H. FAURE

Solution de la question 165

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 191-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__191_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 165

(voir t. VI, p. 394),

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

THÉORÈME. $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$ *étant l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes,* $\left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = 1$ *est l'équation de la polaire réciproque de la développée de l'ellipse, relativement au cercle représenté par*

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Démonstration. Désignant par t, v, les coordonnées d'un centre de courbure, l'équation de la développée est

$$(1) \qquad a^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

L'équation de la polaire du point (t, v) est

$$vy + tx = c^2;$$

d'où

$$v = \frac{c^2 - tx}{y}.$$

Substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(2) \qquad a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} (c^2 - tx)^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} c^{\frac{4}{3}}$$

équation d'où l'on déduit, en différentiant et simplifiant,

$$(3) \qquad a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} (c^2 - tx)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} x;$$

il ne s'agit que d'éliminer t entre les équations (2) et (3).

Élevant au cube les deux membres de l'équation (3), on trouve

$$a^2 y^2 (c^2 - tx) = b^2 tx^3, \qquad t = \frac{a^2 c^2 y^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2) x},$$

et

$$c^2 - tx = \frac{b^2 c^2 x^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2)}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve, après avoir chassé le dénominateur,

$$(a^2 y^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}},$$

ou, en élevant au cube,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = y^2 x^2;$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1.$$