NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PROUHET

Sur une formule relative au calcul inverse des différences

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 186-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__186_0>

SUR UNE FORMULE RELATIVE AU CALCUL INVERSE DES DIFFÉRENCES;

PAR M. E. PROUHET

1. Soit $f(x)$ une fonction algébrique et entière; supposons que l'on substitue à la variable n valeurs en progression arithmétique, depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + (n - 1)h$: la somme des résultats sera une fonction de n que je désignerai par $\varphi(n)$. Nous aurons donc

$$(1) \quad \varphi(n) = f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + \overline{n-1}\, h).$$

Posons de même

$$(2) \quad \psi(n) = f'(a) + f'(a+h) + \ldots + f'(a + \overline{n-1}\, h)$$

Il en résultera

$$(3) \qquad \varphi(n+1) - \varphi(n) = f(a+nh),$$

$$(4) \qquad \psi(n+1) - \psi(n) = f'(a+nh).$$

Mais $\varphi(n)$ est, comme l'on sait, une fonction algébrique et entière de n : de sorte que l'égalité (3), qui a lieu pour une infinité de valeurs de n, puisqu'elle est vraie toutes les fois que n est entier, doit être identique. Nous pourrons donc la différentier par rapport à n, ce qui nous donnera

$$(5) \qquad \varphi'(n+1) - \varphi'(n) = hf'(a+nh),$$

et, en comparant avec (4),

(6) $\varphi'(n+1)-\varphi'(n)=h\psi(n+1)-h\psi(n).$

Si maintenant nous changeons successivement, dans cette égalité, n en $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$, et que nous ajoutions les résultats, nous aurons

$$\varphi'(n+k)-\varphi'(n)=h\psi(n+k)-h\psi(n),$$

ou bien

(7) $\varphi'(n)-h\psi(n)=\varphi'(n+k)-h\psi(n+k).$

Le premier membre de cette égalité est indépendant de k : il doit donc en être de même du second, mais ce dernier est une fonction symétrique de n et de k, et ne peut être indépendant de k sans l'être de n. Il se réduit donc à une constante, et l'on a simplement

$$\varphi'(n)-h\psi(n)=c,$$

ou, suivant les notations usitées,

(F) $$\frac{d}{dn}\Sigma f(x)=\Delta x\,\Sigma f'(x)+c.$$

C'est la formule que nous voulions établir.

2. On tire de (F), en intégrant,

(I) $$\Sigma f(x)=\Delta x\int\Sigma f'(x).dn+cn,$$

et il n'y a pas d'autre constante à ajouter, puisque le premier membre doit s'annuler pour $n=0$.

On voit, par là, que $\Sigma f(x)$ se ramène à $\Sigma f'(x)$; de même $\Sigma f'(x)$ se ramène à $\Sigma f''(x)$, et ainsi de suite.

3. Supposons que $f(x)$ soit du degré m; alors $f^m(x)$ sera une constante A, et l'on aura tout d'abord

$$\Sigma f^{(m)}(x)=\mathrm{A}n,$$

d'où l'on tire successivement, en appliquant la formule (I),

$$\Sigma f^{m-1}(x) = \frac{\mathrm{A}hn^2}{1.2} + \frac{\mathrm{B}_1 n}{1},$$

$$\Sigma f^{m-2}(x) = \frac{\mathrm{A}h^2n^3}{1.2.3} + \frac{\mathrm{B}_1 hn^2}{1.2} + \frac{\mathrm{B}_2 n}{1},$$

$$\Sigma f^{m-3}(x) = \frac{\mathrm{A}h^3n^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathrm{B}_1 h^2 n^3}{1.2.3} + \frac{\mathrm{B}_2 hn^2}{1.2} + \frac{\mathrm{B}_3 n}{1},$$

. . . .

$$\Sigma f(x) = \frac{\mathrm{A}h^m n^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{\mathrm{B}_1 h^{m-1} n^m}{m!} + \frac{\mathrm{B}_2 h^{m-2} n^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + \frac{\mathrm{B}_m n}{1},$$

$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_m$, désignent des constantes dont on déterminera successivement la valeur, à chaque intégration, en faisant $n = 1$.

4. Proposons-nous maintenant de trouver la somme S_m des m^{iemes} puissances de n nombres en progression arithmétique. On sait que le procédé ordinaire consiste à exprimer S_m en fonctions de S_{m-1}, S_{m-2}, etc.; mais on n'arrive ainsi au but qu'à l'aide de substitutions pénibles, et la complication du calcul croît rapidement avec m. Les formules (F) et (I) vont, au contraire, nous fournir un procédé d'une extrême simplicité.

