NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1851.

On souscrit aussi

A ANGOULÊME. .	chez	PEREZ-LECLER.
BORDEAUX. . .	—	CHAUMAS.
BOURGES.	—	VERMEIL.
BREST.	—	M^me V^ve LEFOURNIER.
LILLE.	—	VANACKÈRE.
LORIENT.	—	LEROUX-CASSART.
LYON	—	PERISSE frères.
	—	BRUN et C^ie.
MARSEILLE. . .	—	M^me V^ve CAMOIN.
METZ.	—	WARION.
MONTPELLIER.	—	SÉWALLE.
NANCY.	—	G. GRIMBLOT et C^ie.
NANTES.	—	FOREST aîné.
	—	GUÉRAUD.
ORLÉANS.	—	GATINEAU.
RENNES	—	VERDIER.
ROCHEFORT. . .	—	M^me FLEURY.
	—	PROUST-BRANDAY.
ROUEN.	—	LEBRUMENT.
STRASBOURG. .	—	TREUTTEL et WURTZ.
	—	M^me LEVRAULT.
	—	DERIVAUX.
TOULON.	—	MONGE.
TOULOUSE. . . .	—	M^lles GALLON sœurs.
	—	PRIVAT.
	—	GIMET.
LEIPSIG.	—	MICHELSEN.
LONDRES. . . .	—	BAILLIÈRE.
	—	DULAU et C^te, Soho-Square.
MADRID.	—	BONNAT, SARVY et C^ie.
	—	MONIER.
TURIN.	—	BOCCA.
VIENNE.	—	ROHRMANN

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles Nationales d'Artillerie,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME DIXIÈME.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1851.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DISCOURS

Prononcé dans la séance d'ouverture du Cours de Calcul des Probabilités, à la Faculté des Sciences, le 23 novembre 1850;

PAR M. LAMÉ,
Membre de l'Institut.

Avant de commencer le cours dont je suis chargé, j'ai besoin d'entrer dans quelques détails préliminaires, pour expliquer le rôle qui me paraît destiné au calcul des probabilités, dans l'enseignement fait à la Faculté des Sciences.

Le faisceau des sciences exactes, des mathématiques en général, comprend des parties plus voisines des applications, qui forment, pour ainsi dire, leur laboratoire d'essais. C'est là que les théories naissent, se complètent et se perfectionnent; que les procédés, les instruments dont le géomètre dispose, sont façonnés, et en quelque sorte aiguisés, pour les rendre propres à résoudre des questions qui intéressent les sciences d'observation, la pratique industrielle, et la société en général.

Voilà ce qu'ont de commun les deux sciences auxquelles on a donné les noms de *physique mathématique*, et de *calcul des probabilités*. La première s'occupe spécialement des applications qui concernent la nature inorganique, et dont le caractère principal est la continuité; ce qui réduit le plus souvent son travail à rechercher certaines fonctions continues, qui vérifient des conditions données par des équations différentielles; c'est-à-dire à résoudre des problèmes de par calcul intégral.

La seconde science, appelée *calcul des probabilités*, ne se borne pas aux faits physiques : elle étudie et compare les nombres donnés par l'expérience, par l'observation, accumulés par toutes les statistiques. Elle déduit de cette étude, et de cette comparaison, non l'explication, ou la succession nécessaire et indéfinie des phénomènes, mais seulement les limites entre lesquelles se trouveront, le plus probablement, les phénomènes à venir. Ses données et ses résultats sont presque toujours discontinus; et ce n'est que par approximation qu'ils peuvent revêtir la forme des fonctions continues. Ses conditions sont plus souvent exprimées par des inégalités que par des équations. Le calcul infinitésimal ne lui est pas précisément applicable; c'est plutôt le calcul direct et inverse des différences finies. En réalité, son arme naturelle est la théorie des combinaisons, mais beaucoup plus étendue, plus générale, que dans l'algèbre ordinaire.

Les grandes découvertes les plus récentes des sciences exactes, les progrès réels qu'elles ont faits dans ce siècle, se rapportent presque exclusivement à la physique mathématique, et au calcul des probabilités. (Car la théorie des transcendantes elliptiques, elle-même, peut être considérée comme un appendice au calcul intégral, que réclamaient la mécanique rationnelle, et les autres applications de l'analyse à la physique.) Sur ces deux sciences sont venus se concentrer les efforts de nos plus illustres géomètres. C'est surtout en les étudiant, qu'une personne, attirée vers les mathématiques, perfectionnera ses facultés spéciales, et parviendra à les utiliser.

Sous ce point de vue, les deux sciences dont il s'agit ont des qualités différentes : la physique mathématique, plus difficile peut-être, donne plus immédiatement des applications nouvelles, quand on est parvenu à la faire avancer sur quelque point. Mais le calcul des probabilités exerce plus efficacement l'esprit de recherches, par la variété des questions qu'il se propose, et celle des solutions qu'il trouve, par l'absence même d'une méthode générale, qui puisse s'adapter à tous les sujets. Cette variété et cette lacune tiennent constamment en haleine l'attention, la perspicacité du géomètre, le forcent à passer en revue toutes ses ressources, à essayer tous ses moyens d'action; lutte incessante, qui le familiarise avec les difficultés de l'analyse, et le rend plus capable que tout autre de les surmonter.

Les caractères que je viens de signaler justifient pleinement l'introduction d'un cours de calcul des probabilités dans l'enseignement de nos Facultés. Rien ne fait mieux comprendre l'esprit, le but, la liaison des différentes parties des mathématiques, que d'étudier une science où tous leurs procédés sont successivement mis en jeu, pour obtenir les solutions d'une multitude de problèmes nouveaux, très-variés, qu'il serait difficile de ramener à un petit nombre de types.

Les autres cours de mathématiques, par leur régularité, leur permanence, par les méthodes générales qui les constituent, montrent en quoi consistent les anciennes applications de l'analyse, et comment les géomètres sont parvenus à vaincre les difficultés qu'elles présentaient. Mais, à moins de se transformer, et de se lancer dans la physique mathématique, ces cours classiques, réunis sous la singulière dénomination de mathématiques *pures*, ne donnent tout au plus que des indications vagues, sur la marche qu'il faudrait suivre pour aborder de nouvelles applications. Ils constatent, énumèrent, perfectionnent les travaux du passé; ils ne s'occupent pas des travaux à venir.

Les savants qui les ont exclusivement étudiés, et qui sont animés du goût des recherches, ou ne trouvent plus qu'à glaner sur ce terrain des anciennes découvertes, ou bien consument leurs efforts à s'ouvrir une route dans une direction stérile, en quête de quelque théorie, qui n'a en vue aucune application, et qui ne sera peut-être jamais d'aucune utilité. Au contraire, qu'ils étudient, en outre, les deux sciences que j'ai définies, encore incomplètes, où il y a tant à faire, dans lesquelles les explorations commencées signalent tant d'activité, d'originalité, de vues nouvelles; ils seront là sur un terrain presque neuf, où la place ne leur manquera pas, où les applications se présentent d'elles-mêmes, d'où parfois peu de travail fait surgir une découverte utile. Et s'ils retournent aux anciennes théories, pour les étendre et les perfectionner, ils sauront dans quelle direction il convient d'agir, quels genres de progrès réclament les nouvelles applications.

Malgré tant d'avantages incontestables, l'existence de ces cours nouveaux, imparfaitement définis, est souvent remise en question. Mais, supposons que l'on supprime, dans l'enseignement des Facultés, tout cours de mathématique qui n'est pas classique, qui s'occupe d'une science inachevée; qu'on le remplace par un cours appelé *pratique,* sur un genre d'application dont les limites restreintes sont atteintes depuis longtemps, tel que serait, par exemple, un cours de géométrie descriptive; qu'on se borne à enseigner comment l'analyse et la géométrie se sont tirées d'affaire dans tous les problèmes depuis longtemps résolus, pour toutes les applications usuelles; on satisfera sans doute à l'un des besoins de la pratique, mais d'une manière permanente, stationnaire, rétrograde peut-être.

Car, si une nouvelle application surgit, si quelque problème imprévu se présente dans une ancienne application, rien dans l'enseignement ne répondra à ce nouvel appel fait à la science; nos praticiens classiques, qui savaient si bien se servir des instruments qu'on leur a mis en main, les trouveront muets, inutiles, encombrants même dans cette occurrence nouvelle; ils seront incapables de s'en forger d'autres. Et, si la difficulté est vaincue, ce sera par quelque voyageur étranger qui, ayant quitté les routes battues pour séjourner quelque temps sur le terrain des sciences d'exploration, y aura appris comment les obstacles se surmontent.

D'ailleurs les cours qui embrassent quelque grande application, qui s'y renferment scrupuleusement pour la compléter ou la simplifier, ont une place naturelle autre part qu'à la Faculté des Sciences : destinés à perpétuer certaines découvertes scientifiques, ils sont enseignés, avec tous les développements qu'ils peuvent comporter, dans les amphithéâtres du Conservatoire des Arts et Métiers. Mais vouloir les substituer à des cours qui, souvent, indiquent comment les découvertes se sont faites, se font et se pourront faire, quelles ressources a la science quand elle aborde des questions nouvelles, quels instruments il faut créer ou perfectionner pour parvenir à des solutions; c'est fermer la porte à tout progrès scientifique; c'est, en quelque sorte, emprisonner l'industrie humaine, la contraindre à se contenter des récoltes faites, et l'empêcher de semer pour en obtenir de nouvelles.

Si l'on considère les cours de la Faculté comme plus spécialement destinés à fortifier, à compléter les études faites par les personnes qui se vouent à l'enseignement, il est aisé de reconnaître, dans ce but, l'utilité du cours qui nous occupe.

Il est un principe évident, quoique souvent méconnu, c'est que, pour enseigner avec fruit une science exacte, il faut au moins savoir la science voisine. Ainsi, nul ne sera bon professeur d'arithmétique s'il ne sait au moins l'algèbre, de géométrie s'il ne connaît l'analyse appliquée, de statique s'il ne sait la dynamique, d'algèbre s'il n'a pas étudié le calcul infinitésimal. Et, dans ces sciences particulières, se trouvent des chapitres importants et étendus qui ne peuvent être bien compris, et conséquemment bien enseignés, que par des personnes qui connaissent certaines sciences, en général peu cultivées.

Ainsi, la divisibilité, les théories des facteurs, des carrés, des cubes, en arithmétique; l'analyse indéterminée et les fractions continues, en algèbre, et même l'inscription des polygones, en géométrie, sont bien mieux saisies par ceux qui savent la *théorie des nombres*. Ainsi, dans le calcul infinitésimal, le choix et l'utilité des transcendantes et des intégrales définies, les méthodes et les procédés du calcul aux différences partielles, ne peuvent être complétement enseignés que par une personne qui connaît la physique mathématique. Enfin, la théorie des combinaisons, celle des factorielles, le développement des puissances des polynômes, les propriétés des produits d'un nombre indéfini de facteurs, les théories des approximations, des limites d'erreur, et même des séries, le calcul aux différences finies, tant direct qu'inverse, sont présentés d'une manière plus complète par un professeur qui connaît le calcul des probabilités.

Il est un dernier point de vue sous lequel on doit envisager l'utilité que le professorat peut tirer de l'étude des sciences d'exploration. Pour le bien définir, je vais aborder, en passant, une question dont on comprendra facilement toute l'actualité.

Depuis longtemps, les personnes qui s'occupent exclusivement de la pratique, font, à celles qui se vouent à l'enseignement des sciences, le reproche de développer trop de théories; celles-ci répondent que l'on méconnaîtrait le but élevé de l'enseignement, en le réduisant aux règles et aux formules actuellement utilisables. Sujet de discussion qui menace d'être éternel, entre gens que leurs intérêts, leurs connaissances exclusives et restreintes, mettent en opposition constante.

J'ai des amis des deux parts; j'ai vécu et servi dans les deux camps; souvent renié par l'un et par l'autre, lorsque j'essayais de combattre des reproches immérités, ou au moins exagérés, et d'opérer une fusion peut-être impossible. Je pense donc être en mesure d'éclairer cette question, et de la réduire à sa juste valeur.

On ne saurait trop le répéter, l'étude des sciences exactes a pour utilité principale et première, de faire naître, d'exercer, de perfectionner *le raisonnement;* d'assurer en quelque sorte son infaillibilité, en l'appliquant constamment, et pendant de longues années, à des sujets qui sont à l'abri de toute controverse. Une personne, bien et longtemps nourrie par cette étude, pourra oublier successivement les premiers instruments de cette gymnastique prolongée (comme nous avons tous oublié nos premiers sujets de lecture), mais elle conservera toujours la facilité de raisonner juste, c'est-à-dire de déduire vite et sûrement les conséquences d'un principe posé. Quant à l'art de bien choisir les principes qui servent de base au raisonnement, les sciences exactes ne l'exercent pas; il faut avoir recours à d'autres études, à celles des sciences physiques, par exemple, qui complètent ce qu'on peut appeler l'éducation de la logique.

C'est cette utilité principale de l'étude des sciences exactes qui forme le but le plus élevé et le plus général de leur enseignement. L'utilité spéciale de chacune de ces sciences, son application directe, sa pratique enfin, ne peuvent venir qu'en seconde ligne, car elles exigent impérieusement que la condition première soit pleinement satisfaite.

Ainsi, d'abord des écoles générales, où l'enseignement des sciences évitera de s'étendre sur les applications, afin de conserver, de diriger tous ses efforts vers le but principal que je viens de définir, plus difficile à atteindre qu'on ne le suppose généralement. Puis des écoles d'application spéciales, où les sciences exactes seront considérées sous le point de vue de la pratique. Sans cette séparation bien nettement établie, on n'obtiendra jamais que des résultats incomplets. Les deux systèmes existent actuellement; qu'on les examine, qu'on en compare les produits, sans prévention aucune, avec une complète impartialité, et je ne doute pas que l'on ne reconnaisse la supériorité des doubles écoles.

Mais s'il convient que, dans les écoles générales, l'enseignement s'occupe principalement des théories scientifiques, il importe aussi, tant pour bien faire saisir toute la portée de ces théories elles-mêmes, que pour préparer aux cours des écoles spéciales, d'indiquer les applications, de les esquisser en quelque sorte, d'établir surtout les principes généraux qui leur servent de base; principes qu'il serait difficile de saisir, de dégager, s'ils étaient, dès l'abord, accompagnés de détails trop minutieux.

C'est pour se mettre en état de traiter convenablement cette partie de leur travail, que les personnes vouées à l'enseignement des mathématiques doivent étudier les deux sciences d'exploration que j'ai citées. Là se trouvent recueillis et coordonnés les travaux des géomètres sur tous les genres d'application que l'analyse a pu aborder. Ces travaux sont sans doute incomplets; beaucoup même ne sont qu'amorcés; mais ils indiquent les points où la science s'arrête aujourd'hui, et quels progrès elle doit faire.

Il ne peut appartenir qu'aux professeurs des écoles spéciales, praticiens distingués dans leur art, de suppléer aux lacunes actuelles d'une analyse rigoureuse, par des formules empiriques qu'ils reconnaissent comme suffisantes pour la pratique. Si, sous prétexte de rendre plus complètes les études préliminaires des écoles générales par rapport aux applications, on introduit ces formules empiriques dans les cours de théorie, on détruira d'un côté ce que l'on aura fait de l'autre, car la rigueur du raisonnement en sera relâchée. L'élève verra beaucoup trop tôt qu'en fait de sciences, on peut se contenter d'à peu près; il en conclura que, chercher mieux, serait se donner des peines inutiles, et les progrès des sciences exactes ne tarderont pas à s'arrêter.

Pour éviter cette décadence imminente, il importe de préserver au moins la Faculté des Sciences de l'envahissement, de la tendance exagérée et exclusive des cours appelés pratiques. Que les sciences exactes continuent à y développer leurs théories, complétées par l'indication des applications actuelles et futures, mais en s'arrêtant où cesse la rigueur mathématique. Que les travaux des géomètres sur les nouvelles applications y composent des cours, nécessairement imparfaits, mais où l'esprit de recherches trouve aliment et excitation.

Je m'arrête à ce vœu, et je conclus, des différents points que j'ai traités, que le calcul des probabilités doit être enseigné ici, comme un complément indispensable et utile aux autres cours de mathématiques; comme présentant, par la nature et la variété de ses problèmes et de leurs solutions, une sorte de résumé de toutes les ressources de l'analyse; comme mettant sur la voie de plusieurs applications, constatant la nécessité de certaines théories, indiquant les progrès qu'elles doivent faire. . . . . .

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DE M. CAUCHY

Pour le calcul, par approximations successives certaines, des racines réelles des équations algébriques. — Comment cette méthode se réduit à celle de Newton, quand la méthode de Newton est applicable. — Caractère analytique simple et sûr auquel on reconnaît que la méthode de Newton est applicable;

PAR M. L'ABBÉ MOIGNO,
Aumônier du lycée Louis-le-Grand.

La résolution des équations algébriques comprend quatre grands problèmes : 1° démontrer que toute équation a une racine; 2° déterminer le nombre des racines comprises entre deux limites données; 3° séparer les racines; 4° enfin calculer la valeur numérique de ces racines. M. Cauchy a eu le bonheur et la gloire d'arriver le premier à des solutions vraiment élémentaires, simples et praticables de ces quatre problèmes.

On n'a rien ajouté à sa démonstration du théorème, que toute équation algébrique a une racine; cette démonstration seulement n'a pas été présentée encore sous la forme extrêmement simple qu'on peut lui donner. Je le ferai bientôt dans ce Journal.

M. Sturm a rendu plus facile, théoriquement parlant, le calcul du nombre des racines réelles comprises entre des limites données. De mon côté, j'ai publié, en partant des principes établis par M. Cauchy, la démonstration la plus naturelle et la plus directe, non-seulement du théorème de M. Sturm, mais des théorèmes analogues de Descartes, Rolle, Budan, Fourier, etc., et même du théorème de M. Cauchy relatif au nombre des racines imaginaires. M. Terquem a bien voulu insérer, dans les *Nouvelles Annales*, un abrégé de mon Mémoire (t. III, p 188); je lui demanderai de revenir moi-même sur ce sujet, et de ramener ma démonstration à des termes tellement simples, qu'on soit désormais forcé de lui donner place dans l'enseignement.

Il y a plus de trente ans que M. Cauchy nous a appris à calculer immédiatement, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'équation aux carrés des différences, une quantité plus petite que la différence entre deux racines quelconques d'une équation algébrique, et, chose extraordinaire, incompréhensible, c'est à peine si le magnifique théorème du plus grand mathématicien des temps modernes commence à pénétrer dans nos traités élémentaires; c'est à peine si on l'a bien compris. Je vois avec la plus vive douleur que l'un de nos jeunes professeurs les plus distingués et les plus progressifs, M. Joseph Bertrand, dans son *Traité élémentaire d'Algèbre* qui vient de paraître, n'a pas même indiqué l'admirable méthode de calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation, méthode sur laquelle repose la séparation des racines.

Enfin voilà quatorze ans que les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* renferment la solution, simple à l'excès et tout à fait élémentaire, du quatrième problème abordé, sans assez de succès, il faut bien le dire, par les géomètres les plus éminents, Lagrange, Poisson, Fourier, etc. Cette solution me fut adressée de Prague par M. Cauchy, avec ce préambule : « La méthode que je vais exposer est tellement simple, qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle ne se soit pas présentée plus tôt à l'esprit des géomètres. D'un autre côté, elle est tellement générale, qu'elle fournit immédiatement des valeurs aussi approchées qu'on le désire de toutes les racines réelles des équations algébriques, souvent même des équations transcendantes. Enfin les approximations successives sont non-seulement très-faciles, mais encore très-rapides; aussi rapides, pour le moins, que dans la méthode newtonienne, et il arrive bientôt un moment où le nombre des chiffres décimaux est plus que doublé à chaque opération nouvelle. » M. Cauchy ajoutait : « Les avantages de la nouvelle méthode sont tellement sensibles, qu'une fois livrée au public, elle ne peut manquer, ce me semble, d'être adoptée et mise en pratique par tous les amis des sciences. »

Qu'est-il arrivé cependant; j'ai livré au public, en 1835, ce procédé si élégant, si simple, si sûr, et les trop nombreux traités d'algèbre rédigés depuis cette époque lui sont restés fermés, et il est à peine deux ou trois professeurs ou amateurs qui le connaissent, tant est forte la tendance de l'homme à ne prendre pour guide que l'habitude, la routine et ses petites pensées.

Avant d'exposer la nouvelle solution avec tous les développements qu'elle doit et qu'elle peut recevoir, je crois devoir la réduire à sa plus simple expression.

Voici d'abord l'énoncé analytique et géométrique tour à tour du problème proposé.

Énoncé analytique. On a trouvé une première valeur approchée a de la plus petite α des racines réelles d'une équation donnée $f(x)=0$, comprises entre a et A, et l'on demande une seconde valeur plus approchée a_1 de cette même racine α. La première valeur approchée a peut être, si l'on veut, la limite inférieure l des racines de l'équation proposée, limite que l'on calcule immédiatement, et l'on peut prendre pour A la limite supérieure de ces mêmes racines.

Le problème pourrait encore s'énoncer analytiquement comme il suit : Étant donnée une première valeur approchée a de la plus petite α des racines de l'équation $f(x) = 0$; former, en partant de a et de $f(x) = 0$, une équation du premier degré dont la racine unique a_1 soit une valeur plus approchée de α que a.

Énoncé géométrique. La courbe représentée par l'équation $y = f(x)$ passe par le point M $[x = a, y = b = f(a)]$, et l'on demande de mener une droite qui parte de ce même point, dont l'ordonnée soit toujours plus petite en valeur numérique que l'ordonnée de la courbe, et qui, par conséquent, rencontre l'axe des x plus tôt que la courbe $y = f(x)$, ou en un point dont l'abscisse $x = a_1$ soit comprise entre $x = a$ et $x = \alpha$.

Disons-le franchement, ce problème, si simple dans son énoncé analytique ou géométrique, a épuisé, jusqu'en 1836, les forces des mathématiciens les plus habiles, et Fourier en a fait implicitement le sujet d'un gros volume sans le résoudre! Il est donc vrai que les difficultés les plus abordables en elles-mêmes, sont souvent celles dont on triomphe le plus tard, et que le génie seul peut les surmonter. Les bras tomberont aux lecteurs de cet article quand nous leur aurons révélé le mot de l'énigme; ils n'en croiront pas à leurs yeux, ils penseront peut-être que nous plaisantons.

Solution. Pour plus de simplicité, nous supposerons, ce qui est toujours permis, que la racine α est positive, et que $f(a)$, ou l'ordonnée du point de départ, est elle-même positive.

Posons

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\mathrm{F}(x)$$

ou

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,\mathrm{F}(x),$$

F (x) sera, comme on sait, une fonction entière. Décomposons-la en deux parties, l'une $\varphi\,(x)$ formée de l'ensemble des termes positifs, l'autre $\chi\,(x)$ formée de l'ensemble des termes négatifs; nous aurons

$$\mathrm{F}(x)=\varphi(x)-\chi(x),$$

et chacune des parties $\varphi(x)$, $\chi\,(x)$, prise séparément, croîtra indéfiniment avec x, ou quand x passera de la valeur a à la valeur A. Dès lors, si l'on donne à x dans $\varphi\,(x)$ ou dans la somme des termes positifs sa plus petite valeur a, dans $\chi\,(x)$ ou dans la somme des termes négatifs sa plus grande valeur A, et que l'on prenne la différence

$$\varphi(a)-\chi(\mathrm{A})=m_1,$$

cette différence sera, dans l'intervalle de a à A, toujours inférieure aux valeurs de F (x); on aura donc

$$\mathrm{F}(x)>m_1 \quad \text{ou} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}>m_1,$$

et, par suite, puisque, dans l'intervalle dont il s'agit, $x-a$ est positif,

$$f(x)>f(a)+m_1(x-a).$$

La fonction donnée $f(x)$ et la fonction du premier degré $f(a)+m_1\,(x-a)$ ont ainsi entre elles les relations suivantes: 1° pour $x=a$, elles prennent la même valeur positive $f(a)$; 2° la fonction du premier degré, positive au départ, a une valeur numérique toujours inférieure à celle de $f(x)$; donc, quand $f\,(x)$ sera devenue zéro pour

$x=\alpha$, la quantité $f(a)+m_1(x-a)$ sera devenue négative, après s'être évanouie pour une valeur a_1 de x comprise entre a et α, et donnée par l'équation

$$f(a)+m_1(a_1-a)=0,$$

d'où l'on tire

$$a_1=a-\frac{f(a)}{m_1}.$$

a_1 est précisément la seconde valeur plus approchée de la racine α. En désignant par a_2, a_3, a_4,... des valeurs déduites de a_1, a_2, a_3 comme a_1 l'a été de a, on obtiendra une série de quantités

$$a_1=a-\frac{f(a)}{m_1},\quad a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{m_2},\quad a_3=a_2-\frac{f(a_2)}{m_3},\ldots,$$

qui approcheront de plus en plus de la plus petite racine α; on pourra donc calculer cette racine avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

Géométriquement. La droite $y=f(a)+m_1(x-a)$ part, comme la courbe $y=f(x)$ du point $x=a$, $y=f(a)$, et son ordonnée est constamment plus petite que celle de la courbe; elle rencontrera donc l'axe des x plus tôt, et l'abscisse de ce point de rencontre est la valeur plus approchée de la racine α.

Si l'on se rappelle que la correction donnée par la méthode de Newton est, dans le cas que nous avons considéré, $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, $f'(x)$ étant le polynôme dérivé de $f(x)$, on verra que la nouvelle correction ne diffère de l'ancienne que par la substitution à $f'(a)$, de la différence $\varphi(a)-\chi(A)$ aussi facile à calculer. Mais la nouvelle correction est certaine, tandis que l'ancienne était souvent incertaine, et éloignait quelquefois de la véritable racine au lieu d'en rapprocher.

