Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 296-301

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__296_1>

CORRESPONDANCE.

1. M. Dupuy (Léon) adresse une seconde et bonne solution détaillée et discutée de la question 66. (*Voyez* tome IX, page 188; Marqfoy.)

2. M. Mannheim, sous-lieutenant élève d'artillerie (*voyez* tome IX, page 419), a publié à Metz, en janvier 1851, une Note lithographiée sur la théorie des polaires réciproques (Mémoire in-4° de 13 pages). L'auteur fait usage de cette méthode pour transformer une propriété géométrique donnée en d'autres propriétés. A cet effet, il transforme une propriété, par le principe de *dualité* et à l'aide d'un cercle directeur, dans la propriété *polaire* cor-

(*) Le prix est de 4 francs. Une règle à calcul coûte 7 francs.

respondante, et ensuite il transforme cette seconde propriété en une troisième à l'aide d'un second cercle directeur, etc.; c'est un moyen *euristique* assez fécond. L'auteur, s'adressant aux géomètres, s'exprime avec une extrême concision, peut-être aux dépens de la clarté.

3. M. E. de Sécillon, élève au lycée de Nantes, adresse ce théorème : *Un octogone étant inscrit dans une conique, on peut considérer les côtés pairs comme côtés d'un quadrilatère et de même les côtés impairs; or, deux quadrilatères se coupent en seize points; huit de ces points sont évidemment sur la conique donnée et les huit autres points sont sur une seconde conique.* Le moyen de démonstration est celui que M. Gergonne a donné le premier pour démontrer l'hexagramme de Pascal, moyen qui peut se généraliser ainsi : Étant données deux courbes planes de degré n chacune, elles se coupent en n^2 points; si np de ces points sont sur une ligne de degré $p < n$, les $n(n-p)$ points restants sont sur une ligne de degré $n-p$. Dans le théorème énoncé ci-dessus, $n=4$, $p=2$. Lorsque le polygone inscrit est d'un nombre impair de côtés, on remplace le côté manquant par une tangente (*).

4. M. Joseph-Edmond Wagner, aujourd'hui élève à l'École Polytechnique, dans un Mémoire accompagné d'épures très-bien exécutées, s'occupe de la division des angles au moyen de ce lieu géométrique : sur une corde donnée de position et de longueur, on fait passer des arcs de cercles que l'on divise chacun dans le même rapport donné de $1:n$. Les points de division forment une ligne dont il est facile de trouver l'équation; cette ligne étant construite, elle peut servir à diviser un arc et aussi un angle donné. On sait que pour la trisection on obtient une hyperbole; l'auteur trace cette hyperbole ainsi que

(*) Nous donnerons une Note instructive de M. Abel Transon sur ce théorème.

la courbe relative à la quintisection. Le Mémoire est terminé par la construction et la discussion du *folium* suivant qui peut servir à diviser un angle dans un rapport donné $m:n$. Soient AFC un triangle donné rectangle en F, et AFM un triangle dont le sommet est mobile. Soit H le point d'intersection de la droite mobile AM avec la droite fixe FC; supposons qu'on ait la relation, angle $\frac{1^q - \text{MFC}}{1^q} = \frac{\text{FH}}{\text{FC}}$, de là on déduit l'équation polaire du lieu du point M. Ce travail remonte au temps où l'auteur était encore élève au collége de Saverne et annonce de l'application et de l'intelligence.

5. M. Bugnat, élève de Mathématiques supérieures au lycée de Versailles (classe de M. Vannson), énonce et démontre ce théorème :

Dans une conique, si l'on mène la normale en un point quelconque P *et par le foyer* f *une droite* fK *parallèle à cette normale, rencontrant la directrice voisine en* K; *la droite* PK *est un diamètre de la conique.*

A l'aide de ce théorème, M. Bugnat résout le problème suivant :

Connaissant les sommets et les foyers d'une conique, trouver le point de contact d'une tangente donnée de direction, sans que la conique soit tracée.

La démonstration synthétique est facile.

6. M. Bories (Alphonse), élève au lycée de Montpellier, énonce et démontre les théorèmes suivants :

1°. *Soient le triangle rectiligne* ABC; *abc une transversale coupant respectivement* BC, AC, AB en a, b, c; *menons les droites* Aa, Bb, Cc. *Soient* a_1, b_1, c_1, *les intersections respectives des droites* Bb *et* Cc, Aa *et* Cc, Aa *et* Bb; *les droites* Cc_1, Bb_1, Aa_1 *convergent vers le même point.*

Démonstration par les propriétés segmentaires. Le théorème est évident lorsqu'on suppose la transversale parallèle à un des côtés du triangle, et de cette position particulière, on passe par la perspective à la position générale et aussi au triangle sphérique.