Dans le cas particulier dont il s'agit, on a $f(x) = x^m$, $f'(x) = mx^{m-1}$, et les formules (F) et (I) deviennent

$$(\mathrm{F}') \qquad \mathrm{S}'_m = mh\,\mathrm{S}_{m-1} + \mathrm{B}_m,$$

$$(\mathrm{I}') \qquad \mathrm{S}_m = mh \int \mathrm{S}_{m-1}\, dn + n\,\mathrm{B}_m.$$

Comme on connaît $\mathrm{S}_0 = n$, on aura, d'après (I'),

$$\mathrm{S}_1 = h \int n\,dn + n\mathrm{B}_1 = \frac{hn^2}{2} + \frac{2a-h}{2}\, n,$$

en déterminant la constante B_1 par la condition que le second membre se réduise à a pour $n = 1$. On passera avec la même facilité à S_2, S_3, etc.

Par exemple, si l'on veut avoir les sommes des puissances semblables des termes de la suite naturelle, on fera $a = 1$, $h = 1$, et l'on obtiendra sans peine les résultats suivants :

$$S_0 = n,$$
$$S_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$
$$S_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$
$$S_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$
$$S_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$
$$S_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$$
$$S_6 = \frac{n}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42},$$
$$S = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12},$$
$$S_8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30},$$
$$S_9 = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20},$$
$$S_{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66},$$
$$S_{11} = \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \frac{11n^{10}}{12} - \frac{11n^8}{8} + \frac{11n^6}{6} - \frac{11n^4}{8} + \frac{5n^2}{12},$$

etc

5. La formule démontrée au commencement de cet article n'est pas nouvelle · elle coïncide avec la suivante, citée par Lacroix (*),

$$\frac{d\Sigma u}{dx} = \sum \frac{du}{dx},$$

(*) *Traité des différences et des séries*, page 93.

lorsqu'on y fait $\Delta x = 1$, $n = x$ et que l'on comprend la constante dans le symbole $\sum$; mais la conséquence immédiate à laquelle elle conduit, lorsqu'il s'agit d'une fonction algébrique et entière, ne paraît pas avoir été remarquée.

Au reste, l'utilité de cette formule n'est pas bornée aux seules fonctions algébriques; elle permet encore de ramener à un problème de calcul intégral ordinaire la sommation d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes. C'est ce que nous allons montrer en commençant par quelques cas particuliers.

1°. Soient

$$y = \Sigma u e^{ax}; \quad y_1 = \Sigma u' e^{ax};$$

la formule donne immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = ay + y_1 + c;$$

équation différentielle du premier ordre qui ramène $\Sigma u e^{ax}$ à $\Sigma u' e^{ax}$. Si donc u est une fonction algébrique et entière de x, alors y dépendra, en dernière analyse, d'une équation de la forme

$$\frac{dz}{dx} = az + c,$$

qui s'intègre immédiatement.

2°. Soient

$$y = \Sigma u \sin bx, \quad z = \Sigma u \cos bx,$$
$$y_1 = \Sigma u' \sin bx, \quad z_1 = \Sigma u' \cos bx;$$

on aura, en différentiant deux fois de suite,

$$\frac{dy}{dx} = bz + y_1 + c,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2 y + bz_1 + y'_1 + c_1,$$

et, en posant $V = bz_1 + y'_1 + c_1$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = V,$$

équation du second ordre qui ramène $\Sigma u \sin bx$ à $\Sigma u' \sin bx$ et $\Sigma u' \cos bx$. On pourra donc trouver $\Sigma u \sin bx$, par une suite de réductions, quand u sera une fonction algébrique et entière de x.

3°. Soient

$$y = \Sigma u\, e^{ax} \sin bx, \quad z = \Sigma u\, e^{ax} \cos bx,$$
$$y_1 = \Sigma u' e^{ax} \sin bx, \quad z_1 = \Sigma u' e^{ax} \cos bx;$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = y_1 + bz + ay + c,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'_1 + b(z_1 + by + az + c_1) + a\frac{dy}{dx}.$$

L'élimination de z entre ces deux équations donnera une équation du second ordre et fera dépendre y de y_1 et de z_1. Il sera donc possible d'obtenir les intégrales demandées, si u est une fonction algébrique et entière de x.

En résumé, le rapprochement des trois résultats qui précèdent montre qu'on pourra trouver

$$\Sigma f\,(x, \sin bx, \cos bx, e^{ax}),$$

lorsque la fonction f sera algébrique et entière.

Toutes ces applications de la formule $\frac{d\Sigma u}{dx} = \sum \frac{du}{dx}$ ont peut-être été déjà faites; mais comme elles ne se trouvent pas même indiquées dans le grand Traité de Lacroix, et à plus forte raison dans les Traités élémentaires, j'ai pensé qu'il n'était pas inutile d'en dire ici quelques mots.