G.-J. DOSTOR

Théorie des systèmes de quatre points harmoniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 73-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__73_1>

THÉORIE DES SYSTÈMES DE QUATRE POINTS HARMONIQUES

(voir t. IX, p. 118);

PAR M. G.-J. DOSTOR,

Docteur ès sciences mathématiques.

I. *Définitions.* Désignons par A, B, A', B', quatre points en ligne droite, qui forment un *système harmonique,* et par α, β les milieux des intervalles des points conjugués A et A', B et B'.

Nous donnerons aux segments AA', BB' le nom de

(*) Nous publierons incessamment une série de *pourquoi?*

segments conjugués, à AB, A′B′ celui de *segments extrêmes,* et enfin à AB′ et A′B les noms de *grand* et de *moyen segment.*

Nous représenterons, en outre, par $\frac{a}{a'} = \mathrm{a}$, $\frac{b'}{b} = \mathrm{b}$ les rapports dans lesquels les distances entre les points conjugués A, A′, B′ et B se trouvent divisées par les deux autres points, de sorte que $\frac{AB}{A'B} = \mathrm{a}$, $\frac{B'A'}{BA'} = \mathrm{b}$.

II. *Propriétés des segments conjugués.* Si l'on exprime les quatre segments AB, A′B′, AB′, A′B en valeur des distances de leurs extrémités au point α, et qu'on substitue les valeurs obtenues

$$AB = A\alpha + B\alpha, \quad A'B' = B'\alpha - A'\alpha,$$
$$A'B = A'\alpha - B\alpha, \quad AB' = A\alpha + B'\alpha$$

dans l'égalité

$$(1) \qquad AB.A'B' = AB'.A'B$$

que donne la proportion harmonique AB : A′B :: AB′ : A′B′, on obtient la relation

$$(2) \qquad \overline{A\alpha}^2 = B\alpha.B'\alpha.$$

De même

$$(3) \qquad \overline{B\beta}^2 = A\beta.A'\beta.$$

La multiplication des identités $AA' = AB + A'B$, $BB' = A'B' + A'B$ donne ensuite

$$(4) \qquad AA'.BB' = 2AB.A'B' = 2AB'.A'B;$$

puis on obtient, en faisant le produit des égalités $AA' = AB + A'B$, $AA' = AB' - A'B'$,

$$(5) \qquad \overline{AA'}^2 = AB.AB' - A'B.A'B'.$$

De même

$$(6) \qquad \overline{BB'}^2 = B'A.B'A' - BA.BA'.$$

Si l'on ajoute les formules (5) et (6), on trouve, après réductions,

(7) $$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = (AB + A'B')^2 = (AB' - A'B)^2,$$

d'où l'on tire

(8) $$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = (AB + A'B')(AB' - A'B).$$

Divisant successivement les équations (5) et (6) par les valeurs (4), on a ensuite

(9) $$2 \cdot \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB'}{A'B'} - \frac{A'B'}{AB'} = \frac{AB}{A'B} - \frac{A'B}{AB},$$

(10) $$2 \cdot \frac{BB'}{AA'} = \frac{B'A}{BA} - \frac{BA}{B'A} = \frac{B'A'}{BA'} - \frac{BA'}{B'A'}.$$

Si nous combinons, par addition et par soustraction, l'identité $AB.AB' = AB.AB'$ avec la formule (1), nous obtiendrons

$$AB(AB' + A'B') = AB'(AB + A'B),$$
$$AB(AB' - A'B') = AB'(AB - A'B),$$

ou

$$AB(AB' + A'B') = AB'.AA', \quad AB.AA' = AB'(AB - A'B);$$

d'où nous tirons, en divisant convenablement par les valeurs (4),

(11) $$\frac{1}{A'B'} + \frac{1}{AB'} = \frac{2}{BB'}, \quad \frac{2}{BB'} = \frac{1}{A'B} - \frac{1}{AB}.$$

On trouverait, d'une manière analogue,

(12) $$\frac{1}{BA} + \frac{1}{B'A} = \frac{2}{AA'}, \quad \frac{2}{AA'} = \frac{1}{BA'} - \frac{1}{B'A'}.$$

La comparaison des formules (11) et (12) donne

(13) $$\frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'} = \frac{1}{A'B} + \frac{1}{AB'},$$

(14) $$\frac{2}{AA'} - \frac{2}{BB'} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'}.$$

On trouve ensuite facilement

$$(15)\qquad \frac{1}{A'B}-\frac{1}{AB'}=\frac{2}{A'B'}+\left(\frac{2}{AA'}-\frac{2}{BB'}\right),$$

$$(16)\qquad \frac{1}{A'B}-\frac{1}{AB'}=\frac{2}{AB}-\left(\frac{2}{AA'}-\frac{2}{BB'}\right),$$

$$(17)\qquad \frac{1}{AB}+\frac{1}{A'B'}=\frac{2}{A'B}-\left(\frac{2}{AA'}+\frac{2}{BB'}\right),$$

$$(18)\qquad \frac{1}{AB}+\frac{1}{A'B'}=\frac{2}{AB'}+\left(\frac{2}{AA'}+\frac{2}{BB'}\right).$$

En égalant les valeurs (12), de $\frac{2}{AA'}$, on a enfin la relation

$$(19)\qquad \frac{1}{A'B}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{A'B'}+\frac{1}{AB'},$$

qui est l'une des formules les plus remarquables des systèmes harmoniques. On peut encore appeler l'attention sur la formule

$$(20)\qquad \overline{A\alpha}^2+\overline{B\beta}^2=\overline{\alpha\beta}^2,$$

qui se déduit de $B\beta^2 = A\beta . A'\beta$, en y remplaçant $A\beta$ et $A'\beta$ par $\alpha\beta + \alpha A$ et $\alpha\beta - \alpha A'$.