On démontre facilement, et l'on trouve démontrée dans plusieurs Algèbres élémentaires, la formule suivante :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'[x + \theta(x-a)],$$

$\theta\,(x-a)$ indiquant une fraction de $(x-a)$, ou θ un nombre plus petit que l'unité. En comparant cette équation à celle qui définit $F\,(x)$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,F\,(x),$$

on voit qu'entre a et A, la valeur de $F\,(x)$ est toujours une des valeurs que prend la dérivée $f'\,(x)$ dans ce même intervalle.

Si l'on décompose $f\,(x)$ comme on l'a fait de $F\,(x)$ en deux parties, l'une $\lambda\,(x)$ formée de l'ensemble des termes positifs, l'autre $-\mu\,(x)$ formée de l'ensemble des termes négatifs, on aura

$$f(x) = \lambda\,(x) - \mu\,(x), \quad f'\,(x) = \lambda'\,(x) - \mu'\,(x).$$

De plus, comme la différence $\lambda'\,(a) - \mu'\,(A)$ sera, dans l'intervalle de a à A, plus petite que toutes les valeurs de la dérivée; cette même différence sera aussi toujours plus petite que $F\,(x)$, et l'on pourra la prendre à la place de m_1. La correction devient alors

$$\frac{-f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(A)},$$

tandis que celle de Newton est

$$\frac{-f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(a)};$$

la différence consiste donc dans la substitution de la limite supérieure A à la limite inférieure a dans la somme des termes négatifs; et cette substitution suffit pour que l'approximation, incertaine d'abord ou même illusoire, devienne certaine et rigoureuse.

Et voilà le secret qui, pendant trois siècles, a échappé à toutes les investigations des géomètres !

Considérons le cas particulier où le polynôme dérivé $f'(x)$ est toujours croissant ou toujours décroissant entre les limites a, A, c'est-à-dire le cas où le polynôme dérivé de second ordre $f''(x)$ est toujours positif ou toujours négatif. La valeur de départ $\lambda'(a) - \mu'(a)$ dans le premier cas, ou lorsque le polynôme dérivé est toujours positif; la valeur d'arrivée $\lambda'(\mathrm{A}) - \mu'(\mathrm{A})$ dans le second cas, ou lorsque le polynôme dérivé est toujours décroissant, seront inférieures à toutes les valeurs de $\mathrm{F}(x)$; on pourra donc faire

$$m_1 = \lambda'(a) - \mu'(a) \quad \text{ou} \quad m_1 = \lambda'(\mathrm{A}) - \mu'(\mathrm{A}),$$

et la correction sera

$$\frac{-f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(a)} = -\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{ou} \quad \frac{-f(a)}{\lambda'(\mathrm{A}) - \mu'(\mathrm{A})} = -\frac{f(a)}{f'(\mathrm{A})}:$$

ce sont précisément les corrections indiquées par Newton. La nouvelle méthode, aussi simple en elle-même et d'une efficacité absolue, comprend donc comme cas particulier la méthode de Newton.

Mais existe-t-il un caractère analytique facile, auquel on puisse reconnaître sûrement que la dérivée seconde est toujours positive ou toujours négative? Oui, et ce caractère, si longtemps poursuivi par Fourier, ressort sans peine des considérations qui précèdent. On a

$$f''(x) = \lambda''(x) - \mu''(x);$$

et si l'on fait tour à tour, dans la somme des termes positifs $x = a$, $x = \mathrm{A}$, dans la somme des termes négatifs $x = \mathrm{A}$, $x = a$, on obtiendra deux différences,

$$\lambda''(a) - \chi''(\mathrm{A}), \quad \lambda''(\mathrm{A}) - \chi''(a),$$

dont la première est évidemment inférieure, la seconde évidemment supérieure à toutes les valeurs de $\lambda''(x) - \mu''(x)$ ou de $f''(x)$, dans l'intervalle de a à A : donc si ces deux différences, l'une inférieure, l'autre supérieure à toutes les valeurs de la dérivée seconde, sont toutes deux de même signe, la dérivée seconde elle-même conservera constamment le même signe ; et, par conséquent, pour être sûr que cette dérivée seconde est toujours positive ou toujours négative, il suffit de voir si le rapport

$$\frac{\lambda'(\mathrm{A}) - \mu'(a)}{\lambda'(a) - \mu'(\mathrm{A})}$$

est positif ; le caractère cherché est donc

$$\frac{\lambda'(\mathrm{A}) - \mu'(a)}{\lambda'(a) - \mu'(\mathrm{A})} > 0.$$

Je ne sache pas qu'il y ait dans l'histoire des mathématiques un exemple plus frappant d'abord d'une somme énorme de force vive dépensée presque en vain pour établir le plus facile des théorèmes, pour résoudre le plus accessible des problèmes ; puis, d'une inspiration plus heureuse, d'un bonheur plus inouï. On avait construit un levier immense pour soulever un atome qu'une paille suffisait à jeter au vent ! Je me trompe, la théorie des fonctions symétriques, que je rappelais au commencement de cet article, est un fait de ce genre plus étonnant encore ; car, cette fois, le problème était en lui-même très-ardu. Ces inspirations, ces bonheurs arrivent surtout à M. Cauchy, et, qu'on daigne le croire, elles sont le caractère et l'apanage du génie.

C'est une bonne leçon de philosophie des sciences que de faire remarquer les petits artifices de calcul, de décomposition ou de raisonnement qui amènent ces grands triomphes, ces succès inespérés. La théorie et le calcul des fonctions symétriques découlent de cette remarque très-ridicule en apparence : Si l'on divise un polynôme entier F (a) par un autre polynôme entier $f(a)$ nul en valeur numérique, ou tel que l'on ait $f(a) = 0$, le reste de la division sera égal à F (a).

Ce qui a rendu possible et excessivement simple le calcul d'une valeur certainement plus approchée de la racine, ce qui a permis d'établir le caractère auquel on reconnaît que la méthode de Newton est applicable, c'est la décomposition, au premier aspect sans portée, de F (x) en deux parties, l'une $\varphi(x)$ formée de la somme des termes positifs, l'autre $\chi(x)$ formée de la somme des termes négatifs.

Voilà tout le secret, ou la clef qui a permis d'ouvrir ces trésors si longtemps cachés.

Il nous reste, et cela ne sera pas inutile, à donner une rédaction plus détaillée, plus complète, plus savante de cette excellente méthode que tous doivent connaître, admirer et pratiquer.

NOMBRES PREMIERS RELATIFS

(voir t. I, p. 466; t. IV, p. 77);

PAR M. A. GUILMIN,
Professeur.

PROBLÈME. *Trouver combien il y a de nombres premiers avec un nombre* N *et moindres que* N.

Lemme I. Sil y a K nombres premiers avec un nombre A et moindres que A, il y a mK nombres premiers avec A et moindres que m.A.

En effet, A′ étant un nombre quelconque moindre que A, pour que nA + A′ soit premier avec A, il faut et il suffit que A' soit premier avec A. Par suite, entre deux multiples consécutifs de A, nA et $(n+1)A$, il y a K nombres premiers avec A. Or, par hypothèse, de o à A il y a K nombres premiers avec A; de o à $2A$ il y en a donc $2K$, de o à $3A$ il y en a $3K$,...; de o à mA il y en a mK.

Lemme II. A étant un nombre quelconque, et p un nombre premier absolu qui ne divise pas A, s'il y a K nombres premiers avec A et moindres que A, il y a $K(p-1)$ nombres premiers avec $A.p$ et moindres que Ap.

En effet, d'après le lemme I, il y a Kp nombres premiers avec A et moindres que Ap; parmi ces Kp nombres, il nous faut supprimer les multiples de p premiers avec A et moindres que $A \times p$. Or, pour qu'un multiple $n \times p$ de p, soit premier avec A et moindre que A, il faut et il suffit que n soit premier avec A et moindre que A. Il nous suffit donc, pour obtenir les multiples en question, de multiplier successivement p par les K nombres qui sont premiers avec A et moindres que A. Si parmi les Kp nombres, ci-dessus indiqués, premiers avec A et moindres que $A \times p$, on supprime ces K multiples de p, il reste $Kp - K = K(p-1)$ nombres premiers avec $A \times p$ et moindres que $A \times p$.

Nous allons maintenant résoudre le problème proposé.

Décomposons N en ses facteurs premiers, et soit

$$N = a^n b^p c^q \ldots .$$

Tout nombre premier avec N est premier avec abc, et réciproquement; de sorte qu'il nous suffit de chercher combien il y a de nombres premiers avec abc et moindres que $N = abc \times a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1} \ldots$

Supposons qu'il y ait K nombres premiers avec abc et moindres que abc; il y aura $Ka^{n-1} b^{p-1} c^{q-1}$ nombres premiers avec abc et moindres que N (lemme I); il nous faut trouver K.

Il y a $a-1$ nombres premiers avec a et moindres que a, savoir $1, 2, 3, \ldots, a-1$. Il y a donc $(a-1)(b-1)$ nombres premiers avec ab et moindres que ab (lemme II); il y a $(a-1)(b-1)(c-1)$ nombres premiers avec abc et moindres que abc.

$K=(a-1)(b-1)(c-1)$, et, par suite, le nombre demandé relatif à N est donc

$$(a-1)(b-1)(c-1)a^{n-1}b^{p-1}c^{q-1}.$$

Note. Voir Gauss, *Disquisitiones,* § 38. Nous donnerons prochainement une formule, consignée dans Crelle, pour trouver la somme d'une fonction symétrique des nombres premiers à A et moindres que A. O. T.

SOLUTION DE LA QUESTION 52

(voir t. I, p. 520);

PAR M. ARMAND HUE,
Professeur d'hydrographie à Bayonne.

La question doit être rectifiée de la manière suivante :

a, b, c étant les trois côtés d'un triangle sphérique, et e l'excès sphérique, on a

$$\begin{aligned}1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+32\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{e}{2}\\ =\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)\\ +\cos(b+c-a).\end{aligned}$$

Démonstration. On a d'abord, comme on sait,

$$e=A+B+C-180^\circ,$$

d'où

$$\sin\frac{e}{2} = -\cos\frac{A+B+C}{2}.$$

Développant $\cos\dfrac{A+B+C}{2}$ à l'aide des formules connues (Delambre),

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}},\qquad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}},$$

il vient

$$\sin\frac{e}{2} = \frac{\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right);$$

d'où l'on tire

$$\sin\frac{e}{2}\cos\frac{c}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C,$$

et, par suite,

$$\sin^2\frac{e}{2}\cos^2\frac{c}{2} = \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2 C. \tag{1}$$

Exprimons $\sin^2 C$ en fonction des côtés du triangle; nous aurons

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \frac{(\cos c - \cos a\cos b)^2}{\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) - \cos^2 c - \cos^2 a\cos^2 b + 2\cos a\cos b\, c}{\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$= \frac{1 + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$= \frac{4\cos a\cos b\cos c - \cos 2a - \cos 2b - \cos 2c - 1}{32\sin^2\dfrac{a}{2}\sin^2\dfrac{b}{2}\cos^2\dfrac{a}{2}\cos^2\dfrac{b}{2}}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (1), et réduisant, on obtient

$$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+32\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{e}{2}$$
$$=4\cos a\cos b\cos c=2\cos(a+b)\cos c+2\cos(a-b)\cos c$$
$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)$$
$$+\cos(b+c-a).$$

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Recherches sur les droits successifs des enfants naturels; par M. *Louis Gros*, docteur en droit, avocat à la Cour d'Appel de Lyon. Paris, 1850; in-8° de 144 pages.

La question qui fait l'objet de ces *Recherches* a déjà été traitée dans les *Nouvelles Annales*, tome IV, page 253. L'auteur, à la fois jurisconsulte et mathématicien, chose rare (*), discute avec beaucoup de sagacité les opinions de ses devanciers, et appuie les siennes propres par d'ex-

(*) *Rare* en France, mais pas en Europe. Ainsi, en Angleterre, le célèbre lord Brougham, ancien avocat, cultive les hautes mathématiques et la haute physique. Il y a encore d'autres personnages considérables en ce pays qui se livrent aux sciences. L'Allemagne possède l'illustre baron Alexandre de Humboldt, et vient de perdre le célèbre sélénographe Guillaume Beer, frère de l'illustre compositeur; il était banquier. Dans l'ancienne France, le maître des requêtes Viète, le président au Parlement Fermat, le gentilhomme Descartes, le marquis de l'Hôpital, le financier Pascal père, le rentier Pascal fils, le rentier Desargues, le minime Mersenne, l'oratorien Mallebranche, étudiaient les mathématiques pour *elles-mêmes*. Aujourd'hui, nous ne les étudions que pour répondre à des examens et nous ouvrir une carrière. Nos hommes de loisirs s'appliquent aux spéculations de l'ambition et de la fortune, et ne s'intéressent qu'aux sciences cellentes raisons. Le système qu'il propose nous paraît renfermer l'interprétation la plus raisonnable possible d'un texte dont le législateur lui-même ne semble pas avoir bien calculé toute la portée.

D'après l'article 757 du Code civil, « le droit de l'enfant naturel sur les biens de ses père et mère décédés est réglé ainsi qu'il suit : si le père ou la mère a laissé des descendants légitimes, *ce droit est d'un tiers de la portion héréditaire que l'enfant naturel aurait eue s'il eût été légitime, etc.* »

Quand il n'y a qu'un enfant naturel, l'application de cet article ne soulève aucune difficulté. Après avoir donné une règle pratique très-simple pour opérer, dans ce cas, le partage de la succession, M. Gros fait remarquer que le rapport entre la part de l'enfant naturel et celle d'un enfant légitime varie avec le nombre des enfants légitimes : égal à $\frac{1}{5}$ quand il n'y en a qu'un de cette dernière classe, il augmente, quand il y en a plusieurs, jusqu'à $\frac{1}{3}$, sa valeur limite.

M. Gros voit là, avec raison, une inconséquence du législateur. « Lorsqu'on a reconnu, dit-il, que le respect de la famille et les principes de moralité les plus essentiels exigent que l'enfant naturel ait des droits moins

---

utiles à ces spéculations. L'*utilisme* dans les classes instruites et le *communisme* dans les classes ignorantes, sont deux manifestations de la même doctrine : le *matérialisme*. Il est singulier que cette doctrine dégradante, qui place l'homme *au-dessous* de l'animal, car celui-ci n'est pas susceptible de corruption, il est singulier que cette doctrine se soit répandue nonobstant que nos philosophes arborent et font parader partout le drapeau du *spiritualisme*. Toutefois, notre pays offre une honorable exception dans la personne d'un éminent fonctionnaire qui a consacré un beau talent au culte d'Uranie; nous espérons un jour entretenir nos lecteurs d'une *Astronomie* où la dynamique des cieux est poétiquement et fidèlement racontée en vers de l'ancienne France, par le célèbre traducteur d'Horace, par le comte Daru, ce grand administrateur auquel s'appliquent si bien ces paroles de Velleius : *Vir, ubi res vigiliam exigeret, sane exsomnis, providens atque agendi sciens* (II, LXXXVIII, 2). O. TERQUEM.

étendus que l'enfant légitime, il faut, pour être logique, les comparer l'un à l'autre, établir une fois pour toutes, par un chiffre (ou coefficient), le degré de défaveur qui s'attache à l'enfant naturel, puis conserver soigneusement ce rapport, quel que soit le nombre des enfants de l'une ou l'autre classe. On ne peut, en effet, trouver aucune raison pour le faire varier d'après le nombre des enfants (*). »

(*) La société n'a pas pour objet la perpétuité des *individus* comme chez les animaux, mais la perpétuité d'esprits indéfiniment perfectionnables par la culture morale et intellectuelle : double culture qui ne peut généralement s'obtenir que dans la famille. Avant toute chose, la société a donc en vue la constitution et la perpétuité des familles qu'elle réunit et protége par des lois. La plus fondamentale de ces lois est celle qui assure aux enfants la transmission du travail patrimonial, des biens qu'il a créés; n'importe la forme, mobile ou immobile. L'homme ayant seul, sur notre globe, le sentiment de l'avenir et de sa fin personnelle prochaine, la Providence l'a doué en même temps d'un désir irrésistible de travailler pour un avenir qu'il ne verra pas, et de préparer à ses enfants un bien-être auquel il n'aura aucune part. Le bien-être diminuant avec le nombre des partageants, la loi s'oppose avec justice à l'introduction des étrangers et ne se montre indulgente que pour les enfants naturels reconnus. Le père qui introduit des enfants naturels fait tort à ses enfants légitimes, et le tort est d'autant plus grand que le nombre de ces derniers est plus grand, car rien que ce nombre suffit déjà pour affaiblir leur part. Pour diminuer ce tort, il faut que la part de la succession détournée vers une source étrangère soit en raison inverse, et du nombre des enfants légitimes, et du nombre des enfants naturels. Il semble que telle a été la pensée du législateur. Il ne parle que d'un seul enfant naturel, est-ce à dire qu'il ne connaissait pas le cas où il y aurait plusieurs enfants naturels? Supposition inadmissible. Au fait, le législateur ne *concède* qu'un seul enfant naturel, sauf, quand il y en a plusieurs, à se partager entre eux cette part d'un enfant unique. Soient n, l, les nombres des enfants *naturels* et *légitimes*. D'après le Code, la part d'un seul enfant naturel est $\frac{1}{3(1+l)}$; dans le cas actuel, la part de chaque enfant naturel est $\frac{1}{3n(1+l)}$, et la part de chaque enfant légitime est $\frac{3l+2}{3l(1+l)}$; de sorte que la part de l'enfant légitime est indépendante du nombre des enfants nés hors mariage. Telle semble être l'interprétation la plus naturelle de la pensée du législateur. O. TERQUEM.

Le Code d'Haïti est, en ce point, beaucoup plus rationnel que le nôtre : il donne, dans tous les cas, à l'enfant naturel, le tiers de la part d'un enfant légitime; il pousse même la complaisance jusqu'à indiquer lui-même la règle à suivre pour opérer le partage.

Dans le cas de plusieurs enfants naturels, la législation française donne lieu à de graves difficultés. Pour les résoudre, plusieurs systèmes ont été proposés, dont le plus défectueux, nous devons le dire, est celui qui est adopté dans la pratique (tome IV, page 255, note).

Voici maintenant ce que propose l'auteur.

Du texte de la loi et des discussions qui ont eu lieu à ce sujet au Conseil d'État, M. Gros conclut que le législateur n'a pas prévu le cas où plusieurs enfants naturels viendraient réclamer la succession de leurs père et mère (*). Ceci admis, que faut-il faire? Évidemment conserver entre les deux sortes de parts le rapport établi par le législateur dans le cas qu'il a incontestablement prévu.

Pour obtenir ce résultat, M. Gros ne considère d'abord qu'un enfant naturel et un enfant légitime, et, après avoir fait le partage dans cette hypothèse, il attribue aux autres enfants naturels une part égale à celle prélevée par le premier. Mais comme, alors, la somme des parts surpasserait la totalité de la succession, il les réduit proportionnellement, comme s'il s'agissait de répartir entre des créanciers un actif inférieur à la somme de leurs créances. C'est ce que M. Gros nomme le *système de répartition*.

L'auteur examine ensuite les autres systèmes. Tous font varier le rapport entre les deux sortes de parts, non-seulement d'après le nombre des enfants légitimes, ce qui

---

(*) Nous ne sommes pas compétent pour juger cette assertion, qui nous paraît la partie contestable du travail de M. Gros. Nous n'apprécions que les conséquences. PROUHET.

est inévitable, mais encore d'après le nombre des enfants naturels, ce qui est arbitraire, puisque la loi ne fournit aucunement les bases de cette seconde graduation. Cette seule remarque suffirait pour les réfuter; mais M. Gros va plus loin : il s'attaque à leur principe, en démontre le vice, et fait voir qu'en les rectifiant, on retombe toujours sur le système de répartition.

L'ouvrage dont nous venons de donner une rapide analyse aurait gagné à un plus fréquent emploi des symboles algébriques; mais il fallait être entendu des jurisconsultes, et ces sortes de lecteurs s'effrayent plus volontiers de deux pages de calcul que de vingt volumes de commentaires. Force a donc été de recourir le plus souvent à des exemples numériques, et de traduire en longues périphrases quelques formules simples et élégantes. C'est une imperfection, mais elle n'est pas imputable à M. Gros, et, comme l'on dit au Palais, la responsabilité en doit être renvoyée à qui de droit (*)

E. Prouhet.

(*) Dans une note qui termine un premier travail sur le même sujet (*Revue de droit français et étranger*, tome Ier), M. Gros faisait des réflexions fort judicieuses sur l'utilité des mathématiques dans l'étude du droit. Nous regrettons qu'il n'ait pas reproduit ce passage, qui est encore et qui sera toujours plein d'à propos.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. EXÉCUTION DES ÉPURES;

Par M. BARDIN,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

« Comment éviter les dégoûts attachés à de premiers essais, » où l'esprit n'a pour tout aliment que les notions sèches et » abstraites de nombre et d'étendue? Les sciences physiques et » les arts du dessin embrassent, presque dès leur origine, » toutes les propriétés sensibles des corps; la main y exécute en » même temps que l'esprit y conçoit; et quoiqu'elles renferment » peut-être autant de difficultés réelles que les sciences mathéma- » tiques, leur accès est moins pénible et leur culture promet des » jouissances plus promptes. » Prony, Discours d'ouverture des cours de l'an VII (1er cahier du Journal de l'École Polytechnique).

Mon cher confrère,

Le *dessin des projections*, moyen à la fois expressif et conventionnel de représenter les combinaisons sans nombre de l'étendue figurée, est d'une utilité générale; nul ne le conteste, et pourtant son enseignement n'a pas encore de règles. Cette écriture, universelle par sa nature même, n'a pas encore d'alphabet, ou plutôt elle n'a qu'un alphabet incomplet et mal défini.

Dans le *dessin d'imitation*, qu'on nomme aussi *dessin académique*, l'artiste ne s'attache à rendre que ce qu'il voit, que ce qui est en deçà du contour apparent de l'objet en ronde bosse qui pose devant lui. Le dessinateur géomètre, qui se propose un autre but que l'*effet*, qui ne s'arrête pas à l'apparence des corps, figure dans ses projections non-seulement ce qu'il verrait de l'objet en relief que sa pensée a conçu, mais encore ce qu'il ne verrait pas, si cet objet était réellement sous ses yeux. Et cela, sans la moindre confusion, à l'aide d'une convention aussi simple qu'ingénieuse. Pour lui, les plans de projection et les surfaces qu'il considère sont des étendues infiniment minces et transparentes, les corps solides eux-mêmes sont transparents; de sorte que les traces, les arêtes, les contours, les rencontres des surfaces entre elles, en un mot, tout ce qui concourt à définir les grandeurs dans l'espace et leurs positions relatives, est vu directement ou par transparence, et écrit en conséquence sur les feuilles de dessin. Dans les deux projections, images distinctes d'un même objet, ce qui se trouve au-dessus du plan horizontal, ou en avant du plan vertical, ou en deçà du contour des surfaces, est figuré par un trait noir et continu, ou *trait plein,* en langage de dessinateur. Tandis que les parties vues par transparence, et que par convention on appelle *parties cachées,* parce qu'elles sont sous l'un des plans de projection ou derrière l'autre, ou parce qu'elles sont derrière les contours des surfaces, sont figurées par des lignes discontinues, à points ronds, égaux et également espacés, qui constituent le *ponctué* dans le dessin des projections (*).

On parvient ainsi, par le ponctué seul, à donner aux *épures* de la géométrie descriptive toute la généralité des conceptions de l'esprit; car les lignes, les plans, les surfaces courbes, indéfiniment prolongés dans tous les sens, vont se contourner, se couper, se toucher, sur le papier comme dans l'espace. Une question est-elle susceptible de plusieurs résultats, son épure les donne tous; et s'il en est qui s'échappent de son cadre restreint, certains artifices graphiques savent les y ramener.

Cette convention, caractère essentiel, spécifique, du dessin des projections, est généralement négligée. Aussi

(*) Dans le dessin rapide, dans les calques, je remplace le plus souvent le *ponctué* des parties cachées, qui est assez long à faire, par un trait continu à l'encre de la Chine très-pâle, de manière à figurer une ligne éteinte par l'effet de la transparence.

voit-on les plus grosses fautes commises par les élèves à ce sujet. En voici une preuve : parmi les trois cent dix-huit compositions mathématiques qui ont été corrigées et jugées pour le concours d'admission de 1850 à l'École Polytechnique, une seule épure était à peu près irréprochable en ce qui regarde la distinction des parties vues et des parties cachées, du *vu* et du *caché* (*) ; une seule ! quoique les programmes du concours eussent signalé ce point à l'attention des candidats, et en eussent fait même l'objet d'une prescription. Il est donc permis de conclure de ce fait bien constaté que les élèves lisent mal dans l'espace, ou *dans les trois dimensions,* selon l'expression de Monge, et qu'ils s'inquiètent peu de tracer des épures illisibles. On sait, en outre, qu'à l'École Polytechnique, les élèves de première année ont beaucoup de peine à se conformer à ce qu'on exige d'eux à cet égard.

Si j'insiste autant sur cet article, c'est que j'ai entendu d'anciens élèves faire cette question : A quoi sert la distinction des parties vues et des parties cachées dans les épures ? — Et d'autres dire : Mais, de notre temps, cela ne nous embarrassait guère. — Par une bonne raison, messieurs, c'est que vous n'avez pas été mis aux prises avec la difficulté. Rappelez-vous que, depuis l'origine de l'École, candidats et élèves ont reproduit, *lineatim* et *punctatim,* les épures des premières promotions, de nos *antiques,* d'une collection qui fut belle, originale et utile en son temps, mais qui, après avoir défrayé pendant plus de cinquante ans les planches d'un grand nombre de Traités de Géométrie, est devenue banale et insuffisante. Ces épures gravées étaient distribuées aux élèves, qui, en les reproduisant, se trouvaient affranchis de tout travail de recherche quant au choix et à la bonne disposition des

(*) Comme on dit *le nu* en peinture et en dessin.

données (*), et de toute attention quant à la distinction du vu et du caché.

