

MOIGNO

**Exposition de la méthode de M. Cauchy pour le calcul, par approximations successives certaines, des racines réelles des équations algébriques. Comment cette méthode se réduit à celle de Newton, quand la méthode de Newton est applicable. Caractère analytique simple et sûr auquel on reconnaît que la méthode de Newton est applicable**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 10 (1851), p. 14-23

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1851\\_1\\_10\\_\\_14\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__14_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

### EXPOSITION DE LA MÉTHODE DE M. CAUCHY

Pour le calcul, par approximations successives certaines, des racines réelles des équations algébriques. — Comment cette méthode se réduit à celle de Newton, quand la méthode de Newton est applicable. — Caractère analytique simple et sûr auquel on reconnaît que la méthode de Newton est applicable ;

PAR M. L'ABBÉ MOIGNO,  
Aumônier du lycée Louis-le-Grand.

---

La résolution des équations algébriques comprend quatre grands problèmes : 1<sup>o</sup> démontrer que toute équation a une racine ; 2<sup>o</sup> déterminer le nombre des racines comprises entre deux limites données ; 3<sup>o</sup> séparer les racines ; 4<sup>o</sup> enfin calculer la valeur numérique de ces racines. M. Cauchy a eu le bonheur et la gloire d'arriver le premier à des solutions vraiment élémentaires, simples et praticables de ces quatre problèmes.

On n'a rien ajouté à sa démonstration du théorème, que toute équation algébrique a une racine ; cette démonstration seulement n'a pas été présentée encore sous la forme extrêmement simple qu'on peut lui donner. Je le ferai bientôt dans ce Journal.

M. Sturm a rendu plus facile, théoriquement parlant ,

le calcul du nombre des racines réelles comprises entre des limites données. De mon côté, j'ai publié, en partant des principes établis par M. Cauchy, la démonstration la plus naturelle et la plus directe, non-seulement du théorème de M. Sturm, mais des théorèmes analogues de Descartes, Rolle, Budan, Fourier, etc., et même du théorème de M. Cauchy relatif au nombre des racines imaginaires. M. Terquem a bien voulu insérer, dans les *Nouvelles Annales*, un abrégé de mon Mémoire (t. III, p 188); je lui demanderai de revenir moi-même sur ce sujet, et de ramener ma démonstration à des termes tellement simples, qu'on soit désormais forcé de lui donner place dans l'enseignement.

Il y a plus de trente ans que M. Cauchy nous a appris à calculer immédiatement, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'équation aux carrés des différences, une quantité plus petite que la différence entre deux racines quelconques d'une équation algébrique, et, chose extraordinaire, incompréhensible, c'est à peine si le magnifique théorème du plus grand mathématicien des temps modernes commence à pénétrer dans nos traités élémentaires; c'est à peine si on l'a bien compris. Je vois avec la plus vive douleur que l'un de nos jeunes professeurs les plus distingués et les plus progressifs, M. Joseph Bertrand, dans son *Traité élémentaire d'Algèbre* qui vient de paraître, n'a pas même indiqué l'admirable méthode de calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation, méthode sur laquelle repose la séparation des racines.

Enfin voilà quatorze ans que les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* renferment la solution, simple à l'excès et tout à fait élémentaire, du quatrième problème abordé, sans assez de succès, il faut bien le dire, par les géomètres les plus éminents, La-

grange, Poisson, Fourier, etc. Cette solution me fut adressée de Prague par M. Cauchy, avec ce préambule : « La méthode que jè vais exposer est tellement simple, qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle ne se soit pas présentée plus tôt à l'esprit des géomètres. D'un autre côté, elle est tellement générale, qu'elle fournit immédiatement des valeurs aussi approchées qu'on le désire de toutes les racines réelles des équations algébriques, souvent même des équations transcendantes. Enfin les approximations successives sont non-seulement très-faciles, mais encore très-rapides; aussi rapides, pour le moins, que dans la méthode newtonienne, et il arrive bientôt un moment où le nombre des chiffres décimaux est plus que doublé à chaque opération nouvelle. » M. Cauchy ajoutait : « Les avantages de la nouvelle méthode sont tellement sensibles, qu'une fois livrée au public, elle ne peut manquer, ce me semble, d'être adoptée et mise en pratique par tous les amis des sciences. »

Qu'est-il arrivé cependant; j'ai livré au public, en 1835, ce procédé si élégant, si simple, si sûr, et les trop nombreux traités d'algèbre rédigés depuis cette époque lui sont restés fermés, et il est à peine deux ou trois professeurs ou amateurs qui le connaissent, tant est forte la tendance de l'homme à ne prendre pour guide que l'habitude, la routine et ses petites pensées.

