NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. BUGNOT

Solution de la question 247

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 461-462

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__461_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 247

(voir t. IX, p. 358);

PAR M. BUGNOT (J.),
Élève de l'École Polytechnique.

Résoudre l'équation

$$(1)\qquad 3^x = 54x - 135.$$

Je remarque que $54 = 2.3^3$, et que $135 = 5.3^3$; l'équation est donc

$$3^x = 2.3^3 x - 5.3^3.$$

Je pose

$$(2)\qquad x = 3 + y;$$

et, divisant tout par 3^3, j'ai

$$3^y = 2x - 5 = 2(3+y) - 5 = 2y + 1,$$

ou

$$(1+2)^y = 2y + 1;$$

je développe le premier membre par la formule du binôme, et il vient

$$y(y-1)\left[2 + \frac{(y-2)}{3}2^2 + \ldots\right] = 0.$$

De la sorte, les deux racines $y = 0$, $y = 1$, sont mises en évidence; et, se reportant à l'équation (2), on en tire

$$x = 3 \quad \text{et} \quad x = 4,$$

racines qui vérifient l'équation (1).

Actuellement, ramenant l'équation (1) à la forme

$$f(x) = 0,$$

je prends la dérivée

$$f'(x) = 3^x \log' 3 - 54.$$

Pour que cette dérivée soit négative, il faut que l'on ait

$$3^x < \frac{54}{\log' 3},$$

inégalité qui sera vraie, à fortiori, si l'on a

$$3^x \leqq \frac{54}{2} \text{ ou } 27;$$

car

$$\log' 3 = 1{,}0986122\ldots < 2.$$

Or cette inégalité est évidemment satisfaite par

$$x \leqq 3.$$

On voit de même que, pour $x \geqq 4$, on a toujours

$$f(x) > 0.$$

Donc la fonction est constamment décroissante depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = 3$, et croissante depuis $x = 4$ jusqu'à $x = +\infty$; et, conséquemment, l'équation n'a pas de racines en dehors des limites 3 et 4.

En second lieu, il est évident que si une valeur de x rend positif le binôme $3^x \log' 3 - 54$, toute valeur supérieure $x + h$ le rendra, à fortiori, positif. Donc, quand la fonction $f(x)$, décroissante à partir de $x = 3$ et devenue négative, aura atteint son maximum, elle croîtra constamment et d'une manière continue jusqu'à l'infini. Donc elle ne pourra passer qu'une fois par zéro, ce qui aura lieu pour $x = 4$, puisque $f(4) = 0$. Ainsi l'équation proposée admet les racines 3 et 4 et n'en a pas d'autres.