P. TARDY

Solution générale de la question 78

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 319-324
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__319_1>

SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 78

(voir t. II, p. 454),

PAR M. P. TARDY,
Professeur de Mathématiques à Gênes.

Soit

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

et désignons par

$$\sum A_n^r [1, 2, 3, \ldots, m]$$

la somme des quantités qu'on déduit de A_n^r en changeant les signes à un nombre m des lettres a_1, a_2,..., a_n, et en faisant toutes les combinaisons possibles : le nombre de ces quantités sera évidemment égal à $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$, que nous représenterons, pour abréger, par le symbole $\binom{n}{m}$.

Posons

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} S_n = A_n^n - \sum A_n^n[1] + \sum A_n^n[1,\ 2] - \ldots \\ \quad + (-1)^n \sum A_n^n[1,\ 2,\ldots,\ n]; \end{array}\right.$$

il est clair qu'en développant, suivant les puissances de a_n, $\sum A_n^n[1,\ 2,\ldots,\ m]$, nous aurons pour terme général

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left\{\begin{array}{l} \sum A_{n-1}^{p_1}[1,\ 2,\ldots,\ m] \\ + (-1)^{n-p_1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1,\ 2,\ldots,\ (m-1)] \end{array}\right\},$$

excepté le cas de $m = n$, dans lequel nous obtiendrons seulement

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} (-1)^{n-p_1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1,\ 2,\ldots,\ (n-1)].$$

Cela posé, le terme général, dans le développement de S_n, sera

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left[1 - (-1)^{n-p_1}\right] \left\{\begin{array}{l} A_{n-1}^{p_1} - \sum A_{n-1}^{p_1}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1,2,\ldots,(n-1 \end{array}\right.$$

lequel deviendra évidemment égal à zéro toutes les fois que $n - p_1$ est un nombre pair, et si $n - p_1$ est impair, il se réduira à

$$2\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left\{ \begin{array}{l} A^{p_1}_{n-1} - \sum A^{p_1}_{n-1}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-1} \sum A^{p_1}_{n-1}[1, 2, \ldots, (n-1)] \end{array} \right\}.$$

Considérant la série entre parenthèses, nous aurons de même, pour terme général de son développement,

$$2\binom{p_1}{p_2} a_{n-1}^{p_1-p_2} \left\{ \begin{array}{l} A^{p_2}_{n-2} - \sum A^{p_2}_{n-2}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-2} \sum A^{p_2}_{n-2}[1, 2, \ldots, (n-2)] \end{array} \right\},$$

ou zéro, selon que $p_1 - p_2$ est impair ou pair.

Si nous continuons ainsi, et dans l'hypothèse que $n - p_1$, $p_1 - p_2, \ldots, p_{\mu-1} - p_\mu$ soient tous des nombres impairs, il est clair que nous parviendrons à un terme général

$$2\binom{p_{\mu-1}}{p_\mu} a_{n-\mu+1}^{p_{\mu-1}-p_\mu} \left\{ \begin{array}{l} A^{p_\mu}_{n-\mu} - \sum A^{p_\mu}_{n-\mu}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-\mu} \sum A^{p_\mu}_{n-\mu}[1, 2, \ldots, (n-\mu)] \end{array} \right\},$$

dans lequel on aura $p_\mu = 1$.

Maintenant la quantité

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n-\mu} - \sum A_{n-\mu}[1] + \ldots \\ + (1-)^{n-\mu} \sum A_{n-\mu}[1, 2, \ldots, (n-\mu)], \end{array} \right.$$

sera nulle, excepté dans le seul cas où $A_{n-\mu} = a_1$, c'est-à-dire $\mu = n - 1$. En effet, prenons une quelconque des lettres qui entrent dans $A_{n-\mu}$; elle se trouvera dans

$$\sum A_{n-\mu}[1, 2, \ldots, m],$$

avec le signe positif un nombre de fois égal à celui des combinaisons qu'on peut faire avec $n - \mu - 1$ objets pris m à m, et avec le signe négatif un nombre de fois égal au nombre des combinaisons qu'on peut faire avec $n - \mu - 1$ objets pris $m - 1$ à $m - 1$, c'est-à-dire qu'elle sera multipliée par $\binom{n-\mu-1}{m} - \binom{n-\mu-1}{m-1}$, et, par conséquent, dans l'expression (2), elle aura pour coefficient la série