On ne voit plus aujourd'hui, à l'École Polytechnique, les promotions se succéder et s'engager dans la même ornière. On ne voit plus, chaque année, cent vingt élèves intelligents, la plupart adroits de l'œil et de la main, résoudre les mêmes questions, aux mêmes jours et aux mêmes heures, sur les mêmes données, pour arriver aux mêmes résultats; produire les mêmes épures, des épures superposables, ne différant que par la signature de l'auteur, ou par un peu plus ou un peu moins de mérite *dans la ligne*. On ne voit plus cela à l'École Polytechnique, mais on voit encore les candidats de toutes les institutions se livrer à un travail de cette nature; fâcheux état de choses qu'il est désirable de faire cesser!

Qu'on demande aux élèves de la promotion de 1849, qui ont vu disparaître sans regret cet enseignement, s'il n'a pas été grand le résultat utile qu'ils ont tiré de leurs épures rédigées d'après des programmes particuliers, où tout était à trouver et à exprimer par leur travail propre, le seul qui porte fruit et qui soit réellement appréciable dans les classements. C'est que comprendre

---

(*) Lacroix dit, dans un excellent petit livre trop oublié : « J'ai toujours soin de proposer aux élèves des questions où les données, exprimées par des mesures connues ou résultant d'opérations déterminées, sont isolées les unes des autres. Il faut d'abord qu'ils replacent ces données dans leurs situations respectives; ce qu'ils ne peuvent faire quand ils n'entendent pas les questions; ensuite qu'ils conçoivent le plan de la solution, et qu'ils l'exécutent en expliquant par eux-mêmes ce qu'ils ont entendu à la leçon. J'ai toujours vu que, par cette marche, ils se fortifient bien plus que lorsqu'on leur met sous les yeux l'*épure*, c'est-à-dire la construction détaillée du problème. La symétrie des lignes dispense les paresseux, qui partout forment le plus grand nombre, de la peine de réfléchir sur les préceptes qu'ils ont reçus; et ils copient leur épure sans l'entendre. » (*Complément des Éléments de Géométrie.*)

et savoir sont deux choses très-différentes. En géométrie descriptive, par exemple, c'est le travail graphique qui donne le savoir, c'est-à-dire, le pouvoir de faire usage dans la pratique de ce que l'on a appris. Les épures moins nombreuses, mais plus générales et mieux étudiées, plus laborieusement exécutées par la promotion de 1849, ont mieux appris aux élèves à lire dans l'espace, faculté précieuse qui a une grande influence dans les autres parties de l'enseignement polytechnique. Ainsi,—en *physique*, le dessinateur trouve des *instruments de précision* d'un grand intérêt, et de nombreux sujets empruntés aux lois et aux effets de la réflexion et de la réfraction de la lumière, et d'autres questions où les fluides impondérables vibrent, ondulent, se meuvent, et vont produire les effets par lesquels ils manifestent leur mystérieuse existence.— Dans la *mécanique* et dans les *machines* se présentent les *compositions* et les *décompositions de mouvement et de force* dans l'espace, les *transformations de mouvement* qui appartiennent autant à la géométrie qu'à la mécanique, des *questions de situation* où certaines pièces mobiles dans des espaces limités ont des formes et des dimensions obligées; on y rencontre la *vis*, l'un des principaux organes des machines, l'une des variétés les plus intéressantes des formes hélicoïdales, et les *engrenages*, dont les combinaisons si variées sont entièrement du ressort de la géométrie. —L'*architecture* a ses grandes *voûtes* et leurs ouvertures, et leur division en *caissons*; ses *escaliers*, si variés, si élégants, véritables vis en pierre ou en bois, qui constituent une des applications les plus intéressantes du dessin des projections, tant pour leur représentation que pour leur exécution stéréotomique; ses *colonnes torses*; ses *formes rampantes*, dans les frontons, les balustres, les cages d'escalier.—L'*astronomie*, dans ses difficiles spéculations, pourrait à elle seule défrayer en épures tout un cours de géométrie descriptive. — La *géodésie*, comme l'astronomie, a ses instruments d'observation, dont l'intelligence par des dessins exige une grande habitude des projections, dont l'établissement par le constructeur et les moyens de vérification et de correction par l'observateur qui s'en sert, reposent sur des considérations très-délicates de physique et de géométrie; la *gnomonique* et le tracé des coordonnées géographiques des *cartes* en dépendent. — En *chimie*, les lois géométriques qui régissent la formation des cristaux sont singulièrement facilitées à ceux qui sont familiarisés avec les projections. — L'*analyse*, elle-même, se lie à la géométrie descriptive, qui donne les moyens de représenter graphiquement la *loi mathématique* renfermée dans une fonction à trois variables, ou bien des *lois naturelles*, observées et consignées dans des tables numériques. — Enfin, il y a les *questions physico-mathématiques*, où le calcul et le trait peuvent se combiner utilement, et avec élégance.

En résumé, l'enseignement graphique est revenu aux programmes de Monge, si admirables d'ordre, de simplicité et de variété, où rien ne fait pressentir, où rien ne justifie l'enseignement stéréotypé de ses successeurs. Qu'on en juge par cette citation des *développements sur l'enseignement adopté pour l'École centrale des Travaux publics* de l'an III (*) : « On le dit une fois pour toutes,
» les règles générales étant enseignées, il ne faut jamais
» que, dans la même salle, deux élèves en fassent les
» mêmes applications; car la construction des dessins et
» la correction qu'ils exigent, emploient un certain temps
» qui permet à chaque élève de savoir non-seulement ce

(*) « Précieux document où la main de Monge est fortement empreinte », dit Fourcy à la page 41 de son *Histoire de l'École Polytechnique*.

» qu'il a fait, mais encore ce qu'ont fait tous ses camarades de la même salle, et en variant les exemples dans une même salle publique, on produit le même effet que si l'on décuplait le temps dans une école particulière. » Et plus loin, à propos du *dessin des principales machines employées dans les travaux publics :* « On distribuera les objets de manière que, dans la même salle, deux élèves n'aient pas la même machine à dessiner, afin que, dans cette salle, on ait la connaissance d'un plus grand nombre de machines. » — Pensée qui se reproduit en plus d'un autre endroit.

Les élèves entrent aujourd'hui dans les salles d'étude de l'École Polytechnique, non plus pour y entasser les unes sur les autres des épures faciles, insignifiantes même, pour *tirer la ligne,* mais pour y apprendre à travailler comme on travaille dans les services publics, dans la vie pratique, et pour s'y enrichir réciproquement de l'expérience acquise des uns et des autres.

Permettez-moi maintenant, mon cher confrère, d'appeler votre attention sur quelques autres points, afin que je puisse porter dans votre esprit une conviction qui vous engage à m'ouvrir les pages de vos *Annales.* Qu'on ne prétende pas que ce sont là de petites choses. Y a-t-il d'ailleurs rien de petit en vue d'un but qui a son importance et son utilité bien reconnues ?

Dans chaque projection, avons-nous dit, les données et les résultats qui existent réellement sont figurés en noir, *en plein* ou *en ponctué,* selon que ces grandeurs sont vues ou cachées. Mais il existe dans les épures une autre espèce de lignes très-nombreuses, qui constituent les quatre cinquièmes du travail graphique, et qui, sous le nom de *lignes auxiliaires* ou *de construction,* servent à réaliser les opérations par lesquelles on passe des données d'une question aux résultats.

Revenez, par la pensée, aux épures d'il y a quelques années, et voyez-les tellement chargées de lignes de construction, qu'on les comparait à des toiles d'araignée (*). Rappelez-vous que ces constructions, entassées comme à plaisir, étaient en *pointillé*, c'est-à-dire à points longs, égaux et également espacés, ou a points longs, séparés par un ou plusieurs points ronds, ce qui produisait un travail dont on ne peut bien apprécier la longueur et la fatigue qu'après y avoir été condamné. Ce pointillé, simple ou mixte, emprunt malheureux fait à la gravure, rendait rebutant un travail tout manuel qu'on ne saurait, au contraire, rendre trop facile. Il a disparu des dessins manuscrits de l'École Polytechnique, et la vue des élèves, qui dessinent dans des salles les plus mal éclairées peut-être de toutes les écoles du Gouvernement, s'en trouve bien. Les lignes de construction, véritables lignes idéales, puisqu'on pourrait les enlever après avoir obtenu le résultat, sont d'une autre couleur que les données et les résultats; elles sont en trait rouge de carmin, continu et léger. Il importe maintenant de faire disparaître le pointillé des exercices graphiques des candidats, de substituer aux planches en noir du graveur les épures à deux couleurs (noir et rouge), et même les épures à trois couleurs (noir, rouge et bleu), qui se prêtent à d'intéressantes combinaisons. Telles sont les épures, véritables résumés, où les cas principaux d'une même question générale, par exemple l'intersection de deux cylindres, sont réunis sans confusion et sans grand travail : pénétration avec courbe d'entrée et courbe de sortie distinctes, pénétration avec

---

(*) Lacroix, dans la préface du *Complément des Éléments de Géométrie*, dit : « Des figures chargées de toutes les lignes de construction sont aux » planches d'un Traité de Géométrie ce que des minutes de calcul sont » aux exemples d'un Traité d'Arithmétique. »

point multiple, arrachement. — L'épure des sections planes du cône en présente un autre exemple.

Résumons : Dans le dessin des projections, toute *ligne noire* représente une trace, un contour, une arête, une grandeur qui existe réellement, nécessairement, parce qu'elle tient à la forme ou à la situation, aux données ou aux résultats. Cette ligne est *pleine* ou *ponctuée*, selon qu'elle est vue ou cachée dans telle ou telle projection. Toute ligne *rouge* représente une ligne auxiliaire, appartenant au système des constructions, système dont les détails peuvent et doivent être supprimés en partie. — Tels sont les *signes*, bien peu nombreux et pourtant suffisants du dessin des projections. Je voudrais qu'on y ajoutât cette convention, qui n'aurait, je crois, que des avantages : Tout résultat sera d'un trait un peu plus fort que les données. Enfin, je compléterais notre alphabet en y introduisant le pointillé, mais seulement dans quelques cas, comme pour garder la trace ou le souvenir de lignes montrant certain état de continuité ou de liaison, certaines extensions nécessaires, certaines particularités dont le détail ne saurait trouver place ici. Cela étant, le dessin des projections pourrait aborder et rendre, de la manière la plus satisfaisante, la solution de toutes les questions de géométrie, abstraite ou appliquée.

Récemment on a introduit à l'École Polytechnique, dans la *mise à l'encre* des *épures au crayon*, une amélioration non moins réelle que la précédente. On a réduit ce travail manuel à sa plus simple expression, en posant en principe qu'une épure est complète, achevée, lorsqu'elle renferme tout ce qui est nécessaire pour l'intelligence et l'explication de la solution de la question proposée; rien de plus, rien de moins. On ne voit plus de ces épures où les mêmes constructions étaient répétées jusqu'à satiété, de ces redites comparables au verbiage d'un parleur à vide, qui avaient le grave inconvénient de nuire à la clarté, sans laquelle une épure est difficile, pénible à lire, quand elle n'est pas illisible.

Par là on a gagné un temps précieux que l'on consacre à la partie géométrique, c'est-à-dire à discuter les questions, à bien disposer les données, à construire des épures claires, originales et instructives. — « La géomé-
» trie nouvelle, dit M. Charles Dupin, par ses considé-
» rations intellectuelles et par ses opérations graphiques,
» est éminemment propre à fortifier la raison et à per-
» fectionner les sens (*). » — L'imprévu, dans la solution graphique des différents cas d'une même question générale, où le dessinateur géomètre *lance à son gré les formes dans l'espace,* conduit souvent les élèves et, par suite, le professeur à d'intéressantes discussions. Il est bien constaté qu'on lui doit plus d'une heureuse rencontre, que rien ne faisait soupçonner? Monge et, après lui, Hachette, et bien d'autres encore, ont trouvé dans les épures d'ombres, de perspective et de stéréotomie plus d'une difficulté géométrique à résoudre. « C'est aux re-
» cherches que les accidents curieux des ombres ont pro-
» voquées, dit Eisenmann (**), que nous devons une
» grande partie des progrès de la science, et particulière-
» ment des surfaces développables. »

J'arrive aux *épures muettes,* au sujet desquelles il existe un préjugé fâcheux. Les élèves disent journellement : *Les écritures gâtent les épures.* — Cela est vrai des écritures mal faites. Le dessin le plus soigné perd, en effet, tout son mérite d'exécution graphique sous l'influence de l'écriture cursive de la très-grande majorité des

(*) *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de* G. Monge, page 19.

(**) 4e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* page 621.

élèves à qui les *devoirs* des humanités ont enlevé tout talent calligraphique. Mais les écritures bien faites, en lettres linéaires et dessinées, genre facile à acquérir par tous, n'ont jamais *gâté* une épure; elles la relèvent même quand sa mise à l'encre laisse quelque chose à désirer; bien plus, elles la complètent par des indications nécessaires, indispensables, sans lesquelles elle pourrait être comparée à un rébus difficile à deviner par tous les lecteurs, même par l'auteur appelé à la lire après un certain laps de temps.

D'où vient cette opinion erronée, qu'une épure n'a pas besoin d'indications écrites, pas même d'un titre, qu'elle se lit d'elle-même, seulement avec plus ou moins de facilité, selon que le lecteur est plus ou moins exercé? Cette erreur vient du long règne de l'ancienne collection de l'École, de ces épures types, sacramentelles en quelque sorte, qu'on exécutait religieusement de Bayonne à Metz, de Rennes à Strasbourg, qu'on savait par cœur, qu'on lisait à première vue, couramment, et qui, par conséquent, n'avaient besoin d'aucun secours, pas même d'un titre. Mais que l'on sorte de ce recueil, que l'on prenne seulement l'épure de l'intersection de deux surfaces coniques, considérée dans toute sa généralité, pouvant donner lieu à quatre branches hyperboliques, ou à deux branches hyperboliques et à une branche parabolique..., et qu'on dise si une telle épure peut se passer d'indications écrites, si elle peut être *muette*.

J'aurais déjà dû vous parler de la *solution au crayon;* j'ai dit plus haut de l'*épure au crayon*. C'est qu'en effet, faute de temps ou par d'autres motifs, on peut être obligé d'arrêter là son travail, qui souvent suffit à cet état. Mais cela suppose qu'on a eu le soin de ne pas tracer une foule de lignes inutiles, qui ôtent au dessin la clarté, qualité encore plus difficile à obtenir au crayon qu'à l'encre. Ce soin, je le recommande expressément, afin que tout élève, même le moins habile, puisse terminer complétement ses épures au crayon. Je vais plus loin, je pose comme règle absolue qu'on ne doit jamais mettre une épure à l'encre que lorsque la solution au crayon est entièrement terminée, le résultat bien *épuré,* le *vu* et le *caché* arrêtés dans chaque projection, de manière qu'elle puisse, au besoin, être mise à l'encre par un autre dessinateur, ou rester au crayon. C'est alors que la mise à l'encre devient ce qu'elle doit être, un simple travail manuel, une reproduction, servile si l'on veut, d'un premier travail, mais assurée contre les grattages et contre des mécomptes qui conduisent, sans profit et avec dégoût, à recommencer une œuvre que tout semblait annoncer terminée.

Puis-je ne pas vous soumettre quelques observations sur le mode même de l'*enseignement oral,* auquel je trouve plus d'un défaut? Le premier, c'est qu'on y explique des épures, rien que des épures, et non une doctrine, celle de Monge. Il résulte de là que les élèves n'ont appris à résoudre qu'un certain nombre de questions, et non l'art de résoudre les questions, et que, pour eux, toute la géométrie descriptive est dans leur cahier d'épures. Le second, c'est qu'on *leçonne* trop, qu'on me pardonne ce barbarisme, et que l'explication de ces épures est tellement détaillée, minutieuse, que tout y est prévu, noté; c'est que ces épures, déjà disséquées aux leçons, sont reprises au tableau dans les salles d'étude, puis reportées sur le papier en présence des modèles gravés, et enfin dessinées de nouveau aux interrogations. De sorte que, chose presque incroyable, l'enseignement par la mémoire à pénétré jusque dans la science de l'étendue, dans une partie où l'invasion paraissait impossible. Que peut produire un tel état de choses? Des dessinateurs routiniers, craintifs, qu'un rien arrête, parce qu'ils sont sans initiative et sans expérience des difficultés; trop souvent aussi des élèves prévenus contre un art discrédité par son enseignement, contre une partie dont l'utilité, je le répète avec tous mes anciens camarades, est de tous les instants. De là un défaut originel que les candidats apportent avec eux en entrant à l'École Polytechnique, où il n'était pas combattu et qu'ils conservaient dans les écoles d'application, et jusque dans les services publics.

Les épreuves d'autrefois, qu'on appelait des *concours*, dans lesquelles les élèves, jusqu'alors tenus en lisière, étaient abandonnés à leurs propres forces, ont toujours produit des résultats qui prouvaient d'une manière irrécusable la faiblesse des élèves et la mauvaise direction de l'enseignement de la géométrie descriptive.

Il me reste à dire, à propos de l'*enseignement oral*, que Monge s'appliquait avec soin à faire des rapprochements entre l'analyse des trois dimensions et la méthode des projections, et que cela n'a plus lieu. « Monge, pro-
» fesseur au Louvre, montrait quelles relations admira-
» bles unissent les opérations de l'analyse et de la géomé-
» trie (*). »

On néglige aussi l'emploi des *projections auxiliaires* (**), qui sont à la fois un moyen de simplifier la solution de beaucoup de questions dans lesquelles les données sont quelconques, et un exercice graphique très-utile. Les programmes de la composition mathématique pour le concours d'admission de cette année, en ont présenté plusieurs exemples. Il serait regrettable que cet avertissement passât inaperçu. Dans la détermination des

(*) *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de* G. Monge (page 11); par M. Charles Dupin.

(**) Ce sont les *changements de plan de projection* de la géométrie de M. Théodore Olivier.

ombres linéaires sur la surface des corps, dans les épures de *charpenterie* surtout, on a le plus souvent recours à une troisième projection, quelquefois même à une quatrième.

Enfin, on néglige l'étude des *formes polyédrales* pour s'attacher presque exclusivement aux formes continues: ce dont on s'aperçoit à l'École Polytechnique, où l'enseignement de la *charpenterie,* qui traite de formes discontinues, a toujours présenté plus de difficulté que celui de la *coupe des pierres.* Il serait bon, après les généralités sur la ligne droite et le plan, d'étudier un peu les *polyèdres,* au lieu de s'arrêter à la perpendiculaire au plan et à la plus courte distance entre deux droites, comme on le fait généralement.

Je dirai seulement, quant à la rédaction des *textes de la géométrie descriptive,* que c'est un travail qui me paraît laisser beaucoup à désirer. Les compositions de cette année en ont fourni une preuve convaincante. Je crois qu'il pourrait y avoir là quelques règles à donner.

Enfin, je voudrais, si je n'étais déjà trop long, vous parler de certaines parties de l'enseignement, parties très-secondaires, dont on est surpris de trouver le premier apprentissage à l'École Polytechnique. — Je vous le demande : est-il convenable de n'apprendre qu'à dix-neuf ans (âge moyen des candidats à leur entrée à l'École), l'art si facile de dessiner des *lettres linéaires* (*), genre d'écriture qui convient aux *épures,* au *dessin architectural,* au *dessin des machines,* en un mot, à tous les genres, à la seule exception du *dessin topographique,* qui ne comporte que les *lettres moulées*, bien autrement difficiles à faire que les lettres simplement dessinées par

(*) Lettres sans pleins ni déliés, qu'on nomme, en typographie, *lettres maigres.*

un trait présentant leur forme générale ? — Pourquoi le *dessin en croquis*, le *dessin cursif*, est-il complétement oublié dans l'enseignement préparatoire, malgré son utilité non moins grande que celle du dessin à la règle et au compas, pour préparer aux croquis de l'architecture et des machines, pour suivre facilement les professeurs aux leçons, et, surtout, pour discuter rapidement le choix et les dispositions des données des épures, étude préliminaire sans laquelle les élèves perdent beaucoup de temps dans leurs essais à la règle et au compas, qui ne sont pas des instruments de tâtonnement? Je ne parle pas du découragement que ces essais infructueux leur causent trop souvent.— Pourquoi ne trouve-t-on pas, avant l'école, des exercices sur le *maniement de la plume ?* Je ne pense pas qu'on regarde comme une préparation suffisante les quelques courbes que les candidats ont à tracer sur leurs épures. D'ailleurs elles sont presque toutes mises à l'encre avec le *guide-courbe,* vulgairement appelé *pistolet.* Aussi avec quel soin les élèves comptent les courbes et les évitent! Je ne proscris pas d'une manière absolue le *pistolet,* qui a son utilité et ses applications propres ; mais je ne l'admets qu'à côté d'exercices spéciaux sur le maniement de la plume, etc.

Qui ne sait qu'il y a de ces choses qu'on ne doit pas commencer trop tard, sous peine de les croire au-dessous de soi, ou tout au moins de ne les faire qu'avec une certaine répugnance? Il est aussi de ces détails qui ne peuvent être abordés dans un amphithéâtre, tant ils sont simples et minutieux, qui appartiennent à ce que l'on pourrait appeler l'enseignement familier.

Je ne vous parlerai pas du *dessin d'imitation*, bien qu'il se rattache de près au dessin des projections ; c'est un sujet important qui ne saurait être traité incidemment. Il faudrait considérer *cette imitation libre des corps non* *susceptibles de définition exacte* (*), comme *art d'agrément*, avant l'École Polytechnique, et à l'École, comme *art mixte,* si je puis m'exprimer ainsi. De chacun de ces points de vue, son enseignement me paraît incomplet et mal dirigé. A l'École Polytechnique, par exemple, où le mérite des maîtres offre certainement toutes les garanties de succès, on s'étonne de voir un résultat utile si peu en rapport avec le temps qui consacré au *dessin d'imitation,* et avec la dépense qu'entraînent ses leçons de nuit. Et puis, n'est-il pas regrettable de n'y trouver aucune liaison entre les *ombres linéaires* et la *perspective linéaire* des exercices graphiques, et les études de perspective, d'ombre et de couleur de la *salle de dessin?* de n'y pas trouver non plus le *dessin d'ornement* que Monge, savant et artiste, avait mis avec tant de raison dans ses programmes? etc. — Ce que je prendais surtout à partie, si je pouvais m'occuper de ce sujet, ce serait son *enseignement par copie* qui règne partout, et dont le fâcheux effet s'étend plus loin qu'on ne pense.

Que si ces observations, ces critiques, vous paraissent fondées, mon cher confrère, prenez-en votre part de responsabilité en leur donnant place dans vos *Annales.* En même temps, vous m'autoriserez à vous offrir quelques conseils sur la partie graphique de l'enseignement de la géométrie descriptive.

Note. Naguère, *croyant* à la pudeur, je ne *croyais* pas que l'on oserait, dans le haut enseignement, remplacer la mécanique des Lagrange par le verbiage industriel de nos machinistes; je commettais une double erreur. Aujourd'hui, il est question de remplacer en *Sorbonne* le calcul des probabilités par un cours à l'usage des charpentiers. Maintenant, je crois tout. Les publicains règnent dans le temple. O. TERQUEM.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 1er Cahier.

Sur les résultats de la substitution d'une suite de nombres équidistants dans une fonction entière d'une seule variable. — Application à la séparation des racines d'une équation du troisième degré. — Formules d'interpolation (*);

PAR M. JULES VIEILLE.

1. Soit $y=f(x)$ une fonction quelconque de la variable x; si l'on y remplace x par $x+h$, la différence

$$f(x+h)-f(x)$$

se nomme *différence première* de la fonction y, et on la représente par Δy. Cette différence est elle-même une fonction de x (en général); et si l'on donne à la variable un nouvel accroissement égal à h, la différence première de Δy, ou

$$f(x+2h)-f(x+h)-[f(x+h)-f(x)],$$

se nomme *différence deuxième* de la fonction y; on la représente par $\Delta^2 y$.

De même la différence première de $\Delta^2 y$ est dite *différence troisième* de y ou $\Delta^3 y$; et ainsi de suite.

Il résulte de cette définition que la différence $m^{ième}$ de la différence $n^{ième}$ d'une fonction est la différence $(m+n)^{ième}$ de cette fonction

$$\Delta^m.\Delta^n y = \Delta^{m+n} y.$$

2. THÉORÈME. *La différence $m^{ième}$ d'une fonction en-*

(*) En rédigeant cette Note, nous n'avons eu d'autre but que de remplir une lacune des Traités élémentaires d'Algèbre, et de fournir la solution de plusieurs questions renfermées dans le nouveau Programme d'admission à l'École Polytechnique.

tière du degré m,

$$y = \mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \ldots + \mathrm{K}x + \mathrm{L},$$

est constante, et égale à $1.2.3\ldots m\,\mathrm{A}h^m$.

