

Tangentes communes à une conique et à un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 408-411

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__408_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

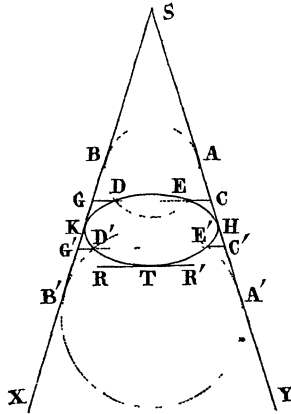
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TANGENTES COMMUNES A UNE CONIQUE ET A UN CERCLE.

PROBLÈME. *Par deux points D, E, donnés sur une ellipse HEDK, on fait passer une circonférence quelconque DEAB, puis on mène à ces deux courbes des tangentes communes HAS, KBS : trouver le lieu géométrique du point S de rencontre de ces tangentes.*

(CHASLES.)



Pour résoudre cette question, j'établirai le lemme suivant.

Soient HEDK, DEAB, une ellipse et une circonférence tangentes aux deux droites SX, SY, et se coupant en deux points D, E : si l'on mène dans l'ellipse une corde quelconque D'E' parallèle à DE, il sera toujours possible de faire passer par les deux points D', E', une circonférence qui soit tangente aux deux droites SX, SY.

Je prolonge les cordes parallèles DE , $D'E'$, jusqu'à ce qu'elles coupent les tangentes aux points C , G , C' , G' ; et je prends $C'A'$ moyenne proportionnelle entre $C'E'$, $C'D'$, et de même $G'B'$ moyenne proportionnelle entre $G'E'$, $G'D'$. La circonférence conduite par les trois points D' , E' , A' sera tangente à la droite SY en A' ; de même, la circonférence qui passe par D' , E' , B' touche la droite SX en B' . Pour faire voir que ces deux circonférences coïncident, il suffit de démontrer qu'on a

$$SA' = SB',$$

ou, ce qui revient au même,

$$AA' = BB'.$$

Je nomme a , b , c , les diamètres de l'ellipse respectivement parallèles aux droites DE , SX , SY : d'après le théorème de Newton, on a, en désignant par K et H les points où l'ellipse touche SX , SY ,

$$\frac{GD \times GE}{GK^2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{GB^2}{GK^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

ce qui donne

$$GB = GK \times \frac{a}{b};$$

de même

$$G'B' = G'K \times \frac{a}{b},$$

d'où

$$GB + G'B' = GG' \times \frac{a}{b},$$

et, par suite,

$$BB' = GG' \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

On aura semblablement

$$AA' = CC' \left(1 + \frac{a}{c} \right);$$

d'où

$$(1) \quad \frac{GG'}{CC'} = \frac{BB'}{AA'} \left(\frac{1 + \frac{a}{c}}{1 + \frac{a}{b}} \right).$$

De plus

$$\begin{aligned} SK &= SG + GK = SG + GB \cdot \frac{b}{a} = SG + (SG - SB) \frac{b}{a} \\ &= SG \left(1 + \frac{b}{a} \right) - SB \cdot \frac{b}{a}; \end{aligned}$$

de même

$$SH = SC \left(1 + \frac{c}{a} \right) - SA \cdot \frac{c}{a}.$$

Mais, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{SK}{SH} = \frac{b}{c},$$

ou

$$SK \times c = SH \times b.$$

Ce qui donne, en remplaçant SK et SH par leurs valeurs,

$$SG \left(c + \frac{bc}{a} \right) - SB \frac{bc}{a} = SC \left(b + \frac{bc}{a} \right) - SA \frac{bc}{a}.$$

Ou, parce que SB = SA,

$$SG \left(\frac{ac + bc}{a} \right) = SC \left(\frac{ba + bc}{a} \right);$$

il en résulte

$$\frac{SG}{SC} = \frac{ba + bc}{ac + bc} = \frac{\frac{a}{c} + 1}{\frac{a}{b} + 1}.$$

Remplaçant $\frac{\frac{a}{c} + 1}{\frac{a}{b} + 1}$ par $\frac{SG}{SC}$ dans l'égalité (1), il viendra

$$\frac{GG'}{CC'} = \frac{BB'}{AA'} \times \frac{SG}{SC}.$$

Or, à cause des parallèles GC, G'C', on a

$$\frac{GG'}{CC'} = \frac{SG}{SC};$$

donc

$$\frac{BB'}{AA'} = 1, \quad \text{ou} \quad AA' = BB';$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

De là nous concluons que le lieu géométrique reste le même quelle que soit la grandeur ou la position de la corde DE, pourvu que sa direction ne change pas. Que si, par exemple, au lieu de faire passer les circonférences par les extrémités de la corde DE, on les mène par les extrémités de D'E', on trouvera absolument les mêmes points de rencontre pour les tangentes communes. Cette conclusion étant vraie quelque rapprochées que soient les extrémités D', E' de la corde, doit encore subsister lorsque ces deux points se confondent. Dans ce cas, la corde D'E' devient la tangente RTR' à l'ellipse; les circonférences sont elles-mêmes tangentes à l'ellipse au point T. On sait déjà (*Nouvelles Annales*, tome III, page 495) qu'alors le lieu géométrique est une hyperbole qui a les mêmes foyers que l'ellipse (*).

G.

(*) La solution purement analytique présente des difficultés de calcul, à cause des quatre tangentes communes. Cette solution serait très-instructive (voir tome III, page 431).