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \binom{n-\mu-1}{1} + \binom{n-\mu-1}{2} - \ldots + (-1)^{n-\mu-1} \\ \quad + 1 - \binom{n-\mu-1}{1} + \ldots - \binom{n-\mu-1}{1} - (-1)^{n-\mu} \end{array}\right\} = 2(1-1)^{n-\mu-1} =$$

Mais si $\mu = n - 1$, la valeur de l'expression (2) devient $2a_1$. Or, pour arriver jusqu'à la quantité (2) avec $\mu = n - 1$, sans qu'aucun des termes généraux des développements précédents se soit évanoui, il faut que toutes les différences

$$p_{\mu-1} - p_\mu, \quad p_{\mu-2} - p_{\mu-1}, \ldots, \quad p_2 - p_1, \quad n - p_1$$

soient égales à l'unité, c'est-à-dire qu'on ait $p_1 = n - 1$. De là nous pouvons conclure que dans le développement du second membre de l'équation (1), tous les termes qui contiennent des puissances de a_n supérieures à la première se détruisent, et il restera

$$S_n = 2n \,.\, a_n \,.\, S_{n-1}.$$

Par la même raison

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 2(n-1) \,.\, a_{n-1} \,.\, S_{n-2}, \\ S_{n-2} &= 2(n-2) \,.\, a_{n-2} \,.\, S_{n-3}, \\ &\vdots \\ S_2 &= 2 \,.\, 2a_2 \,.\, S_1, \\ S_1 &= 2a_1. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations membre à membre, et ôtant le facteur commun $S_{n-1}.S_{n-2}\ldots S_2.S_1$, il viendra

$$S_n = 2^n.1.2.3\ldots n.a_1.a_2.a_3\ldots a_n;$$

puisqu'en général on a

$$\sum A_n^n[1, 2,\ldots, m] = (-1)^n \sum A_n^n[1, 2,\ldots, (n-m)],$$

l'équation (1) pourra s'écrire ainsi :

$$S_n = 2\left\{A_n^n - \sum A_n^n[1] + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n-1}{2}\right]\right\},$$

pour n impair, et

$$S_n = 2\left\{\begin{matrix} A_n^n - \sum A_n^n[1] + \ldots \\ + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n-2}{2}\right]\end{matrix}\right\} + (-1)^{\frac{n}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right]$$

pour n pair.

La quantité $\sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right]$ contient un nombre pair de termes, lesquels sont deux à deux égaux, et si nous indiquons par $\sum A_n^n\left[\bar{1}, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right]$ la somme de ces termes où parmi les $\frac{n}{2}$ lettres a prises négativement se trouve a_1, nous aurons

$$\sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right] = 2\sum A_n^n\left[\bar{1}, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right],$$

et, par conséquent, on obtiendra les formules (*)

$$2^{n-1}.1.2\ldots n.a_1.a_2\ldots a_n = A_n^n - \sum A_n^n[1] + \sum A_n^n[1, 2] - \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n-1}{2}\right]$$

(*) M. Cauchy a indiqué une démonstration de cette formule, *Comptes rendus*, 1840, 1er semestre, page 569, et d'une manière plus développée dans le tome II des *Exercices*, page 141.

si n est impair, et

$$2^{n-1}.1.2\ldots n.a_1.a_2\ldots a_n = A_n^n - \sum A_n^n[1] + \sum A_n^n[1,2] - \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2, \ldots, \frac{n-2}{2}\right]$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right]$$

si n est pair.

Ainsi pour $n = 3$, on a

$$24.a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3 - (a_1 + a_3 - a_2)^3 - (a_2 + a_3 - a_1)^3;$$

et, pour $n = 4$,

$$\begin{aligned}192.a_1 a_2 a_3 a_4 = {} & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^4 \\ & - (a_1 + a_2 + a_4 - a_3)^4 - (a_1 + a_3 + a_4 - a_2)^4 \\ & - (a_2 + a_3 + a_4 - a_1)^4 + (a_2 + a_3 - a_4 - a_1)^4 \\ & + (a_2 + a_4 - a_3 - a_1)^4 - (a_3 + a_4 - a_2 - a_1)^4.\end{aligned}$$