On a

$$\Delta y = \mathrm{A}[(x+h)^m - x^m] + \mathrm{B}[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}] + \ldots.$$

Sans développer toutes ces puissances, il suffit de remarquer que Δy sera un polynôme du degré $m-1$ ayant pour premier terme $m\mathrm{A}x^{m-1}h$, lequel se déduit *du premier terme de y, en multipliant* A *par l'exposant de x dans ce terme, diminuant l'exposant de x d'une unité, et augmentant celui de h d'une unité.* Il en résulte que $\Delta^2 y$ est un polynôme du degré $m-2$, ayant pour premier terme

$$m(m-1)\mathrm{A}x^{m-2}h^2;$$

$\Delta^3 y$ est du degré $m-3$ et a pour premier terme

$$m(m-1)(m-2)\mathrm{A}x^{m-3}h^3;$$

$\Delta^{m-1}y$ sera du premier degré en x, et son premier terme sera

$$m(m-1)\ldots 3.2\,\mathrm{A}x.h^{m-1};$$

enfin $\Delta^m y$ sera égal à une constante

$$\Delta^m y = 1.2\ldots m\,\mathrm{A}h^m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire 1. Si $\mathrm{A}=1$, $h=1$. La différence de l'ordre m se réduit à

$$1.2.3\ldots m.$$

Par exemple, si dans les fonctions du troisième degré

$$y = x^3 - 3x + 1,\quad y = x^3 - 67 - 7,\quad y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

on substitue des nombres entiers consécutifs, on aura constamment

$$\Delta^3 y = 1.2.3 = 6.$$

Corollaire 2. Soient $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ les différentes valeurs que reçoit une fonction entière de x, du degré m, quand on y remplace x par les nombres équidistants

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad x_0 + 3h;$$

si l'on retranche chaque terme du suivant, on aura une suite de différences premières, généralement inégales,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2 \ldots.$$

Si l'on retranche ensuite chacune de ces différences de la suivante, on aura la suite des différences deuxièmes

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_2 \ldots.$$

En continuant ainsi jusqu'à l'ordre m, on aura des différences $m^{\text{ièmes}}$ toutes égales entre elles et à la constante

$$1.2.3\ldots m \mathrm{A} h^m.$$

Applications.

4. *Formation des puissances des nombres entiers consécutifs.*

Supposons qu'il s'agisse de calculer la suite des cubes des nombres entiers. Ici la fonction $y = x^3$; on calculera directement trois valeurs de y, c'est-à-dire *trois cubes consécutifs seulement*, et l'on choisira de préférence ceux des nombres 0, 1, 2; on conclut de ces trois cubes (0, 1, 8), les deux différences premières

$$\Delta(0^3) = 1, \quad \Delta(1^3) = 7,$$

puis de ces deux différences, la différence deuxième

$$\Delta^2(0^3) = 6;$$

quant à la différence troisième, elle est constante et égale à $1.2.3 = 6$. Cela posé, on formera, par additions successives de ce dernier nombre, la suite des différences deuxièmes, puis de celles-ci on passera, toujours par voie d'addition, à la suite des différences premières; enfin de ces dernières à la suite des cubes demandés.

Voici la disposition des calculs.

NOMBRES.	CUBES.	DIFFÉRENCES premières.	DIFFÉRENCES deuxièmes.	DIFFÉRENCES troisièmes.
0	0	1	6	6
1	1	7	12	»
2	8	19	18	»
3	27	37	24	»
4	64	61	30	»
5	125	91	36	»
6	216	127	42	»
7	343	169	48	»
8	512	217	54	»
9	729	271	60	»
»	»	»	»	»

Cette méthode est applicable avec avantage au calcul des puissances de tous les degrés des nombres entiers consécutifs; pour les puissances cinquièmes par exemple, on devrait d'abord former directement *cinq* puissances consécutives. On pourra choisir celles des nombres -2, $-1, 0, 1, 2$.

5. Étant donnée une fonction entière du $m^{\text{ième}}$ degré, il suffira de calculer directement les résultats de la substitution de m nombres entiers consécutifs, pour en déduire, au moyen des différences, ceux de tous les autres nombres entiers, positifs ou négatifs.

Soit, par exemple, la fonction du troisième degré

$$y = x^3 + 11x^2 - 102x + 181;$$

on partira des nombres -1, 0, $+1$.

$x = -1$ donne $y_{-1} = +293$,
$x = 0$ donne $y_0 = +181$,
$x = +1$ donne $y_1 = +91$;

on en conclut

$$\Delta(y_{-1}) = -112,$$
$$\Delta(y_0) = -90;$$

puis

$$\Delta^2(y_{-1}) = +22:$$

on a d'ailleurs

$$\Delta^3(y_{-1}) = 6.$$

Cela posé, pour avoir les résultats de la substitution des nombres entiers et positifs 2, 3, 4, 5, ..., on procédera, comme ci-dessus, par additions successives, en remontant des différences troisièmes aux différences deuxièmes, de celles-ci aux différences premières, enfin de ces dernières aux valeurs cherchées de la fonction.

Tableau des calculs.

$x =$	$y =$	Δ	Δ^2	Δ^3
− 1	+ 293	− 112	+ 22	6
0	+ 181	− 90	+ 28	»
+ 1	+ 91	− 62	+ 34	»
+ 2	+ 29	− 28	+ 40	»
+ 3	+ 1	+ 12	+ 46	»
+ 4	+ 13	+ 58	+ 52	»
+ 5	+ 71	+ 110	+ 58	»
+ 6	+ 181	+ 168	+ 64	»

A partir de $x = 3$, il est évident, par ce tableau, que les résultats des substitutions seront constamment positifs et croissants; on aura les résultats de la substitution des nombres négatifs − 2, − 3, − 4, − 5, ..., en procédant par soustractions successives au lieu d'additions. En effet, on voit que, pour remonter d'une ligne horizontale du tableau ci-dessus à la ligne supérieure, par exemple de la ligne qui répond à $x = 4$ à celle qui répond à $x = 3$, il faut *retrancher* 6 de 52, ce qui donne

46, puis 46 de 58, ce qui donne 12, puis 12 de 13, ce qui donne 1. En suivant cette loi, on passera des nombres relatifs à — 1 à ceux relatifs à — 2, puis de ces derniers à ceux relatifs à — 3, et ainsi de suite. On trouve ainsi pour la fonction des valeurs positives, tant que x est supérieur à — 18. $x = -17$ donne $y = 181$, et $x = -18$ donne $y = -251$; à partir de — 18, si x continue à décroître, les résultats de la substitution seront constamment négatifs.

Application à la séparation des racines d'une équation du troisième degré.

6. Les calculs précédents n'ont manifesté qu'un seul changement de signe pour la fonction y, et ce changement a lieu lorsque la variable x passe de — 17 à — 18. Il en résulte que l'équation

$$(1) \qquad x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0 \text{ (*)}$$

a une racine négative comprise entre — 17 et — 18; elle ne peut d'ailleurs avoir qu'une seule racine négative, puisque la transformée en $(-x)$ n'offre qu'une variation.

[On aurait pu, sans passer par toutes les substitutions précédentes, déterminer plus simplement les deux nombres entiers entre lesquels est comprise la racine négative, en remarquant que le premier membre de l'équation peut s'écrire

$$x(x-6)(x+17) + 181,$$

et cette forme manifeste le changement de signe unique qui a lieu de $x = -17$ à $x = -18$].

Outre la racine réelle négative que nous venons de sé-

(*) Cette équation est celle à laquelle M. Sturm a appliqué son théorème : nous la choisissons, afin que l'on puisse plus commodément comparer les deux modes de calculs.

parer, l'équation (1) *peut* admettre deux racines réelles positives. Mais nos calculs ne nous fournissent aucune conclusion sur l'existence de ces racines. Nous pouvons seulement dire que, *si elles existent,* elles sont comprises toutes deux entre deux nombres entiers consécutifs; et comme la substitution de $x = 3$ a donné pour résultat 1, nombre beaucoup plus petit que ceux fournis par les substitutions qui précèdent et qui suivent, on serait conduit à chercher les deux racines entre 2 et 3 ou entre 3 et 4.

Il ne faudrait pas dire que 3 *est une limite supérieure des racines positives, en se fondant sur ce que, à partir de* $x = 3$, *le tableau des différences fait voir que les résultats des substitutions seront toujours positifs et croissants.*

En effet, de ce que les nombres *entiers* $3, 4, 5, \ldots$, font prendre à la fonction $(x^3 + 11x^2 - 102x + 181)$ des valeurs croissantes, il n'en résulte pas que la fonction ne puisse décroître et passer par zéro *pour des valeurs de x comprises entre deux d'entre eux*. La représentation graphique des valeurs de la fonction ne laisse aucun doute sur la fausseté de cette conclusion. La courbe dont ces valeurs sont les ordonnées, peut couper l'axe des x en deux points dont les abscisses sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs, et l'on remarquera qu'entre ces abscisses tombe celle d'un point de la courbe dont l'ordonnée, abstraction faite du signe, est un maximum. L'abscisse de ce point satisfait à l'équation

$$f'(x) = 0,$$

$f'(x)$ désignant la dérivée de la fonction proposée, c'est-à-dire que *les deux racines positives de l'équation* (1), *si elles existent, sont séparées par une racine de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée* *de son premier membre* [cas particulier du théorème de Rolle (*)].

7. Le plus souvent, dans les applications où l'on est conduit à résoudre une équation numérique du troisième degré, on sait d'*avance* si l'équation comporte *une* ou *trois* racines réelles. La considération de l'*équation dérivée* suffit alors pour séparer rigoureusement les racines de l'équation. Elle supplée avec avantage (pour le troisième degré) à la méthode de M. Sturm; sans elle, et en se bornant à la substitution de nombres équidistants, on s'expose à faire des tâtonnements inutiles.

Dans le cas qui nous occupe, l'équation dérivée est

$$3x^2 + 22x - 102 = 0,$$

et sa racine positive est

$$\frac{-11 + \sqrt{427}}{3} = 3,221\ldots$$

Donc, si l'on admet que l'équation (1) ait deux racines positives, l'une sera plus grande que 3,2, et l'autre plus petite que 3,3; et comme on sait déjà qu'elles sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs, c'est entre 3 et 4 qu'il faut les chercher.

8. Pour les séparer, nous allons substituer dans la fonction y des nombres équidistants de $\frac{1}{10}$ entre 3 et 4. En procédant ainsi, nous aurons l'avantage d'obtenir la valeur approchée de chaque racine à moins de $\frac{1}{10}$.

Il convient de continuer la méthode de calcul par différences, qui est plus expéditive et plus sûre que toute

(*) Ce théorème s'énonce ainsi : *Deux racines réelles et inégales d'une équation comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation dérivée.*

autre. A cet effet, nous emprunterons au tableau du n° 6 les nombres et différences relatives à $x = 3$,

$$y_3 = 1, \quad \Delta = 12, \quad \Delta^2 = 46, \quad \Delta^3 = 6,$$

et il s'agit de déduire de ces trois différences relatives à l'accroissement constant 1, les trois différences du même nombre y_3, relatives au nouvel accroissement constant $\frac{1}{10}$. Or, si l'on désigne en général par δ, δ^2, δ^3 les différences première, deuxième, troisième d'une valeur quelconque de la fonction y relatives à un accroissement constant h, et par Δ, Δ^2, Δ^3 les trois différences de la *même valeur* de y relatives à l'accroissement 1, on a les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \delta^3 = h^3 \Delta^3, \\ \delta^2 = h^2[\Delta^2 + (h-1)\Delta^3], \\ \delta = h\left[\Delta + \frac{h-1}{2}\Delta^2 + \frac{(h-1)(h-2)}{6}\Delta^3\right]; \end{cases}$$

elles seront démontrées plus loin, afin de ne pas interrompre le calcul. Nous nous bornerons à remarquer que la première est une conséquence évidente de la formule générale

$$\delta^m y = 1.2.3\ldots m.h^m.$$

En faisant $h = \frac{1}{10}$ dans les formules précédentes, on a

$$(3) \quad \begin{cases} \delta^3 = \frac{\Delta^3}{1000}, \\ \delta^2 = \frac{\Delta^2}{100} - \frac{9\Delta^3}{1000}, \\ \delta = \frac{\Delta}{10} - \frac{9\Delta^2}{200} + \frac{171.\Delta^3}{6000}; \end{cases}$$

et remplaçant Δ par 12, Δ^2 par 46, Δ^3 par 6, on a

$$\delta^3 = 0{,}006, \quad \delta^2 = +0{,}406, \quad \delta = -0{,}699.$$

Actuellement, la disposition des calculs s'explique d'elle-même ; ils sont consignés dans le tableau suivant.

Substitution de nombres équidistants de $\frac{1}{10}$ entre 3 et 4.

$x =$	$y =$	δ	δ^2	δ^3
3	+ 1	— 0,699	+ 0,406	0,006
3,1	+ 0,301	— 0,293	+ 0,412	»
3,2	+ 0,008	+ 0,119	+ 0,418	»
3,3	+ 0,127	+ 0,537	+ 0,424	»
3,4	+ 0,664	+ 0,961	+ 0,430	»
3,5	+ 1,625	+ 1,391	+ 0,436	»
3,6	+ 3,016	+ 1,827	+ 0,442	»
3,7	+ 4,843	+ 2,269	+ 0,448	»
3,8	+ 7,112	+ 2,717	+ 0,454	»
3,9	+ 9,829	+ 3,171	+ 0,460	»
4	+13,000	+ 3,631	+ 0,466	»

Comme vérification, on retrouve pour $x = 3 + \frac{10}{10}$ ou 4, le résultat 13 déjà connu. Si nous n'avions pas tenu à donner un exemple complet de ce genre de calculs, et à user du moyen de contrôle qui vient d'être indiqué, nous aurions pu nous dispenser, dans la question présente, de pousser les substitutions aussi loin : la séparation des racines n'exige pas qu'on aille au delà de 3,2; en effet, jusqu'à cette valeur de x, on n'a trouvé pour y que des valeurs positives; et comme la différence δ est devenue positive, on voit que la substitution de 3,3 devra donner également un résultat positif. Or on sait, par la considération de la dérivée, que l'une des racines cherchées est plus petite que 3,3, et l'autre plus grande que 3,2; donc il est certain qu'elles sont toutes deux comprises entre 3,2 et 3,3.

Il faut, pour poursuivre leur séparation, substituer des nombres équidistants de $\frac{1}{100}$ entre 3,20 et 3,30. A cet effet, remarquons que les formules (2) établissent des relations générales entre deux systèmes de différences (δ, δ^2, δ^3), (Δ, Δ^2, Δ^3) correspondantes à des accroissements dont le rapport est h; et comme le rapport de $\frac{1}{100}$ à $\frac{1}{10}$ est égal à celui de $\frac{1}{10}$ à 1, on comprend que les mêmes formules (3) fourniront les valeurs des nouvelles différences δ, δ^2, δ^3 relatives à l'accroissement constant $\frac{1}{100}$, en y remplaçant Δ, Δ^2, Δ^3 par leurs valeurs correspondantes à l'accroissement $\frac{1}{10}$.

Comme on doit partir de 3,20, on fera, dans les formules (3),

$$\Delta = 0,119, \quad \Delta^2 = 0,418, \quad \Delta^3 = 0,006,$$

et l'on aura

$$\delta = -0,006739, \quad \delta^2 = 0,004126, \quad \delta^3 = 0,000006.$$

Substitution de nombres équidistants de $\frac{1}{100}$ *entre* 3,20 *et* 3,30.

x	y	δ	δ^2	δ^3
3,20	+ 0,008	— 0,006739	0,004126	0,000006
3,21	+ 0,001261	— 0,002613	0,004132	»
3,22	— 0,001352	+ 0,001519	»	»
3,23	+ 0,000167	»	»	»

On trouve deux changements de signes, l'un de 3,21 à 3,22, l'autre de 3,22 à 3,23. Les deux racines positives de l'équation (1) sont donc séparées, et leurs valeurs approchées à moins de $\frac{1}{100}$ sont

$$3{,}21 \quad \text{et} \quad 3{,}22.$$

On pourra maintenant en approcher davantage par la méthode de Newton.

Quant à la racine négative comprise entre -17 et -18, on la calculera à moins de $\frac{1}{10}$, en substituant des nombres équidistants de $\frac{1}{10}$; puis on poursuivra l'approximation par la méthode de Newton.

9. Au reste, si l'on continue l'approximation par le calcul des différences en substituant successivement des nombres équidistants de $\frac{1}{100}$, de $\frac{1}{1000}$, de $\frac{1}{10000}\ldots$; on voit par les formules (3) que la valeur numérique de la différence première δ tendra à se réduire à $\frac{\Delta}{10}$, les autres termes $\frac{9\Delta^2}{200}$ et $\frac{171\Delta^3}{6000}$ n'ayant bientôt qu'une influence négligeable sur cette valeur. Quand le calcul aura été conduit jusqu'à ce degré où δ est sensiblement égale à $\frac{\Delta}{10}$, on pourra achever l'approximation de la racine par une simple proportion, comme on le fait dans le calcul du nombre correspondant à un logarithme. En effet, soient $f(x)$ le premier membre de l'équation, a et $a+\frac{1}{10^n}$ deux nombres entre lesquels tombe la racine cherchée; $f(a)$ et $f\left(a+\frac{1}{10^n}\right)$ sont de signes contraires. Soit, pour fixer les idées, $f(a)<0$, Δ la différence

$$f\left(a+\frac{1}{10^n}\right)-f(a),$$

δ la différence

$$f\left(a+\frac{1}{10^{n+1}}\right)-f(a),$$

on a $\delta=\frac{\Delta}{10}$ à peu près.

Puisque, l'accroissement de la variable étant réduit au dixième, l'accroissement correspondant de la fonction est pareillement réduit au dixième, on peut poser cette règle de trois :

Pour un accroissement Δ de $f(a)$, il a fallu ajouter à a, 10 unités $\left(\text{de l'ordre } \frac{1}{10^{n+1}}\right)$; combien, pour obtenir un accroissement $-f(a)$ (qui réduira la fonction à zéro), faudra-t-il ajouter d'unités, du même ordre ?

$$\Delta : -f(a) :: 10 : z, \quad \text{d'où} \quad z=\frac{-10f(a)}{\Delta}.$$

$a+\frac{z}{10^{n+1}}$ sera une valeur très-approchée de la racine cherchée. Si les nombres Δ et $-f(a)$ qu'il faut supposer réduits en unités du dernier ordre, sont exacts chacun à moins d'une demi-unité, l'erreur du quotient qui fournit z aura pour limite supérieure $\frac{1}{\left(\frac{\Delta}{10}\right)}$.

10. *Démonstration des formules* (2) *du* n° 8.

Ces formules sont comprises dans le problème général de l'interpolation, qui sera résolu plus loin. Mais on peut en donner une démonstration directe et assez simple dans le cas d'une fonction du troisième degré.

Soit y_0 la valeur que prend une fonction du troisième degré pour une valeur x_0 de x; la fonction sera de la forme

$$y=y_0+a(x-x_0)+b(x-x_0)^2+c(x-x_0)^3,$$

ou mieux, si l'on pose $x = x_0 + X$,

(1) $$y = y_0 + aX + bX^2 + cX^3.$$

Cette substitution de la variable X à x revient, en géométrie analytique, où l'on regarde y comme l'ordonnée d'une courbe, à transporter l'origine au point de l'axe des x qui a pour abscisse x_0.

D'après cela, au lieu d'attribuer à x les valeurs

$$x_0,\quad x_0 + h,\quad x_0 + 2h,\quad x_0 + 3h\ldots,$$

il sera équivalent et plus simple d'attribuer à X les valeurs

$$0,\ h,\ 2h,\ 3h.$$

Soient δ, δ^2, δ^3 les différences première, deuxième et troisième de y_0; on aura, en opérant les substitutions et soustractions indiquées,

$$\begin{aligned}\delta &= ah + bh^2 + ch^3,\\ \delta^2 &= 2bh^2 + 6ch^3,\\ \delta^3 &= 6ch^3.\end{aligned}$$

Soient Δ, Δ^2, Δ^3 les valeurs que prennent les trois différences de y_0, pour un accroissement constant 1 donné à la variable; on fera $h = 1$ dans les expressions précédentes, et l'on aura

$$\begin{aligned}\Delta &= a + b + c,\\ \Delta^2 &= 2b + 6c,\\ \Delta^3 &= 6c.\end{aligned}$$

Pour avoir les relations cherchées entre les δ et Δ, il ne reste plus qu'à éliminer a, b, c entre ces six équations; on tire des trois dernières

$$c = \frac{\Delta^3}{6},\quad b = \frac{\Delta^2 - \Delta^3}{2},\quad a = \left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{\Delta^3}{3}\right),$$

et, en substituant dans les trois premières, on a les formules (2).

La même marche est applicable à une fonction d'un degré supérieur au troisième, mais les calculs d'élimination se compliqueraient de plus en plus.

11. Si l'on substitue les valeurs trouvées pour les coefficients a, b, c, dans l'équation (1), on aura

$$y = y_0 + \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right) X + \frac{\Delta^2 - \Delta^3}{2} X^2 + \frac{\Delta^3}{6} X^3.$$

Ainsi une fonction du troisième degré est complétement déterminée, quand on connaît *une valeur* y_0 de la fonction correspondante à une valeur donnée de x, ainsi que les trois différences Δ, Δ^2, Δ^3 de y_0 relatives à l'accroissement constant 1 donné à la variable : cette proposition sera généralisée (n° 16).

Des différences envisagées sous un point de vue plus général. Expression de la différence $n^{ième}$ $(\Delta^n y_0)$ *au moyen des* $n+1$ *valeurs* $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

12. Si l'on considère une suite de valeurs $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$, que prend une fonction quelconque de x, quand la variable reçoit une suite de valeurs x_0, x_1, x_2, $x_3, \ldots$ (équidistantes ou non), et qu'on retranche chacune de la suivante, on a

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots,$$

on en tire

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0);$$

et réduisant

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

de même

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

et, par suite,

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0);$$

et réduisant

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

L'observation des différences des trois premiers ordres de y_0 conduit à cette loi : les indices décroissent successivement d'une unité depuis l'ordre de la différence jusqu'à zéro ; les coefficients sont ceux de la puissance du même ordre du binôme $(y - 1)$.

Si l'on suppose cette loi vraie pour la différence $n^{ième}$, on fera voir aisément qu'elle est encore vraie pour la différence $(n+1)^{ième}$; on trouvera, en effet, que chaque coefficient de Δ^{n+1} est égal au coefficient du terme de même rang dans Δ^n, ajouté au coefficient du terme précédent. Or c'est précisément ainsi que l'on passe de $(y-1)^n$ à $(y-1)^{n+1}$. On a donc, quel que soit n,

$$(4) \qquad \Delta^n y_0 = y_n - n y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \ldots \pm y_0.$$

Expression de y_n au moyen de y_0 et de ses n différences $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^n y_0$.

13. Cette question est la réciproque de la précédente. On a successivement

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0, \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta(y_0 + \Delta y_0) \\ &= y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \end{aligned}$$

car il est visible que la différence d'une somme de quantités est égale à la somme des différences de ces quantités ; on a donc en réduisant

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + \Delta(y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0),$$

et réduisant

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0.$$

On voit que les indices des différences vont en croissant d'une unité depuis zéro jusqu'à l'indice de la valeur de y, et les coefficients sont ceux de la puissance du même degré du binôme $(y+1)$.

On fera voir, en supposant la loi vraie pour y_n, et en passant de y_n à y_{n+1}, comme on est passé de y_2 à y_3, que cette loi est générale.

On a donc, quel que soit n,

$$(5) \qquad y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0.$$

Formules d'interpolation.

14. Une grandeur est dite *fonction* d'une autre lorsque, en faisant varier la seconde, il en résulte une variation déterminée pour la première. Ainsi, la surface d'un cercle est une *fonction* du rayon, l'espace parcouru par un corps qui tombe est une *fonction* du temps écoulé depuis le commencement de la chute, la tangente trigonométrique d'un arc est une *fonction* de l'arc, la tension maximum de la vapeur d'eau est une *fonction* de la température, etc. Il arrive souvent que la relation qui existe entre une *fonction* et *la variable* dont elle dépend n'est pas de nature à pouvoir être exprimée par une équation exacte, algébrique ou transcendante, ou bien (et cela revient au même dans la pratique) cette équation est trop compliquée pour qu'on puisse en déduire commodément toutes les valeurs de la fonction.

Alors si l'on connaît (par l'observation ou de toute autre manière) un certain nombre de valeurs de la fonction correspondante à des valeurs données de la variable, on peut se proposer de déterminer, avec une approximation suffisante, celles qui correspondent à des valeurs intermédiaires de la variable : tel est le but de l'*interpolation*.

Interpoler, c'est déterminer, entre certaines limites de la variable x, une fonction de x d'après la connaissance d'un certain nombre de valeurs particulières de cette fonction comprises entre ces limites.

Quand on n'a d'avance aucune donnée sur l'expression analytique de la fonction, le problème est évidemment indéterminé; car la fonction peut être considérée comme l'ordonnée d'une courbe dont x serait l'abscisse, et l'interpolation revient à déterminer la courbe d'après un certain nombre de points par lesquels elle doit passer. Or il existe une infinité de courbes ayant n points communs.

On conçoit cependant que si une étude préalable de la fonction dont il s'agit a fait voir qu'elle ne varie pas trop brusquement dans l'intervalle des valeurs de x que l'on considère, et si ces valeurs ne sont pas trop distantes les unes des autres, il sera possible d'estimer, avec une assez grande approximation, la figure de la courbe dans la partie correspondante de son cours.

15. L'indétermination du problème cesse complétement si, à la connaissance de $n+1$ valeurs particulières de la fonction, on ajoute cette condition, *que la fonction soit entière et du degré* n. En effet, s'il était possible que deux fonctions du même degré n

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{n-1} + lx^n,$$
$$a' + b'x + c'x^2 + \ldots + k'x^{n-1} + l'x^n,$$

non identiques, eussent $n+1$ valeurs égales pour les mêmes valeurs de x,

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n,$$

l'équation qu'on formerait en égalant à zéro la différence de ces fonctions, c'est-à-dire

$$(l-l')x^n + (k-k')x^{n-1} + \ldots + (b-b')x + a - a' = 0,$$

aurait $n+1$ racines

$$x = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n,$$

ce qui est absurde, cette équation étant d'un degré au plus égal à n.

Ainsi, quelque procédé qu'on emploie pour le calcul des coefficients a, b, c,..., l d'une fonction entière de degré n remplissant les conditions données, on devra toujours parvenir aux mêmes résultats.

16. Nous nous bornerons à exposer la formule de Newton, qui répond au cas le plus ordinaire, celui où les $n+1$ valeurs de x sont supposées équidistantes. On peut, comme on l'a vu n° 10, partir de zéro comme première valeur de x, puisque cela revient à disposer de l'origine des x qui est arbitraire; soient donc

$$0,\quad h,\quad 2h,\ldots,\quad nh,$$

les $n+1$ valeurs de x, et

$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\ldots,\quad y_n,$$

les valeurs correspondantes de la fonction y.