III. *Propriétés des segments non conjugués.* En élevant au carré les deux membres de l'identité $AB = A\beta - B\beta$, et en observant que (3) $\overline{B\beta}^2 = A\beta . A'\beta$, nous aurons

$$\overline{AB}^2 = A\beta(A\beta - 2B\beta + A'\beta).$$

Or

$$\begin{aligned} A\beta - 2B\beta + A'\beta &= (A\beta - B\beta) - (B\beta - A'\beta) \\ &= AB - A'B = A\alpha + B\alpha - A'\alpha + B\alpha = 2B\alpha ; \end{aligned}$$

donc

$$(21)\qquad \overline{AB}^2 = 2A\beta . B\alpha.$$

Nous obtiendrions de même

(22) $$\overline{A'B'}^2 = 2A'\beta . B'\alpha,$$

(23) $$\overline{AB'}^2 = 2A\beta . B'\alpha,$$

(24) $$\overline{A'B}^2 = 2A'\beta . B\alpha.$$

Combinant ces formules entre elles, nous trouvons

(25) $$\overline{AB}^2 : \overline{A'B}^2 = A\beta : A'\beta, \quad \overline{BA'}^2 : \overline{B'A'}^2 = B\alpha : B'\alpha;$$

(26) $$AB . A'B = 2B\alpha . B\beta, \quad BA' . B'A' = 2A'\beta . A'\alpha;$$

(27) $$AB : A'B = A\beta : B\beta, \quad BA' : B'A' = B\alpha : A'\alpha;$$

(28) $$AB . A'B : AB' . A'B' :: B\alpha : B'\alpha,$$

(29) $$AB . AB' : A'B . A'B :: A\beta : A'\beta.$$

IV. *Propriétés des rapports de division des segments conjugués.* Les deux proportions

$$AB : A'B :: a : a', \quad AB' : A'B' :: a : a'$$

donnent

$$AB + A'B \quad \text{ou} \quad AA' : A'B :: a + a' : a',$$
$$AB' - A'B' \quad \text{ou} \quad AA' : A'B' :: a - a' : a,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A'B'}{A'B} = \frac{a + a'}{a - a'};$$

donc

(30) $$\frac{a + a'}{a - a'} = \frac{b'}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{a} + 1}{\mathrm{a} - 1} = \mathrm{b}, \quad \frac{\mathrm{b} + 1}{\mathrm{b} - 1} = \mathrm{a}.$$

On trouve ensuite facilement

(31) $$\left\{ \begin{aligned} AB &= \frac{a}{a + a'} \cdot AA' = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a} + 1} \cdot AA', \\ A'B &= \frac{a'}{a + a'} \cdot AA' = \frac{1}{\mathrm{a} + 1} \cdot AA', \end{aligned} \right.$$

(32) $$\left\{ \begin{aligned} AB' &= \frac{a}{a - a'} \cdot AA' = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a} - 1} \cdot AA', \\ A'B' &= \frac{a'}{a - a'} \cdot AA' = \frac{1}{\mathrm{a} - 1} \cdot AA'. \end{aligned} \right.$$

La combinaison de ces valeurs donne encore

$$(33)\quad \mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} :: \left(\frac{a}{a'} : \frac{b'}{b}\right) : 1 :: a(a - a') : a'(a + a'),$$

$$(34)\quad \mathrm{AB'} : \mathrm{A'B} :: \left(\frac{a}{a'} \cdot \frac{b'}{b}\right) : 1 :: a(a + a') : a'(a - a'),$$

$$(35)\quad \mathrm{AA'} : \mathrm{BB'} :: \frac{a}{a'} + 1 : \frac{b'}{b} + 1 :: a^2 - a'^2 : 2aa' :: 2bb' : b'^2 - b^2.$$

V. *Relations entre les distances d'un point* P *de la droite* ABA'B' *aux points harmoniques*. En exprimant les segments AB, A'B', AB', A'B en fonction des distances du point P aux points A, B, A', B', et en substituant les valeurs dans la relation (1), on obtient la formule

$$(36)\quad (\mathrm{PA} + \mathrm{PA'})(\mathrm{PB} + \mathrm{PB'}) = 2(\mathrm{PA} - \mathrm{PA'} + \mathrm{PB}.\mathrm{PB'}).$$

A l'aide de ce qui précède, on trouve aussi facilement que

$$(37)\qquad \mathrm{PB}.\mathrm{PB'}.\mathrm{AA'} = \overline{\mathrm{PA'}}^2.\mathrm{A}\beta - \overline{\mathrm{PA}}^2.\mathrm{A'}\beta\ (^*).$$