Nouvelles annales de mathématiques

Géométrie segmentaire sur les polygones

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 100-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__100_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE. SUR LES POLYGONES.

1. Soit une courbe F jouissant de ces deux propriétés : 1° deux de ces courbes, en se coupant, forment quatre angles; les angles opposés au sommet sont égaux, et les angles adjacents sont supplémentaires; α étant l'un de ces angles, supposons que l'on ait

$$\varphi(\alpha) = \varphi(2^q - \alpha),$$

φ désignant une fonction qui a la propriété énoncée par l'équation ; il existe une infinité de ces fonctions ; la plus connue est

$$\varphi(\alpha) = \sin\alpha;$$

2° dans un triangle ABC formé par trois de ces courbes F, supposons que l'on ait toujours

$$\frac{\psi(a)}{\varphi(\mathrm{A})} = \frac{\psi(b)}{\varphi(\mathrm{B})} = \frac{\psi(c)}{\varphi(\mathrm{C})};$$

A, B, C désignent les angles ; a, b, c les longueurs des côtés opposés, et φ une fonction douée de la propriété écrite dans l'équation. Pour de telles courbes, on a le théorème suivant.

Théorème. *Un polygone formé par des courbes* F *étant coupé par une transversale* F, *le produit des fonctions* ψ *des segments d'indices pairs est égal au produit des fonctions* ψ *des segments d'indices impairs.*

Les cas les plus simples sont ceux où l'on a

$$\varphi(\alpha) = \sin\alpha \quad \text{et} \quad \psi(a) = a,$$

ou bien

$$\psi(a) = \sin a,$$

et dont nous avons donné la démonstration la plus simple possible (tome VII, page 459), et ce même moyen de démonstration s'applique mot à mot au cas général, qui existe peut-être pour des lignes géodésiques autres que la droite et le cercle.

2. Le théorème segmentaire de la transversale subsiste aussi pour des polygones plans non convexes et pour les polygones étoilés; de même pour les polygones sphériques : observation essentielle qu'il ne faut pas omettre.

3. Théorème. *Un polygone gauche étant coupé par un plan, le produit des segments d'indices pairs est égal au produit des segments d'indices impairs.*

Démonstration. Menons un plan perpendiculaire au plan transversal, et projetons le polygone gauche sur ce plan. L'intersection des deux plans est une transversale dans le polygone en projection; les segments en projection étant proportionnels aux segments projetés, on peut substituer les uns aux autres, et l'on obtient la propriété énoncée (*).

4. Théorème de M. Poncelet. *Si, par un point pris à volonté dans le plan d'un polygone quelconque d'un nombre impair de côtés, on mène à chaque sommet une droite prolongée jusqu'au côté opposé, le produit de tous les segments d'indices pairs est égal au produit des segments d'indices impairs.*

Solution. Soient $2n+1$ le nombre de côtés; les droites menées aux angles forment un faisceau plan de $2n+1$ rayons; et en prolongeant chacun de ces *rayons* jusqu'aux côtés respectivement opposés, on partage le polygone en $4n+2$ triangles; aux segments, on peut substituer les aires des triangles, et à celles-ci les *sinus* des angles formés

(*) Voyez *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, par Lefébure de Fourcy... LAFREMOIRE; seconde édition, page 224.

par deux rayons adjacents, et les mêmes sinus se trouvant dans deux produits segmentaires, ces produits sont égaux.

Observation. Le théorème subsiste pour les polygones non convexes ou étoilés, et aussi pour les polygones sphériques, en substituant aux segments les sinus des segments.

Lorsque le nombre des côtés est pair, on mène par un sommet quelconque une droite qu'on suppose être la direction d'un côté devenu *nul* en ce point, et le théorème s'applique aussi pour ce cas.

Observation. Ce théorème a été énoncé la première fois, en 1822, pour les polygones, dans le *Traité des figures projectives,* page 85. C'est Jean Bernoulli qui, le premier, a donné cette proposition pour le triangle; voici son énoncé :

Si per quodvis punctum in triangulo quovis rectilineo ex singulis angulis ducantur rectæ ad latera opposita; erunt solida ex tribus laterum segmentis, non contiguis, facta inter se æqualia. (*Op. omnia,* tome IV, n° 145, page 33; 1742.)

Le théorème de M. Poncelet est une belle généralisation du théorème de Bernoulli.

5. Théorème. *Étant donné un polygone gauche d'un nombre impair de côtés, si, par une droite fixe et par chaque sommet du polygone, on mène un plan qui coupe le côté respectivement opposé en deux segments, le produit des segments d'indice pair est égal au produit des segments d'indice impair.*

Démonstration. En projetant le polygone sur un plan perpendiculaire à la droite fixe, on est ramené au théorème de M. Poncelet, car les projections des segments d'un même côté sont proportionnelles à ces segments.

Observation. On compte les segments en partant d'un sommet quelconque, et parcourant le périmètre dans le même sens, les segments ayant des indices de même parité n'ont jamais de points en commun.

6. Un faisceau plan étant coupé par une transversale, si l'on forme un rapport *projectif* avec ces segments, on peut substituer aux segments les sinus des angles formés par les rayons du faisceau; considérant le sommet du faisceau comme le centre d'une sphère, la transversale se projette sur la sphère suivant un arc de grand cercle, et les rayons du faisceau divisent cet arc en segments circulaires dont les sinus fournissent le même rapport projectif que celui qui existe entre les segments rectilignes. C'est un moyen général de transporter aux polygones sphériques les propriétés projectives segmentaires des polygones rectilignes.

7. Le théorème de M. Rouart (*voir* tome IX, page 400) subsiste aussi pour les polygones sphériques circonscrits à un même petit cercle. Imaginons un cône concentrique à la sphère ayant pour base les deux polygones. Coupant ce cône par un plan, on obtient deux polygones rectilignes circonscrits à un cercle; appliquant à ces polygones le théorème de M. Rouart, on peut remplacer chaque segment par le sinus de l'angle que forment les deux rayons qui vont aux extrémités du segment. Ce même théorème subsiste-t-il pour des polygones sphériques quelconques?