Avant d'exposer la nouvelle solution avec tous les développements qu'elle doit et qu'elle peut recevoir, je crois devoir la réduire à sa plus simple expression.

Voici d'abord l'énoncé analytique et géométrique tour à tour du problème proposé.

*Énoncé analytique.* On a trouvé une première valeur approchée  $a$  de la plus petite  $\alpha$  des racines réelles d'une équation donnée  $f(x) = 0$ , comprises entre  $a$  et  $A$ , et l'on demande une seconde valeur plus approchée  $a$ , de cette

même racine  $\alpha$ . La première valeur approchée  $a$  peut être, si l'on veut, la limite inférieure  $l$  des racines de l'équation proposée, limite que l'on calcule immédiatement, et l'on peut prendre pour  $A$  la limite supérieure de ces mêmes racines.

Le problème pourrait encore s'énoncer analytiquement comme il suit : Étant donnée une première valeur approchée  $a$  de la plus petite  $\alpha$  des racines de l'équation  $f(x) = 0$ ; former, en partant de  $a$  et de  $f(x) = 0$ , une équation du premier degré dont la racine unique  $a_1$  soit une valeur plus approchée de  $\alpha$  que  $a$ .

*Énoncé géométrique.* La courbe représentée par l'équation  $y = f(x)$  passe par le point  $M [x = a, y = b = f(a)]$ , et l'on demande de mener une droite qui parte de ce même point, dont l'ordonnée soit toujours plus petite en valeur numérique que l'ordonnée de la courbe, et qui, par conséquent, rencontre l'axe des  $x$  plus tôt que la courbe  $y = f(x)$ , ou en un point dont l'abscisse  $x = a_1$  soit comprise entre  $x = a$  et  $x = \alpha$ .

Disons-le franchement, ce problème, si simple dans son énoncé analytique ou géométrique, a épuisé, jusqu'en 1836, les forces des mathématiciens les plus habiles, et Fourier en a fait implicitement le sujet d'un gros volume sans le résoudre! Il est donc vrai que les difficultés les plus abordables en elles-mêmes, sont souvent celles dont on triomphe le plus tard, et que le génie seul peut les surmonter. Les bras tomberont aux lecteurs de cet article quand nous leur aurons révélé le mot de l'énigme; ils n'en croiront pas à leurs yeux, ils penseront peut-être que nous plaisantons.

*Solution.* Pour plus de simplicité, nous supposerons, ce qui est toujours permis, que la racine  $\alpha$  est positive, et que  $f(a)$ , ou l'ordonnée du point de départ, est elle-même positive.

Posons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = F(x)$$

ou

$$f(x) = f(a) + (x - a) F(x),$$

$F(x)$  sera, comme on sait, une fonction entière. Décomposons-la en deux parties, l'une  $\varphi(x)$  formée de l'ensemble des termes positifs, l'autre  $\chi(x)$  formée de l'ensemble des termes négatifs; nous aurons

$$F(x) = \varphi(x) - \chi(x),$$

et chacune des parties  $\varphi(x)$ ,  $\chi(x)$ , prise séparément, croîtra indéfiniment avec  $x$ , ou quand  $x$  passera de la valeur  $a$  à la valeur  $A$ . Dès lors, si l'on donne à  $x$  dans  $\varphi(x)$  ou dans la somme des termes positifs sa plus petite valeur  $a$ , dans  $\chi(x)$  ou dans la somme des termes négatifs sa plus grande valeur  $A$ , et que l'on prenne la différence

$$\varphi(a) - \chi(A) = m_1,$$

cette différence sera, dans l'intervalle de  $a$  à  $A$ , toujours inférieure aux valeurs de  $F(x)$ ; on aura donc

$$F(x) > m_1 \quad \text{ou} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > m_1,$$

et, par suite, puisque, dans l'intervalle dont il s'agit,  $x - a$  est positif,

$$f(x) > f(a) + m_1(x - a).$$

La fonction donnée  $f(x)$  et la fonction du premier degré  $f(a) + m_1(x - a)$  ont ainsi entre elles les relations suivantes: 1<sup>o</sup> pour  $x = a$ , elles prennent la même valeur positive  $f(a)$ ; 2<sup>o</sup> la fonction du premier degré, positive au départ, a une valeur numérique toujours inférieure à celle de  $f(x)$ ; donc, quand  $f(x)$  sera devenue zéro pour