On sait (n° 13) exprimer y_1, y_2,..., y_n, en fonction de y_0 et de ses différences successives. Si on les désigne, pour abréger, par δ, δ^2, δ^3,..., δ^n; et si l'on désigne par t un nombre entier qui peut recevoir toutes les valeurs de 0 à n inclusivement, je dis qu'on aura

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} y_t = y_0 + t\delta + \frac{t(t-1)}{1.2}\delta^2 + \ldots\\ + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{1.2\ldots n}\delta^n. \end{aligned}\right.$$

En effet, pour $t=n$, cette équation coïncide avec la formule (5), et si t est plus petit que n, le second membre se termine de lui-même au terme $\frac{t(t-1)\ldots(t-t+1)}{1.2,\ldots t}\delta^t$; les coefficients des termes suivants étant nuls à cause du facteur $(t-t)$ qu'ils renferment.

Cela posé, si l'on change dans ce second membre t en $\frac{x}{h}$, il deviendra un polynôme entier en x du degré n.

$$y_0+\frac{x}{h}\delta+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\delta^2}{1.2}+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\frac{\delta^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-n+1\right)\frac{\delta^n}{1.2\ldots n},$$

qui se réduira évidemment à y_t pour $x=th$, et, par conséquent, ce polynôme prendra successivement les valeurs

$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\ldots,\ y_n,$$

quand on y donnera à x les valeurs

$$0,\quad h,\quad 2h,\ldots,\ nh,$$

ce qu'il est, du reste, facile de vérifier. Ce polynôme n'est donc autre que la fonction y qu'il s'agissait d'obtenir, (n° 15), et l'on a définitivement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} y&=y_0+\frac{x}{h}\delta+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\delta^2}{1.2}+\ldots\\ &+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-n+1\right)\frac{\delta^n}{1.2\ldots n}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule a l'inconvénient (qui lui est commun, du reste, avec les autres formules d'interpolation), de n'être pas ordonnée par rapport aux puissances de x, en sorte que pour avoir les coefficients a, b, c,..., l de ces diverses puissances, il faudra développer les produits indiqués.

Application au troisième degré. — L'équation (7), ordonnée par rapport à x, se réduit à

$$y=y_0+\left(\delta-\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{3}\right)\frac{x}{h}+\frac{\delta^2-\delta^3}{2}\left(\frac{x}{h}\right)^2+\frac{\delta^3}{6}\left(\frac{x}{h}\right)^3.$$

Si l'on suppose $h=1$, et qu'on désigne par Δ, Δ', Δ'', les différences de y_0, relatives à l'accroissement constant 1, l'équation précédente devient

$$y = y_0 + \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right) x + \frac{\Delta^2 - \Delta^3}{2} x^2 + \frac{\Delta^3}{6} x^3;$$

c'est le développement de y, déjà donné au n° 11.

Puisque les seconds membres de ces deux équations sont les développements d'une même fonction entière de x, ils doivent être identiques. En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on retrouve les formules (2) du n° 8. Cette marche conduira immédiatement aux formules analogues pour une fonction d'un degré supérieur au troisième.

17. L'équation (7) permettra de remplacer par une équation algébrique une équation transcendante $X = 0$, lorsqu'on connaîtra $(n+1)$ valeurs de la fonction X, correspondantes à des valeurs de x, équidistantes et assez voisines pour que les différences $n^{ièmes}$ des résultats de leur substitution puissent être considérées comme constantes. Au point de vue de la géométrie analytique, cette interpolation a pour effet de remplacer la courbe transcendante $y = X$, par la courbe *parabolique*

$$y = y_0 + \frac{x}{h}\delta + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots,$$

qui se confondra sensiblement avec la première, dans toute la partie de son cours, comprise entre les abscisses extrêmes o et nh.

L'emploi des parties proportionnelles dans les Tables de logarithmes est une véritable interpolation.

Comme les différences premières entre les termes consécutifs des Tables, varient très-lentement, on peut les regarder comme constantes dans un certain intervalle, c'est-à-dire regarder comme nulles les différences secondes, troisièmes, etc. Par exemple, si l'on ouvre les Tables trigonométriques au logarithme de tang ($34^\circ\, 11'\, 10''$), on trouve que la différence entre ce logarithme et celui de tang ($34^\circ\, 11'\, 20''$) est 453 dix-millionièmes, et l'on voit que cette différence se maintient la même pour les accroissements successifs de $10''$ en $10''$, *jusqu'au dixième terme* $34^\circ\, 12'\, 50''$, où elle devient 452; puis elle reprend sa première valeur 453 pour les trois termes suivants, et elle oscille ainsi longtemps entre 453 et 452 dix-millionièmes.

La même constance s'observe lorsqu'on remonte dans la Table *jusqu'au trentième terme* au-dessus de l'arc $34^\circ\, 11'\, 10''$. On peut donc regarder la fonction log tang x, comme se confondant sensiblement pour les valeurs de x, comprises entre ces limites avec une fonction entière dont la différence première δ serait égale au nombre constant 453 dix-millionièmes, c'est-à-dire avec la fonction

$$y = y_0 + \frac{x}{h}\delta, \tag{8}$$

qu'on déduit de l'équation (7) en faisant

$$\delta^2 = 0, \quad \delta^3 = 0 \ldots;$$

on en tire

$$\frac{y - y_0}{\delta} = \frac{x}{h},$$

c'est-à-dire les accroissements des logarithmes-tangentes proportionnels aux accroissements de l'arc, comme le suppose la règle usuelle.

Soient donc

$$y_0 = \log \operatorname{tang}(34^\circ\, 11'\, 10'') = 9{,}8320264,$$
$$h = 10'',$$
$$\delta = 453 \text{ dix-millionièmes},$$

et soit proposé de trouver le logarithme de

$$\operatorname{tang}(34^\circ\, 11'\, 17'',8);$$

on fera, dans l'équation (8),

$$x = 7'',8,$$

et l'on aura pour la différence du logarithme cherché au logarithme de tang (34° 11′ 10″), différence évaluée en dix-millionièmes,

$$y - y_0 = \frac{453 \times 7,8}{10} = 353,3.$$

Réciproquement, quand on se propose de trouver l'arc correspondant à un logarithme-tangente, y est donné, et l'inconnue est x. On tire de l'équation (8)

$$x = \frac{y - y_0}{\delta} h.$$

On fera $h = 10$, et le second membre indiquera le nombre x de secondes, qu'il faut ajouter à l'arc correspondant à y_0; c'est le résultat que donne la règle des parties proportionnelles.

Comme les deux termes de la division $(y - y_0)$ et δ ne sont connus qu'à $\frac{1}{2}$ unité près, et qu'on doit multiplier par 10, le quotient sera approché à moins de $\frac{1}{\left(\frac{\delta}{10}\right)}$ près. Par exemple, avec les nombres employés plus haut, on a $\delta = 453$; l'erreur sera moindre que $\frac{1''}{45}$, abstraction faite de l'erreur (beaucoup plus faible) apportée par la formule d'interpolation.

Comme les différences δ des tangentes sont les sommes des différences correspondantes des sinus et cosinus, il résulte de la limite d'erreur indiquée ci-dessus, que les formules qui donnent les angles par le moyen de la tangente, fournissent une approximation plus grande que les formules où l'angle est défini par son sinus ou son cosinus. C'est pourquoi les premières doivent toujours être préférées.

Note. L'excellent article qui précède est très-utile à l'enseignement. C'est un point détaché du calcul aux différences. Il serait avantageux, facile, d'apprendre aux élèves les principes de ce calcul; conséquences immédiates du binôme de Newton, et à l'aide desquelles on passe si naturellement au calcul différentiel, comme Euler le fait voir. Car les chaires doivent toujours retentir de ces méthodes générales tant recommandées dans les leçons à la première École Normale et professées par les grands maîtres, et que l'École Normale actuelle conserve et conservera (*utinam!*) religieusement. Ces méthodes sont diamétralement opposées à l'esprit de petitesse qu'on veut inoculer à certain enseignement en *haut lieu*.

O. TERQUEM.

SUR LE CALCUL DES LOGARITHMES;

PAR M. ABEL TRANSON.

Les nouveaux programmes pour l'admission à l'Ecole Polytechnique demandent le « calcul des logarithmes au » moyen de la série qui donne le logarithme de $n+1$, » quand on connaît celui de n. »

Il s'agit de la formule

$$(1)\quad \mathrm{L}(n+1)-\mathrm{L}n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right],$$

dans laquelle $\mathrm{L}\,n$ est le logarithme népérien de n.

Euler, dans l'*Introduc. in Anal. Infinit.*, donne les résultats de l'application de cette formule aux logarithmes hyperboliques des premiers nombres jusqu'à 10; mais, pour le calcul de L 7, il indique une modification remarquable qui consiste à calculer

$$\mathrm{L}\,50-\mathrm{L}\,49=2\left[\frac{1}{99}+\frac{1}{3(99)^3}+\ldots\right].$$

La série qui forme le second membre étant égale à

$$L\,2 + 2\,L\,5 - 2\,L\,7,$$

il s'ensuit la détermination du logarithme de 7 en fonction des logarithmes de 2 et 5, et d'une série beaucoup plus convergente que celle qui résulterait de la simple application de la formule (1).

Thomas Lavernède, dans les *Annales* de M. Gergonne, tome I, a recherché les moyens les plus avantageux de construire une Table de logarithmes. Parmi les formules très-curieuses que renferme son Mémoire, on peut distinguer la suivante, qui se démontre séparément et avec beaucoup de facilité.

Soit p un nombre premier. Au lieu d'appliquer immédiatement au calcul de Lp la formule (1), on l'applique au calcul du logarithme de p^2, et il en résulte cette nouvelle formule :

$$(2)\quad 2\,Lp - L(p^2-1) = 2\left[\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \ldots\right].$$

Or il faut observer que, p étant un nombre premier, tous les facteurs premiers de p^2-1 sont inférieurs à p; de sorte que le logarithme de p se trouve exprimé à l'aide de logarithmes antérieurement calculés et d'une série bien plus convergente que celle de la formule (1).

La formule employée par Euler pour calculer $L\,7$ revient à

$$(3)\quad L(p^2+1) - 2\,Lp = 2\left[\frac{1}{2p^2+1} + \frac{1}{3(2p^2+1)^3} + \ldots\right],$$

qui, à la vérité, est plus avantageuse que la formule (2), mais qui n'est pas toujours applicable, parce que les facteurs premiers de p^2+1 peuvent être supérieurs à p.

Note. Les nouveaux programmes ordonnent de vérifier l'exactitude des Tables logarithmiques, à l'aide des *parties proportionnelles*. Plusieurs personnes m'ont demandé ce que cela voulait dire. Je n'en sais rien. Voici mes conjectures. Il s'agit probablement de calculer les logarithmes au moyen de la Table des différences. On trouve un exemple de ce genre de calculs dans le texte qui précède les *Tables de Callet*, tome I, p. 35.

On m'a encore demandé pourquoi (*) on laisse subsister la discussion de cas douteux dans la trigonométrie rectiligne, et pourquoi on la supprime dans la trigonométrie sphérique. Je n'en sais rien. Voici mes conjectures. La trigonométrie rectiligne est employée par les arpenteurs, et il n'y avait pas d'arpenteurs de profession dans la Commission d'organisation; la trigonométrie sphérique est employée surtout par les astronomes, et il y avait un astronome de cabinet dans la Commission d'organisation. En général, ceux qui dominent aujourd'hui l'enseignement par ordonnance militaire, les Leibnitz de par le droit du plus fort, droit toujours le meilleur, auraient dû signifier leurs volontés d'une manière plus claire. Par exemple, j'ai mis plus de dix minutes à deviner le sens du conseil qu'ils veulent bien donner aux professeurs de l'Université de France, pour bien faire la *division* en arithmétique. Le conseil étant compris, *salva reverentia*, je le trouve assez mauvais. Il consiste, pour vérifier un chiffre du quotient, à multiplier tout le diviseur par ce chiffre, et à comparer le produit avec le dividende partiel; c'est l'ancienne méthode. Aujourd'hui, les élèves des lycées de Paris, pour opérer cette vérification, divisent le dividende partiel par le chiffre du quotient, et comparent le résultat avec le diviseur, ce qui est beaucoup plus expéditif. Étant sur le chapitre des conseils, on voudra bien me permettre d'en donner un seul qui me paraît très-opportun. Dans la composition des futures Commissions *à programmes*, on devrait admettre quelques élèves. Je m'assure que les derniers programmes auraient beaucoup gagné à cette admission.

O. TERQUEM.

THÉORIE DES SYSTÈMES DE QUATRE POINTS HARMONIQUES

(voir t. IX, p. 118);

PAR M. G.-J. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

I. *Définitions*. Désignons par A, B, A', B', quatre points en ligne droite, qui forment un *système harmonique*, et par α, β les milieux des intervalles des points conjugués A et A', B et B'.

Nous donnerons aux segments AA', BB' le nom de

(*) Nous publierons incessamment une série de *pourquoi*?

segments conjugués, à AB, A'B' celui de *segments extrêmes,* et enfin à AB' et A'B les noms de *grand* et de *moyen segment.*

Nous représenterons, en outre, par $\frac{a}{a'} = \text{a}$, $\frac{b'}{b} = \text{b}$ les rapports dans lesquels les distances entre les points conjugués A, A', B' et B se trouvent divisées par les deux autres points, de sorte que $\frac{AB}{A'B} = \text{a}$, $\frac{B'A'}{BA'} = \text{b}$.

II. *Propriétés des segments conjugués.* Si l'on exprime les quatre segments AB, A'B', AB', A'B en valeur des distances de leurs extrémités au point α, et qu'on substitue les valeurs obtenues

$$AB = A\alpha + B\alpha, \quad A'B' = B'\alpha - A'\alpha,$$
$$A'B = A'\alpha - B\alpha, \quad AB' = A\alpha + B'\alpha$$

dans l'égalité

$$(1) \qquad AB.A'B' = AB'.A'B$$

que donne la proportion harmonique AB : A'B :: AB' : A'B', on obtient la relation

$$(2) \qquad \overline{A\alpha}^2 = B\alpha.B'\alpha.$$

De même

$$(3) \qquad \overline{B\beta}^2 = A\beta.A'\beta.$$

La multiplication des identités $AA' = AB + A'B$, $BB' = A'B' + A'B$ donne ensuite

$$(4) \qquad AA'.BB' = 2AB.A'B' = 2AB'.A'B;$$

puis on obtient, en faisant le produit des égalités $AA' = AB + A'B$, $AA' = AB' - A'B'$,

$$(5) \qquad \overline{AA'}^2 = AB.AB' - A'B.A'B'.$$

De même

$$(6) \qquad \overline{BB'}^2 = B'A.B'A' - BA.BA'.$$

Si l'on ajoute les formules (5) et (6), on trouve, après réductions,

$$(7)\qquad \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = (AB + A'B')^2 = (AB' - A'B)^2,$$

d'où l'on tire

$$(8)\qquad \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = (AB + A'B')(AB' - A'B).$$

Divisant successivement les équations (5) et (6) par les valeurs (4), on a ensuite

$$(9)\qquad 2\cdot\frac{AA'}{BB'} = \frac{AB'}{A'B'} - \frac{A'B'}{AB'} = \frac{AB}{A'B} - \frac{A'B}{AB},$$

$$(10)\qquad 2\cdot\frac{BB'}{AA'} = \frac{B'A}{BA} - \frac{BA}{B'A} = \frac{B'A'}{BA'} - \frac{BA'}{B'A'}.$$

Si nous combinons, par addition et par soustraction, l'identité $AB.AB' = AB.AB'$ avec la formule (1), nous obtiendrons

$$AB\,(AB' + A'B') = AB'(AB + A'B),$$
$$AB\,(AB' - A'B') = AB'(AB - A'B),$$

ou

$$AB\,(AB' + A'B') = AB'.AA',\qquad AB.AA' = AB'(AB - A'B);$$

d'où nous tirons, en divisant convenablement par les valeurs (4),

$$(11)\qquad \frac{1}{A'B'} + \frac{1}{AB'} = \frac{2}{BB'},\qquad \frac{2}{BB'} = \frac{1}{A'B} - \frac{1}{AB}.$$

On trouverait, d'une manière analogue,

$$(12)\qquad \frac{1}{BA} + \frac{1}{B'A} = \frac{2}{AA'},\qquad \frac{2}{AA'} = \frac{1}{BA'} - \frac{1}{B'A'}.$$

La comparaison des formules (11) et (12) donne

$$(13)\qquad \frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'} = \frac{1}{A'B} + \frac{1}{AB'},$$

$$(14)\qquad \frac{2}{AA'} - \frac{2}{BB'} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'}.$$

On trouve ensuite facilement

$$(15)\qquad \frac{1}{A'B} - \frac{1}{AB'} = \frac{2}{A'B'} + \left(\frac{2}{AA'} - \frac{2}{BB'}\right),$$

$$(16)\qquad \frac{1}{A'B} - \frac{1}{AB'} = \frac{2}{AB} - \left(\frac{2}{AA'} - \frac{2}{BB'}\right),$$

$$(17)\qquad \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \frac{2}{A'B} - \left(\frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'}\right),$$

$$(18)\qquad \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \frac{2}{AB'} + \left(\frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'}\right).$$

En égalant les valeurs (12), de $\frac{2}{AA'}$, on a enfin la relation

$$(19)\qquad \frac{1}{A'B} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} + \frac{1}{AB'},$$

qui est l'une des formules les plus remarquables des systèmes harmoniques. On peut encore appeler l'attention sur la formule

$$(20)\qquad \overline{A\alpha}^2 + \overline{B\beta}^2 = \overline{\alpha\beta}^2,$$

qui se déduit de $B\beta^2 = A\beta . A'\beta$, en y remplaçant $A\beta$ et $A'\beta$ par $\alpha\beta + \alpha A$ et $\alpha\beta - \alpha A'$.

III. *Propriétés des segments non conjugués.* En élevant au carré les deux membres de l'identité $AB = A\beta - B\beta$, et en observant que (3) $\overline{B\beta}^2 = A\beta . A'\beta$, nous aurons

$$\overline{AB}^2 = A\beta(A\beta - 2B\beta + A'\beta).$$

Or

$$\begin{aligned} A\beta - 2B\beta + A'\beta &= (A\beta - B\beta) - (B\beta - A'\beta) \\ &= AB - A'B = A\alpha + B\alpha - A'\alpha + B\alpha = 2B\alpha ; \end{aligned}$$

donc

$$(21)\qquad \overline{AB}^2 = 2A\beta . B\alpha.$$

Nous obtiendrions de même

$$(22)\qquad \overline{A'B'}^2 = 2\,A'\beta . B'\alpha,$$

$$(23)\qquad \overline{AB'}^2 = 2\,A\beta . B'\alpha,$$

$$(24)\qquad \overline{A'B}^2 = 2\,A'\beta . B\alpha.$$

Combinant ces formules entre elles, nous trouvons

$$(25)\qquad \overline{AB}^2 : \overline{A'B}^2 = A\beta : A'\beta, \quad \overline{BA'}^2 : \overline{B'A'}^2 = B\alpha : B'\alpha;$$

$$(26)\qquad AB . A'B = 2\,B\alpha . B\beta, \quad BA' . B'A' = 2\,A'\beta . A'\alpha;$$

$$(27)\qquad AB : A'B = A\beta : B\beta, \quad BA' : B'A' = B\alpha : A'\alpha;$$

$$(28)\qquad AB . A'B : AB' . A'B' :: B\alpha : B'\alpha,$$

$$(29)\qquad AB . AB' : A'B . A'B :: A\beta : A'\beta.$$

IV. *Propriétés des rapports de division des segments conjugués.* Les deux proportions

$$AB : A'B :: a : a', \quad AB' : A'B' :: a : a'$$

donnent

$$AB + A'B \quad \text{ou} \quad AA' : A'B :: a + a' : a',$$
$$AB' - A'B' \quad \text{ou} \quad AA' : A'B' :: a - a' : a,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A'B'}{A'B} = \frac{a + a'}{a - a'};$$

donc

$$(30)\qquad \frac{a + a'}{a - a'} = \frac{b'}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{a} + 1}{\mathrm{a} - 1} = \mathrm{b}, \quad \frac{\mathrm{b} + 1}{\mathrm{b} - 1} = \mathrm{a}.$$

On trouve ensuite facilement

$$(31)\qquad \left\{ \begin{aligned} AB &= \frac{a}{a + a'} \cdot AA' = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a} + 1} \cdot AA', \\ A'B &= \frac{a'}{a + a'} \cdot AA' = \frac{1}{\mathrm{a} + 1} \cdot AA', \end{aligned} \right.$$

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} AB' &= \frac{a}{a - a'} \cdot AA' = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a} - 1} \cdot AA', \\ A'B' &= \frac{a'}{a - a'} \cdot AA' = \frac{1}{\mathrm{a} - 1} \cdot AA'. \end{aligned} \right.$$

La combinaison de ces valeurs donne encore

$$(33)\quad AB : A'B' :: \left(\frac{a}{a'} : \frac{b'}{b}\right) : 1 :: a(a-a') : a'(a+a'),$$

$$(34)\quad AB' : A'B :: \left(\frac{a}{a'} \cdot \frac{b'}{b}\right) : 1 :: a(a+a') : a'(a-a'),$$

$$(35)\quad AA' : BB' :: \frac{a}{a'}+1 : \frac{b'}{b}+1 :: a^2-a'^2 : 2aa' :: 2bb' : b'^2-b^2.$$

V. *Relations entre les distances d'un point* P *de la droite* ABA'B' *aux points harmoniques*. En exprimant les segments AB, A'B', AB', A'B en fonction des distances du point P aux points A, B, A', B', et en substituant les valeurs dans la relation (1), on obtient la formule

$$(36)\quad (PA+PA')(PB+PB') = 2(PA - PA' + PB.PB').$$

A l'aide de ce qui précède, on trouve aussi facilement que

$$(37)\qquad PB.PB'.AA' = \overline{PA'}^2.A\beta - \overline{PA}^2.A'\beta\ (*).$$

NOTE SUR LES SOMMES DE PUISSANCES SEMBLABLES;

PAR M. MOURGUES,

Professeur à Marseille.

Soit P_n la somme des combinaisons n à n de m quantités $a, b, c \ldots h$; soit A_n la partie de ces combinaisons qui ne contient pas a, B_n celle qui ne contient pas b....

On sait d'abord que

$$(1)\qquad P_n = A_n + a\,A_{n-1}.$$

Je dis en second lieu que

$$(2)\qquad A_n + B_n + C_n \ldots + H_n = (m-n)P_n;$$

(*) On abrége beaucoup en faisant $AB = m$, $BA' = n$, $A'B' = p$, et écrivant $n(m+n+p) = mp$, $A\alpha = \frac{1}{2}(m+n)$, $A\beta = \frac{1}{2}(n+p)$.

car une combinaison quelconque $abc\ldots e$ n'entre pas dans les n parties A_n, B_n,..., E_n, et entre une seule fois dans chacune des $m-n$ autres.

Cela posé, de la formule (1) on déduit

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} P_n &= A_n + aA_{n-1},\\ P_{n-1} &= A_{n-1} + aA_{n-2},\\ &\vdots\\ P_1 &= A_1 + a. \end{aligned}\right.$$

Multipliant les membres de la première équation par $(-a)$, de la deuxième par $(+a^2)$, de la troisième par $(-a^3)$, etc., et sommant, il vient

$$(4)\qquad P_n - aP_{n-1} + a^2 P_{n-2}\ldots \pm a^{n-1} P_1 \mp a^n = A_n.$$

De même

$$P_n - bP_{n-1} + b^2 P_{n-2}\ldots \pm b^{n-1} P_1 \mp b^n = B_n;$$

d'où, par addition,

$$mP_n - S_1 P_{n-1} + S_2 P_{n-2}\ldots \pm S_{n-1} P_1 \mp S_n = A_n + B_n\ldots + H_n,$$

et, par suite, en vertu de l'équation (2),

$$(5)\qquad nP_n - S_1 P_{n-2} + S_2 P_{n-1}\ldots \mp S_{n-1} P_1 \pm S_n = 0.$$

C'est la formule qui donne, en fonction des combinaisons, les sommes de puissances semblables d'indices inférieurs à m.

En second lieu, pour $n = m$, la première des relations (3) se réduit à $P_m = aA_{m-1}$, et, par suite, l'égalité (4) devient

$$P_m - aP_{m-1} + a^2 P_{m-2}\ldots \mp a^{m-1} P_1 \mp a^m = 0;$$

d'où, en multipliant les deux membres par a^r,

$$a^r P_m - a^{r+1} P_{m-1} + a^{r+2} P_{m-2}\ldots \pm a^{r+m-1} P_1 \mp a^{r+m} = 0.$$

Remplaçant a successivement par b, c,..., et sommant.

on a

$$(6)\qquad S_r P_m - S_{r+1} P_{m-1} \ldots \pm S_{r+m-1} P_1 \mp S_{m+r} = 0.$$

C'est la formule relative aux sommes d'indices non inférieurs à m.

SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 206

(voir t. VIII, p. 107);

PAR M. ANGELO GINOCCHI,
Avocat à Turin.

Il s'agit de satisfaire, par des nombres rationnels, aux deux équations

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2, \quad x^2 - y^2 - 1 = u^2.$$

On a donné une solution de ce problème, tome IX, page 116; mais, comme l'a remarqué M. Terquem, elle n'est que particulière. En effet, dans cette solution, on fait $y = pq$, ce qui donne

$$(z+u)(z-u) = 2p^2q^2,$$

et l'on conclut de là

$$z + u = 2q^2, \quad z - u = p^2,$$

conclusion qui n'est pas nécessaire, tant qu'on ne suppose pas qu'il s'agit seulement de nombres entiers; on peut remarquer aussi que la supposition $p = q^2$ n'est point la seule manière de rendre $4 + 4q^4 + p^4$ un carré, comme on l'admet dans le même article. Je pense donc qu'il est à propos de montrer comment on parvient à la solution complète, car la question n'est pas exempte de quelques difficultés qui pourraient arrêter les commençants.