2°. *Mêmes données et mêmes constructions; en outre, circonscrivons une circonférence au triangle* ABC; *supposons que cette circonférence coupe* Aa *en* α, Bb *en* β, Cc *en* γ; *les trois droites* αa_1, βb_1, γc_1 *se coupent en un même point.*

Les propriétés des sécantes donnent

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} c_1\beta.c_1B &= c_1\gamma.c_1C,\\ a_1\gamma.a_1C &= a_1\alpha.a_1A,\\ b_1\alpha.b_1A &= b_1\beta.b_1B;\end{aligned}\right.$$

d'où

$$c_1\beta.a_1\gamma.b_1\alpha\;\, c_1B.a_1C.b_1A = c_1\gamma\;\, a_1\alpha.b_1\beta.c_1C.a_1A\;\, b_1B.$$

D'après le théorème précédent, les droites c_1C, b_1B, a_1A passent par le même point. Donc, par une propriété segmentaire, on a

$$c_1C.a_1A.b_1B = c_1B.a_1C.b_1A,$$

puis,

$$c_1\beta.a_1\gamma.b_1\alpha = c_1\gamma.a_1\alpha.b_1\beta;$$

donc les trois droites $c_1\gamma$, $a_1\alpha$, $b_1\beta$ convergent vers le même point. C. Q. F. D.

Cette solution ne diffère que très-peu de celle qui a été donnée tome VI, pages 376 et 377.

3°. *Étant donnés un cercle et un triangle circonscrit* ABC; *prenant respectivement les points* a, b, c, *sur les côtés* BC, AC, AB, *tels que les droites* Aa, Bb, Cc, *convergent vers le même point.*

Soient α *le point d'intersection de la seconde tangente menée par* a *avec le côté* bc, β *le point d'intersection de la tangente menée par* b *avec le côté* ac, *et de même* γ

sur le côté ab; les trois points α, β, γ sont en ligne droite.

En effet, désignons par α_1, β_1, γ_1, les points de contact des côtés BC, AC, AB avec le cercle, et par M_2 le point de contact de la seconde tangente menée par b; il suffit de démontrer que les trois polaires de α, β, γ sont convergentes, et rappelons que la polaire d'un point s'obtient en joignant par une droite les pôles de deux droites passant par ce point; que le pôle d'une droite s'obtient par l'intersection des polaires de deux points pris sur cette droite. Le pôle de Bb est un point β_2 de la droite $\alpha_1\beta_1$ polaire de b; le pôle de Aa est un point α_2 de la droite $\beta_1\gamma_1$, et le pôle de Cc est un point γ_2 de la droite $\alpha_1\beta_1$; mais les trois droites Aa, Bb, Cc étant convergentes, leurs pôles α_2, β_2, γ_2 sont en ligne droite transversale par rapport au triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Cherchons le pôle de ac; $\alpha_1\alpha_2$ est évidemment la polaire de a, $\gamma_1\gamma_2$ la polaire de c; donc le pôle de ac est I_2 intersection des droites $\alpha_1\alpha_2$, $\gamma_1\gamma_2$; $M_2 I_2$ est donc la polaire de γ, et les trois points β_1, M_1, β_2 sont en ligne droite, car $\beta_1 M \beta_2$ est la polaire du point b; donc la circonférence coupe la droite $\beta_1\beta_2$ menée du point β_1 à la transversale $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ au point M_1. Si nous désignons par M_2, M_3 les points où les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\gamma_1\gamma_2$ sont coupées par la circonférence, et par I_2, I_3 les points analogues à I_1, on voit, d'après le théorème II, que les droites $I_1 M_1$, $I_2 M_2$, $I_3 M_3$ sont convergentes et sont les trois polaires de α, β, γ.

Corollaire. Par les points a, b, c on peut faire passer une conique touchant le triangle en ces points. Projetant coniquement la figure sur un plan, on obtient une propriété de collinéation entre deux coniques inscrites au même triangle, et projetant la figure sur une surface quelconque, on parvient à une propriété entre certaines courbes tracées sur ces surfaces.

Observation. C'est une généralisation d'un théorème de M. Chasles, question du grand concours de 1847 (tome VII, pages 294 et 301).

Nous félicitons M. Bories de manier si bien les propriétés segmentaires et polaires; qu'il persévère et se rappelle ce vers du fabuliste :

Laissez dire les sots, le savoir a son prix.