$x = \alpha$ , la quantité  $f(a) + m_1(x - a)$  sera devenue négative, après s'être évanouie pour une valeur  $a_1$  de  $x$  comprise entre  $a$  et  $\alpha$ , et donnée par l'équation

$$f(a) + m_1(a_1 - a) = 0,$$

d'où l'on tire

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{m_1}.$$

$a_1$  est précisément la seconde valeur plus approchée de la racine  $\alpha$ . En désignant par  $a_2, a_3, a_4, \dots$  des valeurs déduites de  $a_1, a_2, a_3$  comme  $a_1$  l'a été de  $a$ , on obtiendra une série de quantités

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{m_1}, \quad a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{m_2}, \quad a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{m_3}, \dots,$$

qui approcheront de plus en plus de la plus petite racine  $\alpha$ ; on pourra donc calculer cette racine avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

*Géométriquement.* La droite  $y = f(a) + m_1(x - a)$  part, comme la courbe  $y = f(x)$  du point  $x = a$ ,  $y = f(a)$ , et son ordonnée est constamment plus petite que celle de la courbe; elle rencontrera donc l'axe des  $x$  plus tôt, et l'abscisse de ce point de rencontre est la valeur plus approchée de la racine  $\alpha$ .

Si l'on se rappelle que la correction donnée par la méthode de Newton est, dans le cas que nous avons considéré,  $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ ,  $f'(x)$  étant le polynôme dérivé de  $f(x)$ , on verra que la nouvelle correction ne diffère de l'ancienne que par la substitution à  $f'(a)$ , de la différence  $\zeta(a) - \chi(A)$  aussi facile à calculer. Mais la nouvelle correction est certaine, tandis que l'ancienne était souvent incertaine, et éloignait quelquefois de la véritable racine au lieu d'en rapprocher.

On démontre facilement, et l'on trouve démontrée dans plusieurs Algèbres élémentaires, la formule suivante :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f' [x + \theta(x - a)],$$

$\theta(x - a)$  indiquant une fraction de  $(x - a)$ , ou  $\theta$  un nombre plus petit que l'unité. En comparant cette équation à celle qui définit  $F(x)$ ,

$$f(x) = f(a) + (x - a)F(x),$$

on voit qu'entre  $a$  et  $A$ , la valeur de  $F(x)$  est toujours une des valeurs que prend la dérivée  $f'(x)$  dans ce même intervalle.

Si l'on décompose  $f(x)$  comme on l'a fait de  $F(x)$  en deux parties, l'une  $\lambda(x)$  formée de l'ensemble des termes positifs, l'autre  $-\mu(x)$  formée de l'ensemble des termes négatifs, on aura

$$f(x) = \lambda(x) - \mu(x), \quad f'(x) = \lambda'(x) - \mu'(x).$$

De plus, comme la différence  $\lambda'(a) - \mu'(A)$  sera, dans l'intervalle de  $a$  à  $A$ , plus petite que toutes les valeurs de la dérivée; cette même différence sera aussi toujours plus petite que  $F(x)$ , et l'on pourra la prendre à la place de  $m_1$ . La correction devient alors

$$\frac{-f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(A)},$$

tandis que celle de Newton est

$$\frac{-f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(a)};$$

la différence consiste donc dans la substitution de la limite supérieure  $A$  à la limite inférieure  $a$  dans la somme des termes négatifs; et cette substitution suffit pour que l'approximation, incertaine d'abord ou même illusoire, devienne certaine et rigoureuse.



Et voilà le secret qui, pendant trois siècles, a échappé à toutes les investigations des géomètres !

