trois systèmes se composent de droites non parallèles entre elles, mais concourant respectivement aux points P, P', P''. Les deux triangles ayant pour côtés respectifs les droites des deux premières lignes horizontales (tableau 2) ont leurs sommets s'appuyant deux à deux sur les trois droites A'', B'', C'' qui concourent en X''. Donc (lemme 1) les trois points P, P', P'', où vont concourir les côtés correspondants, sont en ligne droite.

7. *Réciproque.* Si les trois points X, X′, X″ sont en ligne droite, les droites de l'une quelconque des lignes verticales sont parallèles entre elles ou concourent en un même point, et dans ce dernier cas, les trois points de concours sont en ligne droite.

Cette réciproque a déjà été démontrée.