En retranchant, de la première des équations proposées, la seconde, on obtient

$$2y^2 = z^2 - u^2,$$

et y, z, u doivent être trois nombres rationnels qu'on pourra toujours réduire à trois fractions ayant même dénominateur. Soient $\frac{h}{l}$, $\frac{k}{l}$, $\frac{i}{l}$ ces fractions, et g le plus grand diviseur commun aux trois numérateurs h, k, i: faisons $h = gh'$, $k = gk'$, $i = gi'$. Il viendra

$$2h'^2 = k'^2 - i'^2,$$

et h', k', i', n'ayant pas de facteur commun à tous les trois, seront ainsi, deux à deux, premiers entre eux; car si deux de ces nombres avaient un facteur commun, ce facteur, en vertu de la même équation, diviserait aussi le troisième. De plus, $k'^2 - i'^2$ ou le produit $(k' + i')(k' - i')$ sera un nombre pair; les nombres $k' + i'$, $k' - i'$ sont donc en même temps pairs ou impairs, et comme leur somme est $2k'$ et leur différence $2i'$, ils ne peuvent avoir de diviseur commun que 2, puisque k' et i' sont premiers entre eux; on fera donc

$$k' + i' = 2m, \quad k' - i' = 2n,$$

m et n étant premiers entre eux, et l'on aura

$$h'^2 = 2mn,$$

de sorte que $2mn$, étant pair et carré, sera divisible par 4, et, par suite, l'un des facteurs m, n sera divisible par 2. Soit $n = 2n'$; donc

$$h'^2 = 4mn',$$

et le produit mn' sera un carré : par conséquent, ses facteurs m, n', étant premiers entre eux, seront aussi des carrés, et l'on fera

$$m = p^2, \quad n' = q^2,$$

d'où

$$h' = 2pq, \quad k' = m + n = p^2 + 2q^2.$$

Si l'on posait $m = 2m'$, on aurait

$$h'^2 = 4m'n;$$

m' et n seraient deux carrés, et, en faisant $n = p^2$, $m' = q^2$, il viendrait également

$$h' = 2pq, \quad k' = p^2 + 2q^2.$$

Il en résulte

$$y = \frac{gh'}{l} = \frac{2gpq}{l}, \quad z = \frac{gk'}{l} = \frac{g(p^2 + 2q^2)}{l},$$

valeurs qui, étant substituées dans l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2,$$

donnent

$$l^2x^2 = g^2(p^2 + 2q^2)^2 - 4g^2p^2q^2 + l^2 = g^2(p^4 + 4q^4) + l^2.$$

Donc le nombre entier $g^2(p^4 + 4q^4) + l^2$ sera un carré. Soit $l + r$ sa racine; on aura

$$g^2(p^4 + 4q^4) = r^2 + 2lr,$$

d'où

$$l = \frac{g^2(p^4 + 4q^4)}{2r} - \frac{1}{2}r,$$

et il faudra que r soit un diviseur de $g^2(p^4 + 4q^4)$ et pair si $g^2(p^4 + hq^4)$ est pair. Par cette valeur de l, nous avons enfin les formules

$$y = \frac{2gpq}{l} = \frac{4gpqr}{g^2(p^4 + 4q^4) - r^2},$$

$$x = \frac{l + r}{l} = \frac{g^2(p^4 + 4q^4) + r^2}{g^2(p^4 + 4q^4) - r^2},$$

qui fourniront *toutes les solutions possibles* de la question proposée, pourvu qu'on assigne des valeurs entières à g, p, q, r, qu'on prenne p et q premiers entre eux (comme m et n), q impair (car des deux nombres m et n l'un est pair, l'autre impair, et q^2 est égal au dernier), et que r soit un diviseur de $g^2(p^4+4q^4)$, pair ou impair comme g.

Mais j'ajoute qu'on aura toujours des solutions du problème, en donnant aux mêmes lettres des valeurs *rationnelles quelconques*, et qu'ainsi on pourra, sans diminuer la généralité des formules précédentes, mettre gr à la place de r, ce qui donnera

$$y=\frac{4pqr}{p^4+4q^4-r^2},\quad x=\frac{p^4+4q^4+r^2}{p^4+4q^4-r^2}.$$

Car

$$(p^4+4q^4+r^2)^2-(p^4+4q^4-r^2)^2=4r^2(p^4+4q^4),$$

et, par suite, de ces dernières formules, il résultera

$$x^2\pm y^2-1=\frac{4r^2(p^4+4q^4\pm 4p^2q^2)}{(p^4+4q^4-r^2)^2}=\frac{4r^2(p^2\pm 2q^2)^2}{(p^4+4q^4-r^2)^2},$$

qui est toujours un carré, comme le veut l'énoncé du problème.

Il est clair, en même temps, qu'on aura

$$z=\frac{2r(p^2+2q^2)}{p^4+4q^4-r^2},\quad u=\frac{2r(p^2-2q^2)}{p^4+4q^4-r^2}.$$

Le problème est ainsi complétement résolu. Si l'on suppose $r=2q^2$, il vient

$$y=\frac{8q^3}{p^3},\quad x=\frac{8q^4}{p^4}+1,$$

d'où l'on tire la solution du Lilavati pour les nombres entiers, en prenant $p=1$. Les résultats sont, en substance, les mêmes, si l'on suppose $r=p^2$.

Mais en faisant $r=2pq$, on obtient cette solution en

6.

nombres fractionnaires

$$y = \left(\frac{p^2+2q^2}{p^2-2q^2}\right)^2 - 1, \quad x = \left(\frac{p^2+2q^2}{p^2-2q^2}\right)^2,$$

puisque, alors,

$$4pqr = 8p^2q^2 = (p^2+2q^2)^2 - (p^2-2q^2)^2.$$

Enfin, si l'on fait $r = p^2 - 2q^2$, on trouve

$$p^4 + 4q^4 - r^2 = 4p^2q^2,$$

et, en conséquence,

$$y = \frac{p^2-2q^2}{pq}, \quad x = 1 + \frac{(p^2-2q^2)^2}{2p^2q^2}:$$

d'où, en prenant $p = -\frac{1}{2}$, on tire

$$y = \frac{8q^2-1}{2q}, \quad x = 1 + \frac{(8q^2-1)^2}{8q^2},$$

solution du Lilavati pour les nombres fractionnaires [c'est par erreur que, dans les *Nouvelles Annales*, tome IX, page 117, on a imprimé $\left(\frac{8q^2-1}{8q^2}\right)^2$ au lieu de $\frac{(8q^2-1)^2}{8q^2}$].

On peut abréger cette solution comme il suit. Ayant l'équation

$$u^2 + 2y^2 = z^2,$$

faisons $z = u + t$; nous aurons

$$2y^2 = 2tu + t^2,$$

d'où

$$u = \frac{2y^2 - t^2}{2t},$$

et, par cette valeur, l'équation

$$x^2 - y^2 - 1 = u^2$$

deviendra

$$x^2 = \frac{(2y^2-t^2)^2}{4t^2} + y^2 + 1 = \frac{4y^4 + t^4 + 4t^2}{4t^2}.$$

On ne voit pas d'abord comment on peut, *en général*, rendre $4y^4 + t^4 + 4t^2$ un carré; mais si l'on fait $t = \frac{p}{n}$, il viendra

$$x^2 = \frac{4n^4y^4 + p^4 + 4n^2p^2}{4n^2p^2}, \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{p^4 + 4q^4 + l^2}{l^2},$$

en posant $l = 2np$, $q = ny$, de sorte qu'on devra rendre $p^4 + 4q^4 + l^2$ un carré, et en appelant $l + r$ sa racine, on aura

$$p^4 + 4q^4 = 2lr + r^2,$$

d'où

$$l = \frac{p^4 + 4q^4 - r^2}{2r},$$

$$y = \frac{q}{n} = \frac{2pq}{l} = \frac{4pqr}{p^4 + 4q^4 - r^2}, \quad x = \frac{l+r}{l} = \frac{p^4 + 4q^4 + r^2}{p^4 + 4q^4 - r^2}.$$

NOTE SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR;

Par M. E. LIONNET,
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

Théorème. *Le nombre de divisions à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers* A *et* B *ne peut excéder trois fois le nombre des chiffres du plus petit* B *des deux nombres proposés.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons fait voir (*) qu'on pouvait supposer A et B premiers entre eux, et, en désignant par

$$B \ldots D_6,\ D_5,\ D_4,\ D_3,\ D_2,\ 1$$

les nombres qui ont servi successivement de diviseur,

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome IV, page 617.

nous avons prouvé qu'entre trois diviseurs consécutifs quelconques, D_5, D_4, D_3 par exemple, on avait la relation

$$D_5 = \text{ou} > 2D_4 + D_3,$$

que nous allons démontrer d'une manière plus simple. Le diviseur D_4, étant le reste de la division de D_6 par D_5, est moindre que la moitié de D_5, et, par suite, contenu au moins deux fois dans D_5; donc, si D_3 est le reste de la division ordinaire de D_5 par D_4, on aura

$$(1) \qquad D_5 = \text{ou} > 2D_4 + D_3.$$

Dans le cas où D_3 est le reste correspondant au quotient, pris par excès, de la division de D_5 par D_4, si l'on nomme R le reste de la division ordinaire de D_5 par D_4, on aura, comme précédemment,

$$(2) \qquad D_5 = \text{ou} > 2D_4 + R;$$

mais D_8 étant moindre que la moitié de D_4, R est plus grand que cette moitié, donc $D_3 < R$, et, si l'on remplace R par D_3 dans la relation (2), on aura à plus forte raison la relation (1), qui est ainsi démontrée, quel que soit le mode de division qui a conduit au reste D_3.

SUR LA RACINE CUBIQUE;

PAR M. G.-H. NIEVENGLOSKI.

Lorsqu'on a trouvé la partie a de la racine cubique, on est quelquefois obligé de faire des essais pour déterminer le chiffre suivant; cela arrive notamment quand on cherche *le second* chiffre, car alors l'excès du quotient de la division par $3a^2$, sur ce chiffre, peut aller jusqu'à 14.

Pour abréger les essais infructueux, l'auteur d'un Traité d'Arithmétique, qui a paru l'an passé (*), démontre que si le chiffre trouvé a n'est pas inférieur à 3, en divisant par $3a^2 + 3a$ au lieu de diviser par $3a^2$, on obtient le chiffre cherché ou un chiffre trop faible. Et, plus loin, il ajoute expressément, si la partie trouvée a contient plus d'un chiffre, la division par $3a^2 + 3a$ « donnera *certainement* un chiffre égal ou inférieur au chiffre cherché. »

Cette double assertion me paraît inexacte. En effet, la différence de deux cubes consécutifs est $3a^2 + 3a + 1$; donc, en retranchant le cube de la partie trouvée a, le reste peut bien être $3a^2 + 3a$, et, par conséquent, quels que soient les chiffres de la tranche abaissée, la division par $3a^2 + 3a$ peut donner le quotient 10, qui n'est *certainement* ni le chiffre cherché, ni inférieur au chiffre cherché.

L'exemple $\sqrt[3]{124999999}$ peut servir de vérification.

D'après ce qui précède, il est aisé de voir que si l'on divise, non pas par $3a^2 + 3a$, mais par $3a^2 + 3a + 1$, on obtiendra incontestablement le chiffre cherché ou un chiffre inférieur; car

$$b > 10,$$

donc

$$3a^2 b \times 100 + 3ab^2 . 10 + b^3 < (3a^2 + 3a + 1) \times 100 \times b, \text{ etc}$$

Le lecteur voudra observer que la règle que je propose ne dépend point de la valeur de la partie trouvée a; par conséquent, elle servira très-utilement pour déterminer le *second chiffre* de la racine, lequel chiffre expose souvent à plusieurs essais infructueux.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'exprimer mon

(*) M. Briot.

regret de ne pas voir, dans les Traités d'Arithmétique qui ont paru récemment, la méthode abrégée de l'extraction de la racine cubique. N'est-il pas rebutant de faire le cube de toute la partie trouvée de la racine, chaque fois que l'on veut déterminer un chiffre? etc....

LIMITE

De l'erreur dans la substitution de la moyenne différentielle de deux nombres à leur moyenne proportionnelle;

PAR M. G.-J. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

Soient a et b deux nombres inégaux, d leur différence; on a identiquement

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a(a+d)} = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}d\right)^2 - \frac{1}{4}d^2},$$

d'où

$$\sqrt{ab} < \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}d\right)^2} = a + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(a+b);$$

donc *la moyenne proportionnelle entre deux nombres inégaux* a *et* b *est moindre que leur moyenne différentielle*.

Pour trouver une limite de leur différence, posons

$$e = a + \frac{1}{2}d - \sqrt{a(a+d)},$$

d'où

$$e + \sqrt{a(a+d)} = a + \frac{1}{2}d,$$

et, en élevant au carré, puis en réduisant,

$$e^2 + 2e\sqrt{a(a+d)} = \frac{1}{4}d^2;$$

on déduit de là

$$e < \frac{d^2}{8\sqrt{a(a+d)}} < \frac{d^2}{8\sqrt{a^2}} = \frac{d^2}{8a} = \frac{(b-a)^2}{8a};$$

donc *l'erreur e est moindre que le carré de la différence entre les nombres divisé par l'octuple du plus petit de ces nombres.*

SOLUTION DE L'EXERCICE NUMÉRIQUE PROPOSÉ

(voir t. IX, p. 368) (*) ;

PAR M. E. PROUHET.

Il s'agit de démontrer que les équations suivantes :

1° $5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0;$

2° $3447x^6 + 14560x^5 + 22430x^4 + 25857x^3 + 29193x^2 + 11596x + 5602 = 0,$

n'ont aucune racine réelle.

1. On a, pour toute valeur réelle de x,

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0.$$

Il en résulte, à fortiori,

$$x^4 - \frac{4951}{5797}x^3 + \frac{5892}{5797}x^2 - \frac{2876}{5797}x + \frac{6942}{5797} > 0.$$

Donc la transformée en $-x$ de la première équation, et, par suite, cette équation n'a que des racines imaginaires.

2. $f(x)$ étant le premier membre de la seconde équation, $f(-x)$ peut être mise sous l'une de ces deux

---

(*) Dans la *Connaissance des Temps* pour 1849, page 174, cette solution est donnée à l'aide du théorème de M. Sturm ; ce qui exige de pénibles et longs calculs.

formes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x^4(3447x^2 - 14560x + 15376) \\ + x^2(7054x^2 - 25857x + 23696) \\ + (5497x^2 - 11596x + 5602) = 0, \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} (5602 - 11596x + 6001x^2) \\ + (23192 - 25857x + 7208x^2)x^2 \\ + (15222 - 14560x + 3447x^2)x^4 = 0. \end{array}\right.$$

Dans l'équation (1), les racines des deux premiers trinômes sont imaginaires ; celles du troisième sont réelles et moindres que 1,5 : on en conclut que $f(-x)$ est positive pour toute valeur de x *supérieure* à 1,5.

Dans l'équation (2), les racines des deux premiers trinômes sont imaginaires ; celles du troisième sont réelles et plus grandes que 1,5 : il en résulte que $f(-x)$ est positive pour toute valeur de x *inférieure* à 1,5.

Ainsi $f(-x)$ conserve le même signe pour toute valeur réelle de x ; donc ce polynôme n'a que des racines imaginaires, et il en est de même de $f(x)$. C. Q. F. D.

JUSTIFICATION DES CALCULS INDIQUÉS.

Première forme de $f(-x)$.

Premier trinôme : $3447x^2 - 14560x + 15376$.

$$\left(\frac{14560}{2}\right)^2 = (7280)^2 = 52998400$$
$$3447 \cdot 15376 = 53001072$$

Deuxième trinôme : $7054x^2 - 25857 + 23696$.

$$25857^2 = 668584449$$
$$4 \cdot 7054 \cdot 23696 = 668606336$$

Troisième trinôme : $5497x^2 - 11596x + 5602$.

Ce trinôme a une seule racine entre 1 et $+\infty$; 1,5 substitué donne un résultat > 0.

Seconde forme de $f(-x)$:

Premier trinôme : $6001x^2 - 11596x + 5602$.

$$\left(\frac{11596}{2}\right)^2 = 5798^2 = 33616804$$

$$5602.6001 = 33617602$$

Deuxième trinôme : $23192 - 25857x + 7208x^2$.

$$25857^2 = 668584449$$

$$4.23192.7208 = 668671744$$

Troisième trinôme : $3447x^2 - 14560x + 15222$.

La somme des deux racines est plus grande que 4 ; ces racines sont donc plus grandes que 1.

$$3447.1,5 = 5170,5$$

$$5170,5 - 14560 = -9389,5$$

$$+9389,5 \times 1,5 = 14084,55 < 15222 \text{ (*)}$$

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES DANS UNE COURBE ALGÉBRIQUE ;

PAR M. ABEL TRANSON.

---

1. Si toute droite, menée par le point A d'une courbe, a en ce point deux ou plusieurs rencontres avec la courbe, c'est un point multiple.

Le nombre de ces rencontres marque le degré de multiplicité du point.

Cette *singularité* est généralement due à la circonstance de deux ou plusieurs branches de courbe passant par le point dont il s'agit. Si l'angle sous lequel deux de ces

---

(*) Le célèbre calculateur astronome a fait un emploi utile du théorème de Sturm; un académicien de même nom a retranché de l'enseignement ce théorème comme appartenant à la haute théorie, chose inutile; un représentant de même nom, dans la discussion sur les conducteurs-voyers, a déclaré la haute théorie chose indispensable. Ces trois noms désignent-ils la même personne? O. TERQUEM.

branches se coupent vient à s'annuler, alors *il peut y avoir rebroussement,* mais cela n'a pas lieu nécessairement. Ainsi la circonstance que deux des tangentes en un point multiple viennent à se confondre, est un des caractères du rebroussement, mais non pas un caractère exclusif.

Le point multiple peut aussi être isolé, on l'appelle alors *point conjugué ;* et, ici, il faut remarquer que, réciproquement, dans une courbe algébrique, tout point isolé est nécessairement multiple.

2. Le caractère commun de tous les points multiples, quel que soit leur degré de multiplicité, qu'ils présentent ou non un rebroussement, qu'ils soient ou non isolés ; c'est d'être à la fois sur les trois courbes représentées par

$$F = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dF}{dx} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dF}{dy} = 0; \tag{3}$$

où $F = 0$, équation du degré n, représente la courbe donnée. De là ce premier résultat, que leur nombre, ne pouvant dépasser celui des intersections de deux courbes du degré $n - 1$, a pour limite supérieure $(n - 1)^2$ (*).

L'objet de cette Note est de trouver une limite beaucoup moins élevée que $(n - 1)^2$ pour le nombre total des points multiples en général ; et ensuite de donner des limites spéciales pour les points multiples des différents degrés de multiplicité.

D'abord on peut s'assurer que les solutions communes aux deux courbes $\frac{dF}{dx} = 0$, et $\frac{dF}{dy} = 0$, ne sont pas toutes

(*) C'est par inadvertance que j'ai mis $n(n-1)^2$, *voir* t. IX, p. 289.
O. T.

sur la courbe $F = 0$, à moins que celle-ci ne présente un faisceau de n droites. Cela est évident pour le second degré, puisque l'ensemble des deux équations (2) et (3) y représente le centre de la courbe, et je le démontre en général comme il suit.

La courbe donnée par l'équation

$$(4) \qquad x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} = 0$$

contient manifestement tous les points communs à (2) et (3); or, mettons l'équation (1) de la courbe donnée sous la forme

$$F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \ldots = 0,$$

où les différents termes sont des fonctions homogènes; alors l'équation (4) deviendra

$$x\frac{dF_n}{dx} + y\frac{dF_n}{dy} + x\frac{dF_{n-1}}{dx} + y\frac{dF_{n-1}}{dy} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$nF_n + (n-1)F_{n-1} + (n-2)F_{n-2} + \ldots = 0:$$

donc tous les points communs aux équations (1), (2) et (3) satisfont à l'équation suivante, qui est du degré $(n-1)$,

$$(5) \qquad F_{n-1} + 2F_{n-2} + 3F_{n-3} - \ldots = 0;$$

et réciproquement tous les points communs aux équations (2), (3) et (5) sont sur la courbe proposée.

La question est réduite à savoir si toutes les solutions communes aux équations (2) et (3) peuvent appartenir à l'équation (5). Or, toute équation de degré $(n-1)$, et qui est satisfaite par toutes les solutions communes aux équations (2) et (3), est de la forme

$$\frac{dF}{dx} + \alpha\frac{dF}{dy} = 0,$$

sauf à déterminer convenablement la constante α. De sorte qu'on devrait pouvoir disposer de α de telle sorte que l'équation suivante fût une identité,

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \alpha \frac{d\mathrm{F}}{dy} = \mathrm{F}_{n-1} + 2\,\mathrm{F}_{n-2} + 3\,\mathrm{F}_{n-3} + \ldots$$

Mais en développant cette condition on arrive à connaître que l'équation primitive devrait se réduire à la suivante, $\mathrm{F}_n(x+1, y+\alpha) = 0$, et par conséquent représenter n droites passant par un point unique, desquelles droites plusieurs peuvent être imaginaires. Je suis donc déjà en droit de dire que le nombre des points multiples est toujours inférieur à $(n-1)^2$.

Je vais faire voir maintenant qu'il est inférieur toujours au nombre de points qui déterminent une courbe du $(n-2)^{ième}$ ordre, lequel est, comme on sait, $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$.

Supposons en effet qu'il soit supérieur ou simplement égal à ce nombre.

On pourrait donc par $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ points multiples de la courbe $\mathrm{F}=0$, faire passer *au moins* (*) une courbe du degré $n-2$. Or, chacun de ces points vaudrait *au moins* deux rencontres de la courbe auxiliaire avec la proposée. Ainsi le nombre total des rencontres serait au moins $(n-2)(n+1)$, au lieu qu'il est seulement $(n-2)n$; donc, etc.: mais on peut avoir une limite encore moindre en raisonnant comme il suit.

Soit x le nombre des points multiples, et soit pris sur la courbe le nombre de points nécessaires pour y faire passer une courbe du degré $n-2$; c'est-à-dire

(*) Je dis *au moins*, parce que la disposition de ces points en nombre $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ pourrait être telle qu'il y passât non pas une seule courbe du degré $n-2$, mais une infinité.

$\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ points, en y comprenant notamment tous les points multiples. Si ces points étaient simples, il en résulterait $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ rencontres *connues*, sans préjudice des autres rencontres en nombre $n(n-2)-\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. Mais puisque parmi les points choisis il y en a x multiples, c'est-à-dire *qui sont au moins doubles*, le nombre total des rencontres *connues* est d'*au moins* $\frac{(n-2)(n+1)}{2}+x$. On voit que dans ce raisonnement chaque point multiple est compté *pour un* seulement parmi les points déterminants de la courbe auxiliaire; et il est compté *au moins pour deux* parmi les rencontres.

Après cela, le nombre total des rencontres est tout au plus égal à $(n-2)n$; ce qui donne la condition

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2}+x \leqq n(n-2),$$

d'où l'on tire

$$x \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Si les inégalités que nous avons supposées avaient lieu en sens contraire, c'est que l'équation $F=0$ représenterait la réunion de deux courbes au moins de degré inférieur. Pour ce cas-là et pour tous ceux où $F=0$ se décomposerait en facteurs rationnels, il est clair que les raisonnements ne vaudraient plus; mais aussi on n'aurait pas véritablement une courbe du degré n. Par cette réflexion, j'échappe à la difficulté qu'aurait présentée le nombre des *points doubles* d'un système de n droites, lequel est $\frac{n(n-1)}{2}$, et ainsi surpasse la limite ci-dessus.

La limite qu'on vient de trouver est celle du nombre total des points multiples; c'est, en particulier, celle des *points doubles* qui, manifestement, comprennent tous les autres. On pourrait chercher aussi la limite des *points triples* parmi lesquels figureraient tous ceux dont le degré de multiplicité est supérieur à trois. Mais, pour abréger, je me borne à dire que le nombre des points dont la multiplicité est μ ou supérieure à μ, ne peut pas surpasser le nombre donné par la formule

$$\frac{(n-\mu)[2n(\mu-1)-\mu]}{\mu^2(\mu-1)}.$$

En effet, le nombre des points du degré de multiplicité μ ne saurait atteindre celui des points qui déterminent une courbe du degré $\frac{2n}{\mu}-2$ $\Big($si cette formule $\frac{2n}{\mu}-2$ donne un nombre fractionnaire, entendez alors que le nombre des points en question ne peut pas *atteindre* celui des points déterminant la courbe dont le degré surpasse immédiatement $\frac{2n}{\mu}-2\Big)$: cela résulte de la relation

$$\mu.\frac{\left(\frac{2n}{\mu}-2\right)\left(\frac{2n}{\mu}+1\right)}{2}>\left(\frac{2n}{\mu}-2\right)n,$$

où le premier membre représente le nombre des rencontres nécessaires que la proposée aurait avec une courbe de degré $\frac{2n}{\mu}-2$ passant par des points de multiplicité μ, en nombre

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu}-2\right)\left(\frac{2n}{\mu}+1\right)}{2}.$$

On est donc assuré de pouvoir placer tous les points en question sur une courbe de degré $\frac{2n}{\mu} - 2$. Chacun de ces points entrera pour une simple unité dans le nombre des points déterminants de la courbe auxiliaire, mais il déterminera μ rencontres; de sorte qu'en appelant y le nombre des points multiples de degré μ, on a la relation

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2} + (\mu - 1)y \leqq \left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)n,$$

d'où l'on tirera pour y la formule ci-dessus indiquée,

$$\text{(A)} \qquad y \overset{=}{<} \frac{(n-\mu)[2n(\mu-1)-\mu]}{(\mu-1)\mu^2}.$$

3. On peut se proposer une autre recherche : celle du nombre des points multiples de degré μ, pour lesquels les μ branches de courbe se touchent, c'est-à-dire ont une tangente unique sans qu'il y ait d'ailleurs rebroussement. Cela exige un nouvel artifice. Je prends en chacun de ces points la tangente commune pour tangente de la courbe auxiliaire; de sorte que chaque tel point en vaudra deux par rapport à la détermination de la courbe auxiliaire, et en vaudra 2μ pour les rencontres.