Considérons le cas particulier où le polynôme dérivé  $f'(x)$  est toujours croissant ou toujours décroissant entre les limites  $a, A$ , c'est-à-dire le cas où le polynôme dérivé de second ordre  $f''(x)$  est toujours positif ou toujours négatif. La valeur de départ  $\lambda'(a) - \mu'(a)$  dans le premier cas, ou lorsque le polynôme dérivé est toujours positif; la valeur d'arrivée  $\lambda'(A) - \mu'(A)$  dans le second cas, ou lorsque le polynôme dérivé est toujours décroissant, seront inférieures à toutes les valeurs de  $F(x)$ ; on pourra donc faire

$$m_1 = \lambda'(a) - \mu'(a) \quad \text{ou} \quad m_1 = \lambda'(A) - \mu'(A),$$

et la correction sera

$$\frac{-f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(a)} = -\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{ou} \quad \frac{-f(a)}{\lambda'(A) - \mu'(A)} = -\frac{f(a)}{f'(A)};$$

ce sont précisément les corrections indiquées par Newton. La nouvelle méthode, aussi simple en elle-même et d'une efficacité absolue, comprend donc comme cas particulier la méthode de Newton.

Mais existe-t-il un caractère analytique facile, auquel on puisse reconnaître sûrement que la dérivée seconde est toujours positive ou toujours négative? Oui, et ce caractère, si longtemps poursuivi par Fourier, ressort sans peine des considérations qui précèdent. On a

$$f''(x) = \lambda''(x) - \mu''(x);$$

et si l'on fait tour à tour, dans la somme des termes positifs  $x = a, x = A$ , dans la somme des termes négatifs  $x = A, x = a$ , on obtiendra deux différences,

$$\lambda''(a) - \chi''(A), \quad \lambda''(A) - \chi''(a),$$

dont la première est évidemment inférieure, la seconde

évidemment supérieure à toutes les valeurs de  $\lambda''(x) - \mu''(x)$  ou de  $f''(x)$ , dans l'intervalle de  $a$  à  $A$  : donc si ces deux différences, l'une inférieure, l'autre supérieure à toutes les valeurs de la dérivée seconde, sont toutes deux de même signe, la dérivée seconde elle-même conservera constamment le même signe ; et, par conséquent, pour être sûr que cette dérivée seconde est toujours positive ou toujours négative, il suffit de voir si le rapport

$$\frac{\lambda'(A) - \mu'(a)}{\lambda'(a) - \mu'(A)}$$

est positif : le caractère cherché est donc

$$\frac{\lambda'(A) - \mu'(a)}{\lambda'(a) - \mu'(A)} > 0.$$

Je ne sache pas qu'il y ait dans l'histoire des mathématiques un exemple plus frappant d'abord d'une somme énorme de force vive dépensée presque en vain pour établir le plus facile des théorèmes, pour résoudre le plus accessible des problèmes ; puis, d'une inspiration plus heureuse, d'un bonheur plus inouï. On avait construit un levier immense pour soulever un atome qu'une paille suffisait à jeter au vent ! Je me trompe, la théorie des fonctions symétriques, que je rappelais au commencement de cet article, est un fait de ce genre plus étonnant encore ; car, cette fois, le problème était en lui-même très-ardu. Ces inspirations, ces bonheurs arrivent surtout à M. Cauchy, et, qu'on daigne le croire, elles sont le caractère et l'apanage du génie.

C'est une bonne leçon de philosophie des sciences que de faire remarquer les petits artifices de calcul, de décomposition ou de raisonnement qui amènent ces grands triomphes, ces succès inespérés. La théorie et le calcul des fonctions symétriques découlent de cette remarque

très-ridicule en apparence : Si l'on divise un polynôme entier  $F(a)$  par un autre polynôme entier  $f(a)$  nul en valeur numérique, ou tel que l'on ait  $f(a) = 0$ , le reste de la division sera égal à  $F(a)$ .

Ce qui a rendu possible et excessivement simple le calcul d'une valeur certainement plus approchée de la racine, ce qui a permis d'établir le caractère auquel on reconnaît que la méthode de Newton est applicable, c'est la décomposition, au premier aspect sans portée, de  $F(x)$  en deux parties, l'une  $\varphi(x)$  formée de la somme des termes positifs, l'autre  $\chi(x)$  formée de la somme des termes négatifs.

Voilà tout le secret, ou la clef qui a permis d'ouvrir ces trésors si longtemps cachés.

Il nous reste, et cela ne sera pas inutile, à donner une rédaction plus détaillée, plus complète, plus savante de cette excellente méthode que tous doivent connaître, admirer et pratiquer.