Avec cette construction, on prouvera aisément que le nombre des points en question ne peut pas atteindre celui des points nécessaires à la détermination d'une courbe du degré $\frac{n}{\mu} - 2$, c'est-à-dire n'atteint pas à

$$\frac{\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{n}{\mu} + 1\right)}{2};$$

autrement, il serait possible de construire une courbe de ce degré $\frac{n}{\mu} - 2$, ayant, avec la proposée, un nombre de rencontres égal à

$$2\mu . \frac{\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{n}{\mu} + 1\right)}{2},$$

c'est-à-dire égal à $\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)(n + \mu)$, ce qui est absurde.

Partant de là et appelant z le nombre des points dont il s'agit, on aura aisément l'inégalité

$$\frac{\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{n}{\mu} + 1\right)}{2} + 2(\mu - 1)z < \left(\frac{n}{\mu} - 2\right)n,$$

d'où

$$\text{(B)} \qquad z \overset{=}{<} \frac{(n - 2\mu)[n(2\mu - 1) - \mu]}{4\mu^2(\mu - 1)}.$$

4. En dernier lieu, on peut demander le nombre maximum des points dont le degré de multiplicité est μ, et où μ' branches ont une même tangente. Je supprime le calcul, mais il sera aisé au lecteur de trouver que si ν est le nombre de ces points, on a

$$\text{(C)} \quad \nu \overset{=}{<} \frac{(n - \mu - \mu')}{(\mu + \mu')^2(\mu + \mu' - 2)}[2n(\mu + \mu' - 1) - \mu - \mu'].$$

Si l'on suppose $\mu' = \mu$, on retombe sur la formule (B), comme cela doit être. Mais cette formule (C) ne donne pas la formule (A) par la substitution de $\mu' = 0$; elle est alors en défaut, et cela s'explique parce qu'elle est construite comme la formule (B) en imaginant que la courbe auxiliaire touche dans ses points déterminants les branches qui ont la même tangente; ce qui n'a plus de sens si l'on suppose ensuite qu'aucunes branches ne se touchent.

5. Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750), a traité la question du *nombre des points multiples qu'une courbe d'un ordre quelconque peut avoir*. L'auteur, après avoir observé

qu'une courbe de l'ordre m ne peut avoir un point multiple de ce même ordre sans se réduire à ce point unique, ou à un faisceau de m droites, établit, par la simple propriété du nombre des rencontres de la proposée avec une ligne droite, puis avec une courbe du deuxième ordre ou du troisième ordre, etc., qu'une courbe de l'ordre m ne peut pas avoir :

Deux points dont les degrés de multiplicité comptés ensemble fassent plus de m;

Cinq points dont les degrés de multiplicité comptés ensemble fassent plus de $2m$;

Neuf points dont les degrés de multiplicité comptés ensemble fassent plus de $3m$;

Etc....

D'après cela, l'auteur forme pour les huit premiers ordres lé tableau complet des diverses sortes de points multiples qui peuvent coexister sur une même courbe, toutefois sans avoir égard à la circonstance que deux ou plusieurs branches peuvent se toucher au point multiple. On pourrait réduire sa théorie en un algorithme très-simple où les nombres de points multiples de chaque sorte coexistant dans une même courbe, entreraient comme des indéterminées dans une équation du premier degré, dont il suffirait de chercher les solutions en nombres entiers et positifs; et alors les formules que nous avons données se présenteraient comme répondant aux cas très-particuliers où il n'y aurait à la fois qu'une sorte unique de points multiples.

Nous donnerons bientôt la démonstration que vient de publier l'illustre M. Jacobi, que toute ligne plane de degré n a $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles. (CRELLE, tome XL, page 237; 1850.)

O. TERQUEM.

GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE. SUR LES POLYGONES.

1. Soit une courbe F jouissant de ces deux propriétés : 1° deux de ces courbes, en se coupant, forment quatre angles; les angles opposés au sommet sont égaux, et les angles adjacents sont supplémentaires; α étant l'un de ces angles, supposons que l'on ait

$$\varphi(\alpha)=\varphi(2q-\alpha),$$

φ désignant une fonction qui a la propriété énoncée par l'équation ; il existe une infinité de ces fonctions ; la plus connue est

$$\varphi(\alpha)=\sin\alpha ;$$

2° dans un triangle ABC formé par trois de ces courbes F, supposons que l'on ait toujours

$$\frac{\psi(a)}{\varphi(A)}=\frac{\psi(b)}{\varphi(B)}=\frac{\psi(c)}{\varphi(C)};$$

A, B, C désignent les angles ; a, b, c les longueurs des côtés opposés, et φ une fonction douée de la propriété écrite dans l'équation. Pour de telles courbes, on a le théorème suivant.

THÉORÈME. *Un polygone formé par des courbes* F *étant coupé par une transversale* F, *le produit des fonctions* ψ *des segments d'indices pairs est égal au produit des fonctions* ψ *des segments d'indices impairs.*

Les cas les plus simples sont ceux où l'on a

$$\varphi(\alpha)=\sin\alpha \quad \text{et} \quad \psi(a)=a,$$

ou bien

$$\psi(a)=\sin a,$$

et dont nous avons donné la démonstration la plus simple possible (tome VII, page 459), et ce même moyen de démonstration s'applique mot à mot au cas général, qui existe peut-être pour des lignes géodésiques autres que la droite et le cercle.

2. Le théorème segmentaire de la transversale subsiste aussi pour des polygones plans non convexes et pour les polygones étoilés; de même pour les polygones sphériques: observation essentielle qu'il ne faut pas omettre.

3. Théorème. *Un polygone gauche étant coupé par un plan, le produit des segments d'indices pairs est égal au produit des segments d'indices impairs.*

Démonstration. Menons un plan perpendiculaire au plan transversal, et projetons le polygone gauche sur ce plan. L'intersection des deux plans est une transversale dans le polygone en projection; les segments en projection étant proportionnels aux segments projetés, on peut substituer les uns aux autres, et l'on obtient la propriété énoncée (*).

4. Théorème de M. Poncelet. *Si, par un point pris à volonté dans le plan d'un polygone quelconque d'un nombre impair de côtés, on mène à chaque sommet une droite prolongée jusqu'au côté opposé, le produit de tous les segments d'indices pairs est égal au produit des segments d'indices impairs.*

Solution. Soient $2n+1$ le nombre de côtés; les droites menées aux angles forment un faisceau plan de $2n+1$ rayons; et en prolongeant chacun de ces *rayons* jusqu'aux côtés respectivement opposés, on partage le polygone en $4n+2$ triangles; aux segments, on peut substituer les aires des triangles, et à celles-ci les *sinus* des angles formés

(*) Voyez *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, par Lafremoire; seconde édition, page 224.

par deux rayons adjacents, et les mêmes sinus se trouvant dans deux produits segmentaires, ces produits sont égaux.

Observation. Le théorème subsiste pour les polygones non convexes ou étoilés, et aussi pour les polygones sphériques, en substituant aux segments les sinus des segments.

Lorsque le nombre des côtés est pair, on mène par un sommet quelconque une droite qu'on suppose être la direction d'un côté devenu *nul* en ce point, et le théorème s'applique aussi pour ce cas.

Observation. Ce théorème a été énoncé la première fois, en 1822, pour les polygones, dans le *Traité des figures projectives,* page 85. C'est Jean Bernoulli qui, le premier, a donné cette proposition pour le triangle; voici son énoncé :

Si per quodvis punctum in triangulo quovis rectilineo ex singulis angulis ducantur rectæ ad latera opposita; erunt solida ex tribus laterum segmentis, non contiguis, facta inter se æqualia. (*Op. omnia,* tome IV, n° 145, page 33; 1742.)

Le théorème de M. Poncelet est une belle généralisation du théorème de Bernoulli.

5. Théorème. *Étant donné un polygone gauche d'un nombre impair de côtés, si, par une droite fixe et par chaque sommet du polygone, on mène un plan qui coupe le côté respectivement opposé en deux segments, le produit des segments d'indice pair est égal au produit des segments d'indice impair.*

Démonstration. En projetant le polygone sur un plan perpendiculaire à la droite fixe, on est ramené au théorème de M. Poncelet, car les projections des segments d'un même côté sont proportionnelles à ces segments.

Observation. On compte les segments en partant d'un sommet quelconque, et parcourant le périmètre dans le même sens, les segments ayant des indices de même parité n'ont jamais de points en commun.

6. Un faisceau plan étant coupé par une transversale, si l'on forme un rapport *projectif* avec ces segments, on peut substituer aux segments les sinus des angles formés par les rayons du faisceau; considérant le sommet du faisceau comme le centre d'une sphère, la transversale se projette sur la sphère suivant un arc de grand cercle, et les rayons du faisceau divisent cet arc en segments circulaires dont les sinus fournissent le même rapport projectif que celui qui existe entre les segments rectilignes. C'est un moyen général de transporter aux polygones sphériques les propriétés projectives segmentaires des polygones rectilignes.

7. Le théorème de M. Rouart (*voir* tome IX, page 400) subsiste aussi pour les polygones sphériques circonscrits à un même petit cercle. Imaginons un cône concentrique à la sphère ayant pour base les deux polygones. Coupant ce cône par un plan, on obtient deux polygones rectilignes circonscrits à un cercle; appliquant à ces polygones le théorème de M. Rouart, on peut remplacer chaque segment par le sinus de l'angle que forment les deux rayons qui vont aux extrémités du segment. Ce même théorème subsiste-t-il pour des polygones sphériques quelconques?

MÉTHODE CHEZY.

Tous nos ouvrages classiques, tous les professeurs, enseignent aujourd'hui à discuter les courbes du second degré, en résolvant l'équation par rapport à une des coordonnées; la quantité qui est hors du radical détermine un diamètre, et le coefficient du carré de la seconde coordonnée qui se trouve sous le radical caractérise l'espèce de la courbe; mais aucun ouvrage, à ce que je sache, ne nous apprend que cette méthode ne remonte qu'à 1791, et qu'on la doit à un homme de grand mérite, moral et intellectuel, nommé Chezy, sur lequel on trouvera plus loin quelques détails. La méthode a été développée et publiée par le célèbre Prony (*), élève de Chezy, dans un Mémoire épuisé depuis longtemps, et dont voici le titre : *Exposition d'une méthode pour construire les équations indéterminées qui se rapportent aux sections coniques*, à l'usage de l'École des Ponts et Chaussées; par M. de Prony, ingénieur des Ponts et Chaussées. A Paris, de l'imprimerie de Pierre Didot l'aîné; MDCCXCI. In-4° de 26 pages, 2 planches.

L'auteur commence par montrer comment on peut ranger, sous une forme de triangle, tous les termes d'une équation complète à deux inconnues de degré n : c'est le parallélogramme de Newton, réduit en triangle par de Gua; comme, dans le reste du Mémoire, on ne fait aucun usage de ce triangle, on ne voit pas bien le but de cette disposition. On donne à l'équation hexanôme la forme

$$y^2 + ax^2 + bxy + cy + fx + g = 0.$$

La discussion est extrêmement détaillée, très-claire, et roule sur l'expression $\frac{1}{4}b^2 - a$ qu'on appelle ici la *différence caractéristique*; c'est le $B^2 - 4AC = m$ des temps actuels. On peut reprocher à cette discussion, 1° de n'avoir pas donné de coefficient à y^2; 2° de s'attacher uniquement à la *différence caractéristique* qui n'est que le *détermi-*

(*) Mort le 29 juillet 1839; son éloge, comme Membre de l'Académie, est encore à faire en 1851.

nant des trois premiers termes et d'avoir négligé le *déterminant* L des six termes, et dont l'importance est plus grande que celle de *m*; 3° de n'avoir pas cherché les *lignes limites* des coniques, lorsque cinq coefficients restant constants, le sixième varie de $-\infty$ à $+\infty$: c'est le seul moyen, dans la discussion générale, de trouver le cas où l'ellipse se réduit à une droite finie et l'hyperbole à une droite infinie, mais ayant une solution de continuité dans son cours. Du reste, soixante années se sont écoulées, et les deux derniers reproches peuvent encore s'adresser à nos meilleurs Traités de Géométrie analytique. En toute chose, le bien vient *pede claudo*.

Note biographique.

Chezy (Antoine) est né à Châlons-sur-Marne en 1718; il fit ses études au séminaire, et entra dans la savante congrégation de l'Oratoire. Ses goûts ayant pris une autre direction, il quitta cette compagnie et fut admis, en 1748, à l'École des Ponts et Chaussées, alors sous la direction du célèbre Perronet. Il fut nommé ingénieur en 1761, et ingénieur en chef en 1763. En cette qualité, il a dirigé les travaux du pont de Neuilly et du pont de Mantes. Il a composé un Mémoire *sur les instruments propres à niveler nommés niveaux*, qui est inséré dans le tome V des *Savants étrangers*, page 254, 1768, et a inventé le clisimètre, niveau de pente qui porte encore son nom; on en trouve une bonne description au livre V^e^ de l'ouvrage de M. Breton (de Champ) (*voir* tome IX, page 392). Mis à la retraite et payé en papier-monnaie, déprécié, il fut réduit à un tel état de détresse, qu'en 1795, il fut obligé, pour subsister, de vendre le crin de ses matelas. Son élève, Prony, le fit entrer dans ses bureaux, et obtint pour lui la place de directeur de l'École des Ponts et Chaussées qu'il ne remplit qu'une année. Il est mort le 4 octobre 1798, sans laisser aucune fortune. Son fils, le célèbre orientaliste et sanscritiste Chezy (Antoine), le traducteur de *Sacontala,* du *Ramayana,* etc., eut à lutter pour faire subsister sa mère; et une injustice criante du ministre de l'Instruction publique Corbières a hâté la fin de l'illustre collègue des de Sacy, Rémusat, etc. Funeste résultat des passions politiques. Que n'essaye-t-on, en toute chose, d'être *sincère* et juste? c'est peut-être la meilleure politique. Celle qui est en usage réussit si peu, même aux plus habiles, qu'on ne risque pas beaucoup en en choisissant une autre.

SOLUTION D'UN PROBLEME APPARTENANT A LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION, PAR EULER;

Traduit du latin, par M. E. COUPY,
Professeur au collége militaire de la Flèche.

Le problème dont je hasarde ici la traduction est inséré dans les Commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, tome VIII, page 128, année 1736. *M. Poinsot* (*), *dans son célèbre Mémoire de* 1810 *sur les Polygones et les Polyèdres étoilés, et Lhuillier, de Genève, dans son Algèbre, l'ont mentionné tous deux. Ce problème intéressant, d'une solution fort ingénieuse, n'a été traduit, que je sache, dans aucun recueil français, et se trouve enfoui maintenant dans une volumineuse collection à la portée seulement des personnes qui habitent la capitale. J'ai pensé qu'on lirait, au moins avec curiosité, ce problème; c'est ce qui m'a décidé à publier cette traduction que j'ai faite, il y a quelques années, à Paris.*

(*) *Voir* tome VIII, page 132.

1. Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complétement inconnue, dont Leibnitz a fait le premier mention et qu'il appela *géométrie de position.* D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position; dans ce travail, il n'est besoin, ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer; mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendait, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.

2. Or ce problème, qu'on me disait être assez connu, était le suivant :

A Kœnigsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le *Kneiphof,* entourée d'un fleuve qui se partage en 2 bras, comme on peut le voir sur la figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de 7 ponts a, b, c, d, e, f, g, et l'on proposait cette question sur ces ponts : Une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement? Les uns affirmaient que cela était possible; d'autres niaient; d'autres en doutaient; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général :

Quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre des ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.

3. Pour ce qui regarde les 7 ponts de Kœnigsberg, on pourrait résoudre le problème en faisant l'énumération complète de toutes les manières de passer qui peuvent avoir lieu, car on verrait par là quelle est celle qui satisfait, ou bien on reconnaîtrait qu'il n'y en a aucune. Mais ce mode de solution, à cause du si grand nombre de combinaisons, serait trop difficile et trop laborieux, et ne pourrait même plus s'appliquer dans les autres questions où il y aurait beaucoup plus de ponts. Au reste, si par ce moyen l'opération était conduite jusqu'au bout, on trouverait beaucoup de manières de passer qui ne satisfont pas à la question, et c'est en cela sans doute que consiste la cause d'une si grande difficulté. Ayant donc laissé de côté cette méthode, j'en ai cherché une autre qui me donne non pas toutes les manières de passer, mais me montre seulement celle qui satisfait à la question; et je regarde une pareille méthode comme de beaucoup plus simple que la précédente.

4. Toute ma méthode se fonde sur une manière particulière de représenter chaque passage de pont, dans laquelle j'emploie les lettres majuscules A, B, C, D, qui sont écrites à chaque région que sépare le fleuve. Ainsi, si quelqu'un va de la région A à la région B, en passant sur le pont *a* ou sur le pont *b*, je désigne ce passage par les lettres AB. La première marque la région d'où sort le voyageur; la seconde, la région dans laquelle il est parvenu après avoir passé le pont. Si ensuite le voyageur s'en va dans la région D par le pont *f*, ce passage sera représenté

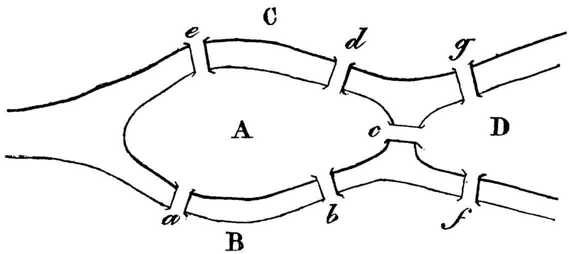
par les lettres BD, et je représente ces 2 passages successifs AB et BD seulement par 3 lettres ABD, celle du milieu B représentant, tant la région où il est parvenu par un premier passage que celle d'où il est sorti pour un second passage.

5. Par un moyen semblable, si le voyageur s'avance de la région D dans la région C par le pont *g*, je représenterai ces 3 passages faits successivement par 4 lettres ABDC, car on comprendra par ces 4 lettres ABDC, que le voyageur étant d'abord dans la région A, a passé dans la région B, de là s'est avancé dans la région D, et enfin, de là a passé dans la région C; et puisque ces régions sont séparées mutuellement par l'eau les unes des autres, il est nécessaire que le voyageur ait passé sur 3 ponts. De même, les passages faits successivement sur 4 ponts seront représentés par 5 lettres, et si le voyageur continue sa marche autant qu'il y a de ponts, son voyage sera représenté par un nombre de lettres supérieur d'une unité au nombre de ponts. C'est pourquoi il faut 8 lettres pour représenter les passages sur 7 ponts.

6. Dans ce mode de notation, je ne considère point par quels ponts le passage se fait; mais si le même passage d'une région à une autre peut se faire par plusieurs ponts, peu importe par quel pont on passe d'abord pour arriver dans la région désignée. On comprend, d'après cela, que si le voyageur peut continuer sa course sur les 7 ponts de la figure 1, de manière à passer une fois sur chacun d'eux, et jamais deux fois sur aucun, cette course pourra se représenter par 8 lettres, et ces lettres devront être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B se présente deux fois puisqu'il y a 2 ponts *a* et *b* qui joignent ces régions A, B : de même, la succession des lettres A et C devra aussi se trouver deux fois dans cette série de 8 lettres et pour la même raison, en-

suite la succession des lettres A et D devra s'y trouver une seule fois, et, enfin, il faudra semblablement que la succession des lettres B et D, et celle des lettres C et D s'y trouvent chacune une fois.

Fig. 1.



7. La question est donc ramenée à former avec 4 lettres A, B, C, D, une série de 8 lettres dans laquelle toutes ces successions se présentent autant de fois qu'il vient d'être trouvé. Mais avant de chercher une telle disposition, il convient de faire voir si ces lettres peuvent ou non être disposées d'une telle manière. Car si l'on pouvait démontrer qu'une telle disposition des 4 lettres A, B, C, D est tout à fait impossible, tout travail qui aurait pour but de la chercher, serait évidemment inutile. C'est pourquoi j'ai inventé une règle par le secours de laquelle, tant pour cette question que pour toutes celles du même genre, il est facile de discerner si un tel arrangement des lettres peut ou non avoir lieu.

8. Pour trouver cette règle, je considère une région unique A (*fig.* 2) à laquelle conduisent autant de ponts qu'on veut, a, b, c, d,...; je prends d'abord un seul de ces ponts qui conduisent à la région A, par exemple a. Si maintenant le voyageur passe sur ce pont, ou bien il devra être avant le passage dans la région A, ou bien il parviendra après le passage dans cette région A; c'est pour-

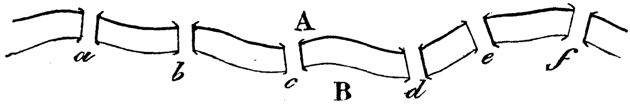
quoi, dans la manière établie ci-dessus de représenter les passages, il faut que la lettre A se trouve une fois. Si vous supposez 3 ponts *a*, *b*, *c* conduisant dans la région A, et que le voyageur ait traversé ces 3 ponts, alors dans la représentation de ce voyage la lettre A se trouvera deux fois, soit que ce voyage ait commencé en partant de A, soit qu'il ait commencé en y allant. De même, si 5 ponts conduisent en A, dans la représentation du passage sur tous ces ponts, la lettre A devra se trouver trois fois; et, en général, si le nombre des ponts est un nombre impair quelconque, en augmentant ce nombre de 1, et prenant la moitié, on aura le nombre de fois que la lettre A doit se trouver dans la représentation du passage.

9. Dans ce cas donc des ponts de Kœnigsberg (*fig.* 1), puisque 5 ponts *a*, *b*, *c*, *d*, *e* conduisent dans l'île A, il est nécessaire que dans la représentation du passage sur ces ponts la lettre A se trouve trois fois. Ensuite la lettre B, puisque 3 ponts conduisent dans la région B, devra se trouver deux fois; de même la lettre D ainsi que la lettre C, devra se trouver deux fois et pour la même raison. Donc, dans la série des 8 lettres représentant le passage sur les 7 ponts, la lettre A devrait se trouver trois fois, et les lettres B, C, D, chacune deux fois, ce qui, dans une série de 8 lettres, est complétement impossible. Il suit clairement de là que sur les 7 ponts de Kœnigsberg, le passage demandé est impossible.

10. Par un procédé semblable, on peut dans tout autre cas, pourvu toutefois que le nombre de ponts qui conduisent dans chaque région soit impair, on peut reconnaître si le passage une seule fois sur chaque pont est possible. Car s'il arrive que la somme de toutes les fois que chaque lettre doit se trouver, soit égale au nombre de tous les ponts augmenté de 1, alors le passage demandé sera possible. Mais si, au contraire, il arrive, comme dans notre

exemple, que cette somme soit plus grande que le nombre total des ponts augmenté de 1, alors le passage demandé ne pourra s'effectuer d'aucune manière. Mais la règle que j'ai donnée pour déduire du nombre de ponts conduisant dans la région A le nombre de fois que la lettre A doit s'écrire, s'applique également, soit que tous les ponts conduisent d'une seule région B comme le représente la figure 2, en A, soit qu'ils conduisent de plusieurs, car je considère seulement la région A et je recherche combien de fois la lettre A doit se trouver.

Fig. 2.



11. Mais si le nombre des ponts qui conduisent dans la région A est pair, alors il faudra distinguer, pour le passage sur chaque pont, si le voyageur a commencé ou non sa course en partant de la région A. En effet, si 2 ponts conduisent en A et que le voyageur ait commencé sa course en partant de A, alors la lettre A devra se trouver deux fois; une fois elle représentera la sortie de A par l'un des ponts et encore une fois, pour représenter le retour en A par l'autre point. Mais si, au contraire, le voyageur avait commencé sa course en partant de l'autre région, alors la lettre A ne se présentera plus qu'une fois; car écrite une fois, elle représentera, d'après ma manière de représenter ces courses, tant l'arrivée en A que la sortie de cette même région.

12. Que 4 ponts conduisent dans la région A et que le voyageur commence sa course en partant de A; alors, dans la représentation de sa marche complète, la lettre A devra se trouver trois fois, pourvu toutefois qu'il n'ait passé qu'une seule fois sur chaque pont. Mais s'il a commencé à marcher en partant de l'autre région, la lettre A se trouvera seulement deux fois. S'il y a 6 ponts qui conduisent dans la région A, alors la lettre A se trouvera quatre fois, si le voyageur a commencé par partir de A, sinon elle ne se trouvera que trois fois, et généralement si le nombre des ponts est pair, la moitié donne le nombre de fois que la lettre A doit se trouver si l'on n'a pas commencé à partir de A; et cette moitié, augmentée de 1, sera le nombre de fois que A devra s'écrire, en commençant la course de la région A elle-même.

13. Voici de quelle manière je déduis du nombre de ponts qui conduisent à une région, le nombre de fois que cette région, présentée par une lettre, devra s'écrire dans la course désirée. Je prends la moitié du nombre des ponts augmenté de 1, si ce nombre de ponts est impair, et la moitié de ce même nombre s'il est pair. Ensuite, si le nombre de fois que toutes les lettres doivent s'écrire est égal au nombre des ponts augmenté de 1, alors le passage désiré a lieu, mais on doit commencer à marcher d'une région à laquelle conduisent un nombre impair de ponts; mais si ce nombre de fois est inférieur de 1 au nombre des ponts augmenté de 1, alors le passage a lieu en commençant par une région à laquelle conduise un nombre pair de ponts, parce que par ce moyen le nombre des fois qu'on doit écrire les lettres est augmenté de 1.

14. Étant donc proposée une rivière quelconque, garnie de ponts comme on voudra, pour trouver si une personne peut passer sur chaque pont une fois seulement, j'établis l'opération de la manière suivante : 1° je représente chacune des régions séparées mutuellement les unes des autres par l'eau, respectivement par A, B, C, D,...; 2° je prends le nombre total des ponts que j'augmente de 1, et je note ce nombre pour l'opération

suivante; 3° à côté de chacune des lettres A, B, C,..., écrites l'une au-dessous de l'autre, j'écris le nombre de ponts conduisant à la région marquée par la lettre que je considère; 4° je marque d'un astérisque les lettres qui ont un nombre pair écrit à côté d'elles; 5° j'écris les moitiés de tous ces nombres pairs et les moitiés des nombres impairs, augmentés de 1, dans une même colonne, chacune de ces moitiés dans la même ligne horizontale que la lettre d'où elle dépend; 6° je fais la somme des nombres écrits en dernier lieu. Si cette somme est inférieure de 1, ou égale au nombre trouvé dans le 2°, qui est le nombre total des ponts augmenté de 1, j'en conclurai que le passage cherché est possible. Mais pour que cela soit possible, quand la somme trouvée est inférieure de 1 au nombre écrit en haut de sa feuille, on doit partir d'une région marquée d'un astérisque; mais, au contraire, on devra partir d'une région non astérisquée, quand la somme sera égale au nombre précité. Ainsi, par exemple, pour le cas des ponts de Kœnigsberg, j'établis l'opération comme il suit :

Nombre des ponts 7; j'ai donc 8.

	Ponts.	
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		9

Et comme la somme 9 de la seconde colonne est >8, le passage demandé est impossible.

15. Soient 2 îles A et B entourées d'eau, avec lesquelles communiquent 4 fleuves, comme le représente la figure 3; 15 ponts sont jetés sur ces fleuves, et l'on demande si une personne peut s'arranger de manière à passer une

fois et une seule fois sur chacun de ces ponts. Je désigne d'abord 1° toutes les régions séparées mutuellement par l'eau, par les lettres A, B, C, D, E, F : j'ai donc de la sorte 6 régions; ensuite 2° j'augmente de 1 le nombre total des ponts, et j'écris le nombre 16.

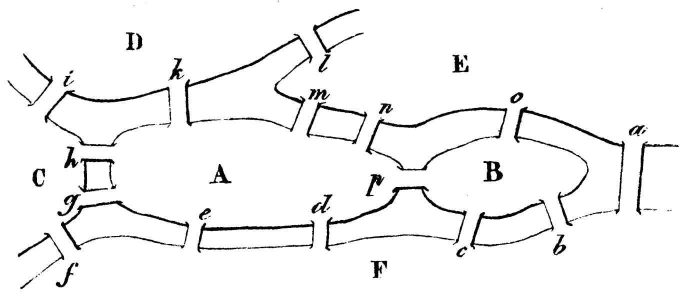
A_*	8	4
B_*	4	2
C_*	4	2
D	3	2
E	5	3
F_*	6	3
		16

3° j'écris les lettres A, B, C,..., les unes au-dessous des autres, et à côté de chaque lettre le nombre de ponts conduisant à la région que marque la lettre. Ainsi 8 ponts conduisant à A, 4 à B, etc.; 4° je marque d'un astérisque les lettres à côté desquelles se trouve un nombre pair; 5° j'écris dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, j'augmente de 1 les nombres impairs, et j'écris de même les moitiés de ces nombres impairs ainsi augmentés de 1; 6° j'additionne les nombres de cette troisième colonne, et j'ai une somme 16 égale au nombre 16 écrit en haut : il en résulte que le passage peut être fait de la manière voulue, en partant soit de la région D, soit de la région E, car ces lettres ne sont pas marquées d'une étoile; la course pourra se faire de la manière suivante :

E *a* F *b* B *c* F *d* A *e* F *f* C *g* A *h* C *i* D *k* A *m* E *n* A *p* B *o* E *l* D,

notation dans laquelle j'ai placé entre les lettres majuscules les ponts sur lesquels le passage a lieu.

Fig. 3.



16. Il sera donc très-facile par ce procédé de reconnaître dans chaque cas proposé, si le passage unique sur tous les ponts peut ou non s'effectuer. Cependant je donnerai encore un moyen beaucoup plus facile de reconnaître cela, lequel se déduira sans difficulté de ce qui précède, après que j'aurai exposé quelques observations que voici. Je remarque d'abord que la somme des nombres de ponts écrits à côté de chaque lettre A, B, C, D,..., est double du nombre total des ponts; la raison en est que dans le calcul qui donne tous les ponts conduisant à une région donnée, un pont quelconque est compté deux fois, c'est-à-dire que chaque pont est rapporté à l'une et l'autre des deux régions qu'il joint.

17. Il suit de cette observation que le nombre total des ponts qui conduisent dans chaque région est toujours un nombre pair, puisque la moitié de cette somme est égale au nombre des ponts. Il ne peut donc pas se faire que parmi les nombres de ponts conduisant à une région quelconque, il n'y en ait qu'un seul d'impair, ou trois, ou cinq, etc. C'est pourquoi, si des nombres de ponts adjoints aux lettres A, B, C,..., sont impairs, il est nécessaire que le nombre de ces nombres impairs soit pair. Ainsi, dans l'exemple de Kœnigsberg, les nombres impairs adjoints

aux lettres des régions A, B, C, D,..., étaient au nombre de quatre (*voyez* n° 14), et dans l'exemple précédent du n° 15, il y a seulement deux nombres impairs, adjoints aux lettres D et E.

18. Puisque la somme de tous les nombres adjoints aux lettres A, B, C,..., égale le double du nombre des ponts, il est manifeste qu'en augmentant cette somme de 2 et en en prenant la moitié, on aura le nombre établi au commencement de l'opération. Si donc tous les nombres adjoints aux lettres A, B, C,..., sont pairs, et qu'on prenne la moitié de chacun d'eux pour former les nombres de la troisième colonne, la somme de ces nombres sera inférieure de 1 au nombre que nous savons. C'est pourquoi, dans ces cas, le passage sur tous les ponts pourra toujours s'effectuer; car, en quelque région que la course commence, on sera conduit en cette région par un nombre pair de ponts, ainsi qu'il est requis. Par exemple, dans le problème de Kœnigsberg, on peut s'arranger de manière à passer deux fois sur tous les ponts, car ce serait comme si chaque pont eût été divisé en deux, et alors le nombre des ponts conduisant dans une région quelconque sera pair.

19. Maintenant, si l'on suppose qu'il y a seulement deux nombres impairs adjoints aux lettres A, B, C,..., (on sait qu'il ne peut pas y en avoir un seul), et que tout le reste soit pair, alors la course demandée est possible, pourvu que l'on parte d'une des régions à laquelle conduit un nombre impair de ponts. Car, si, selon la règle, on prend la moitié des nombres pairs, et la moitié des nombres impairs augmentés de 1, la somme de toutes ces moitiés sera supérieure de 1 au nombre de ponts, et par conséquent égale au nombre précité lui-même, et l'on voit par là que s'il y a ou quatre, ou six, ou huit,..., nombres impairs dans la deuxième colonne, alors la somme des

nombres de la troisième sera plus grande que le nombre précité, et le surpassera ou de 1, ou de 2, ou de 3,..., unités, et que, par conséquent, le passage demandé sera impossible.

20. Quel que soit donc le cas proposé, on pourra très-facilement reconnaître sur-le-champ, au moyen de la règle suivante, si le passage une seule fois sur tous les ponts est ou non possible.

S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra. Cette règle satisfait donc pleinement au problème proposé.

21. Mais, quand on aura reconnu que la question est possible, il restera encore à trouver comment la marche doit être dirigée. Je me sers pour cela de la règle suivante : qu'on néglige par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, 2 ponts conduisant d'une région à une autre; par cette abstraction, le nombre des ponts se trouvera généralement de beaucoup réduit; qu'on cherche alors, ce qui sera facile, la course demandée pour les ponts qui restent, et cela trouvé, les ponts enlevés par la pensée ne troubleront pas beaucoup le résultat obtenu, comme il est aisé de le voir avec un peu de réflexion; et je crois inutile d'insister davantage pour trouver la marche qu'on devra suivre pour répondre à la question proposée.

Note du traducteur. Une application intéressante du problème d'Euler peut être faite à Paris, sur les ponts nombreux qui garnissent la Seine, depuis le pont d'Iéna jusqu'au pont d'Austerlitz, et joignent les îles de la Cité et Saint-Louis. En jetant les regards sur un plan de Paris, en appelant D la rive droite, G la rive gauche, A et B les îles de la Cité et Saint-Louis, on reconnaît que 11 ponts conduisent en A, 8 en B, 14 en G, 15 en D; donc le problème est possible, d'après la règle du n° 20, pourvu qu'on parte de la Cité ou de la rive droite, et il est très-facile de trouver effectivement la marche à suivre. Il est clair que dans ce problème, le pont *Neuf* et celui de la *Réforme* doivent compter chacun pour deux; car l'un mène de D en A et de A en G, et l'autre mène de D en B et de B en A.

Un autre problème célèbre de situation est celui du *cavalier aux échecs,* donné aussi par Euler, pour la première fois (*Mémoires de Berlin,* 1759) et dont Vandermonde donna depuis une solution plus simple, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences,* pour 1771, page 566. M. Volpicelli s'est occupé récemment de ce problème. (*Comptes rendus,* 1850, tome XXXI, page 314.)

THÉORÈME DE M. STEINER, SUR LES AXES RECTANGULAIRES, DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ

(voir t. IX, p. 407);

PAR M. F. HÉMENT,
Professeur au lycée de Strasbourg.

---

1. Le théorème de M. Steiner sur les axes rectangulaires dans les coniques peut être démontré ainsi :

Prenant pour axes les deux droites rectangulaires, l'équation de la conique est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

En faisant successivement $x = 0$, $y = 0$, on obtient

$$Ay^2 + Dy + F = 0,$$
$$Cx^2 + Ex + F = 0,$$

équations qui donnent les segments des droites a et b; on a donc

$$x'x'' = \frac{F}{C}, \qquad y'y'' = \frac{F}{A},$$
$$x'^2 x''^2 = \frac{F^2}{C^2}, \qquad y'^2 y''^2 = \frac{F^2}{A^2}.$$

Les racines étant de signes contraires, on a

$$a = x' - x'' = \frac{\sqrt{E^2 - 4CF}}{C},$$
$$b = y' - y'' = \frac{\sqrt{D^2 - 4AF}}{A},$$
$$a^2 = \frac{E^2 - 4CF}{C^2}, \qquad b^2 = \frac{D^2 - 4AF}{A^2},$$

et enfin

$$\frac{a^2}{x'^2 x''^2} + \frac{b^2}{y'^2 y''^2} = \frac{E^2 - 4CF + D^2 - 4AF}{F^2},$$

quantité constante; car, comme les deux axes rectangulaires sont quelconques, on peut généraliser en changeant leur direction. On a alors

$$D'^2 = (D\sin\alpha + E\cos\alpha)^2,$$
$$E'^2 = (D\cos\alpha - E\sin\alpha)^2,$$
$$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2,$$
$$A' = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$
$$C' = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$A' + C' = A + C,$$

F est le même ; donc

$$\frac{D^2 + E^2 - 4F(A+C)}{F^2} = \frac{D'^2 + E'^2 - 4F(A'+C')}{F'^2}.$$

2. Quant au théorème général, en prenant pour axes les trois droites rectangulaires, on a pour équation de la surface

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gz + Ayx + Kx + L = 0.$$

En faisant successivement

$$(x=0, y=0), \quad (y=0, z=0), \quad (x=0, z=0),$$

on obtient

$$Az^2 + Bz + L = 0,$$
$$Cx^2 + Kx + L = 0,$$
$$By^2 + Hy + L = 0,$$

équations qui donnent les segments des droites a, b, c; on a donc

$$a^2 = \frac{G^2 - 4AL}{A^2}, \qquad x'^2 x''^2 = \frac{L^2}{A^2},$$
$$b^2 = \frac{K^2 - 4CL}{C^2}, \qquad y'^2 y''^2 = \frac{L^2}{C^2},$$
$$c^2 = \frac{H^2 - 4BL}{B^2}, \qquad z'^2 z''^2 = \frac{L^2}{B^2},$$

d'où

$$\frac{a^2}{x'^2 x''^2} + \frac{b^2}{y'^2 y''^2} + \frac{c^2}{z'^2 z''^2}$$
$$= \frac{G^2 + K^2 + H^2 - 4AL - 4CL - 4BL}{L^2} = \text{const.}$$

Si l'on prend, en effet, d'autres axes rectangulaires, on obtient

$$A' + B' + C' = A + B + C,$$
$$G'^2 + K'^2 + H'^2 = G^2 + H^2 + K^2,$$

en faisant attention aux relations connues qui existent entre les cosinus des angles que les nouveaux axes font avec les anciens : d'ailleurs L ne change pas ; donc

$$\frac{D'^2 + E'^2 + F'^2 - 4L(A' + B' + C')}{L^2}$$
$$= \frac{D^2 + E^2 + F^2 - 4L(A + B + C)}{L^2}.$$

C. Q. F. D.

Note. $\frac{1}{x'x''} + \frac{1}{y'y''} + \frac{1}{z'z''} = \text{const.}$

JACOBI.

Le flambeau le plus brillant du siècle est éteint. JACOBI n'est plus. Il commence sa carrière d'invisible immortalité; perte douloureuse, lacune immense, irréparable. Toutefois, nous conservons un précieux héritage: ses œuvres, où apparaissent inattendues tant de découvertes, où disparaissent soudaines tant de difficultés, au souffle de son génie. Sans orgueil, et en toute vérité, il aurait pu inscrire au frontispice de ses *Fundamenta* la devise d'Horace : *Exegi monumentum œre perennius*. En méditant ces pages, brillantes d'incessantes créations, on reste convaincu que les mathématiques ne sont pas une science, mais une révélation permanente, un reflet de cette intelligence divine que Jacobi contemple maintenant dans son ineffable pureté. Il nous a aussi légué une pléiade d'illustres disciples qui continuent la gloire du maître; étendent, perfectionnent ses travaux; resserrent d'un lien toujours plus étroit le nombre, l'espace, le temps; le continu et le discontinu; le réel et l'imaginaire, le fini et l'infini; sublime synthèse, tendance unitaire de notre époque: là est notre espoir. Puisse le ciel accorder de longs jours au géomètre hors rang, à l'auteur des *Disquisitiones*; à notre illustre compatriote, l'auteur des *Exercices* : là est notre consolation. Ce siècle a vu disparaître successivement Lagrange, Laplace, Monge, Legendre, Poisson, Abel, Jacobi. Ces noms vivro t dans la mémoire des hommes, tant que subsistera chez eux le culte de l'*idée*; le seul qui donne de la grandeur à la pensée, de la noblesse aux sentiments, de l'élévation au caractère; ils vivront encore entourés d'une auréole toujours renouvelée, lorsque les noms de leurs envieux contempteurs seront, depuis longtemps, ensevelis dans les ténèbres de l'oubli.

O. TERQUEM.

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS.

1. *Notation.* u étant une fonction de n variables x_1, $x_2, \dots, x_n$, nous désignons par u_p la dérivée de cette fonction prise par rapport à la variable x_p, par u_{pq} la dérivée u_p par rapport à la variable x_q, par u_{pqr} la dérivée de u_{pq} par rapport à la variable λ_p, et ainsi de suite. p, q, $r, \dots$, sont des nombres quelconques de la suite naturelle 1, 2, 3, ..., n. Ces dérivées portent aussi le nom de *coefficients différentiels partiels,* du premier, deuxième, troisième, etc., ordre. Nous empruntons cette notation commode à M. Hesse, célèbre professeur à Kœnigsberg.

Observation. On sait que $u_{pqr\dots}$ reste le même, dans quelque ordre qu'on exécute les dérivations.

2. *Lemme.* u étant une fonction de n variables, le nombre des coefficients différentiels partiels d'ordre p est

$$\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n-1} = \frac{n(n+1)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots p}.$$

Démonstration. Développons $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^p$, où u_1, u_2, etc., désignent les dérivées premières de u, prise par rapport à $x_1, x_2, \dots$, conformément à la notation. Le premier terme est u_1^p; remplaçons-le par $u_{111\dots}$, le nombre des indices 1 étant p, nous obtenons un coefficient différentiel d'ordre p; le second terme est $nu_1^{p-1}u_2$, remplaçons-le par $u_{211111\dots}$ le nombre des indices 1 étant $p-1$, nous aurons un second coefficient différentiel d'ordre p; opérant de même sur tous les termes, on obtient tous les coefficients d'ordre p; on aura autant de ces coefficients qu'il y a de termes dans le développement. Le nombre de ces termes est celui qui est énoncé dans le lemme (*voir* tome I, page 89).

3. Soit u une fonction de deux variables x_1, x_2; cette fonction a trois coefficients différentiels du second ordre, savoir :

$$u_{11}, \quad u_{12}, \quad u_{22}.$$

Représentons la fonction $u_{11}x_1 + u_{12}x_2$ par P_1, et la fonction $u_{21}x_1 + u_{22}x_2$ par P_2; de sorte que nous pouvons écrire

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_1 &= P_1 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 &= P_2 \end{aligned}.$$

Considérons x_1, x_2 comme deux inconnues de deux équations du premier degré; le déterminant de ces inconnues est $u_{11}u_{22} - u_{12}^2$, car $u_{12} = u_{21}$: c'est cette expression $u_{11}u_{22} - u_{12}^2$ que nous appelons le *premier déterminant* de la fonction u.

4. *Théorème.* Soient u une fonction à deux variables x_1, x_2, et D le premier déterminant de cette fonction. Remplaçons x_1 par le binôme linéaire $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, et x_2 par le binôme linéaire $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$; la fonction u se changera en une fonction des deux variables y_1, y_2. Soit Δ le premier déterminant de cette fonction v, on aura

$$\Delta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 D.$$

Démonstration. On a

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ x_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned},$$

d'où

$$\frac{dx_1}{dy_1}=\alpha_1,\quad \frac{dx_1}{dy_2}=\alpha_2,\quad \frac{dx_2}{dy_1}=\beta_1,\quad \frac{dx_2}{dy_2}=\beta_2,$$

$$\frac{dv}{dy_1}=v_1=\frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1}+\frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_1}=\alpha_1 u_1+\beta_1 u_2,$$

$$\frac{dv}{dy_2}=v_2=\frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_2}+\frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2}=\alpha_2 u_1+\beta_2 u_2,$$

$$\frac{d^2v}{dy^2}=v_{11}=\alpha_1^2 u_{11}+2\alpha_1\alpha_2 u_{12}+\alpha_2^2 u_{22},$$

$$\frac{d^2v}{dy_2^2}=v_{22}=\beta_1^2 u_{11}+2\beta_1\beta_2 u_{12}+\beta_2^2 u_{22},$$

$$\frac{d^2v}{dy_1\,dy_2}=v_{12}=\alpha_1\beta_1 u_{11}+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)u_{12}+\alpha_2\beta_2 u_{22},$$

d'où

$$v_{11}v_{22}-v_{12}^2=(a_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2(u_{11}u_{22}-u_{12}),$$

ou bien

$$\Delta=(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2\,\mathrm{D}.$$

C. Q. F. D.

Observation. En considérant, dans les équations (2), y_1 et y_2 comme des inconnues, il est évident que le déterminant est $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$.

5. *Exemple*. Soit

$$u=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_1+ex_2+f;$$

il vient

$$u_1=2ax_1+bx^2+d,\quad u_2=bx_1+2cx_2+e,$$
$$u_{11}=2a,\quad u_{12}=u_{21}=b,\quad u_{22}+2c;$$

ainsi

$$\mathrm{D}=4ac-b^2.$$

Ainsi, ce qu'on désigne par m dans la théorie des coniques, est le *premier déterminant* de la fonction hexanôme, laquelle, étant égalée à zéro, donne l'équation de la conique. En remplaçant, dans l'équation, x_1 et x_2, respectivement par $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ et $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$, on obtient une seconde conique qui est la transformée *homologique* de la première conique, et l'on a,

$$\Delta = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 D;$$

par conséquent, la seconde conique est toujours de même espèce que la première; mais on peut transformer une ellipse en cercle et une hyperbole en *hypercle* (*).

Les changements de coordonnées sont des cas particuliers des transformations homologiques; en passant des coordonnées rectangulaires à d'autres coordonnées rectangulaires, on a

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = 1;$$

ainsi le déterminant ne change pas de valeur.

6. Soit u une fonction de trois variables x_1, x_2, x_3; cette fonction a *six* coefficients différentiels du second ordre, savoir : u_{11}, u_{12}, u_{13}; u_{22}, u_{23}, u_{33}. Posons

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = P_1, \\ u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = P_2, \\ u_{31} x_1 + u_{32} x_2 + u_{33} x_3 = P_3; \end{array} \right.$$

considérant x_1, x_2, x_3 comme trois inconnues de trois équations du premier degré, et résolvant ces équations, le dénominateur des inconnues est ce qu'on nomme le *déterminant* de la fonction u; désignant ce dénominateur par D, l'on a, comme on sait,

$$D = u_{11} u_{22} u_{33} + 2 u_{12} u_{13} u_{23} - u_{11} u_{23}^2 - u_{22} u_{13}^2 - u_{33} u_{12}^2.$$

7. Théorème. *Soit u une fonction de trois variables*

(*) Hyperbole équilatère (*voir* t. V, p. 535).

x_1, x_2, x_3; *posons*

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3, \\ x_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3, \\ x_3 &= \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3, \end{aligned}\right.$$

la fonction u se change en une fonction v à trois variables y_1, y_2, y_3. Soit Δ le déterminant de cette fonction v; on aura

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta = (&\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 \\ &+ \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1)^2\,\mathrm{D}. \end{aligned}\right.$$

Démonstration.

$$v_1 = \frac{du}{dy_1} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{du}{dx_3}\frac{dx_3}{dy_3} = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1 u_3,$$

$$\begin{aligned} v_{11} = {} & \alpha_1^2 u_{11} + \beta_1^2 u_{22} + \gamma_1^2 u_{33} + 2\alpha_1\beta_2 u_{12} \\ & + 2\alpha_1\gamma_1 u_{13} + 2\beta_1\gamma_1 u_{23}, \\ v_{12} = {} & \alpha_1\alpha_2 u_{11} + \beta_1\beta_2 u_{22} + \gamma_1\gamma_2 u_{33} + [\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2]\, u_{12} + [\alpha_1\gamma_2 \\ & + \gamma_1\alpha_2]\, u_{13} + [\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2]\, u_{23}, \\ v_{13} = {} & \alpha_1\alpha_3 u_{11} + \beta_1\beta_3 u_{22} + \gamma_1\gamma_3 u_{33} + u_{12}[\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3] \\ & + u_{13}[\alpha_1\gamma_3 + \gamma_1\alpha_3] + u_{23}[\beta_1\gamma_3 + \gamma_1\beta_3]. \end{aligned}$$

On trouve de même v_2, v_{22}, v_{23}, v_{33}; substituant dans le déterminant Δ les valeurs de v en fonction de u, on trouve l'équation (5) qu'on peut écrire de cette manière

$$[v_1\, v_2\, v_3] = [\alpha_1\, \beta_2\, \gamma_3]^2\, [u_1\, u_2\, u_3],$$

les crochets désignant des déterminants.

8. *Exemple.* Soient

$$\begin{aligned} u &= ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2 + dx_1 x_3 + ex_2 x_3 + fx_3^2, \\ u_1 &= 2ax_1 + bx_2 + dx_3, \\ u_{11} &= 2a, \\ u_{12} &= b, \\ u_{13} &= d, \end{aligned}$$

et, de même,

$$u_{22} = 2c, \quad u_{23} = e, \quad u_{33} = 2f,$$
$$D = 8acf + 4bde - 2ae^2 - 2cd^2 - 2fb^2 = 2L.$$

Ainsi, dans nos *relations d'identité*, ce que nous avons appelé m est *le premier déterminant* de la fonction hexanôme du second degré à deux variables, et ce que nous avons nommé L est la moitié du *second déterminant* de la même fonction rendue homogène et ternaire.

En transformant une conique homologiquement, $\frac{L}{m}$ ne change donc pas.

Soient encore

$$u = A'x_1^2 + A''x_2^2 + A'''x_3^2 + 2B'''x_1x_2 + 2B''x_1x_3 + 2B'x_2x_3$$
$$+ 2C'x_1 + 2C''x_2 + 2C'''x_3 + E;$$
$$u_1 = 2A'x_1 + 2B'''x_2 + 2B''x_3 + 2C',$$
$$u_{11} = 2A', \quad u_{12} = 2B''', \quad u_{13} = 2B'',$$
$$u_{22} = 2A'', \quad u_{23} = 2B', \quad u_{33} = 2A''';$$

d'où

$$D = 8[A'A''A''' + 2B'B''B''' - A'B'^2 - A''B''^2 - A'''B''^2].$$

C'est le *premier déterminant* relatif aux équations des surfaces du second degré, et le second déterminant des équations des lignes du second. D, pris négativement, jouit des propriétés analogues à m : ainsi, lorsque D est nul, le centre est à l'infini; lorsque D est positif, la surface est toujours infinie.

9. Théorème général. *Soit u une fonction de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; posons*

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n,$$
$$x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n,$$
$$\vdots$$
$$x_n = \tau_1 y_1 + \tau_2 y_2 + \ldots + \tau_n y_n;$$

la fonction se change en une fonction v à n variables y_1, $y_2, \ldots, y_n$. Désignant par $[u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}]$, $[v_{11}\, v_{22} \ldots v_{nn}]$, $[\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n]$ les déterminants de u, v, et des coefficients α_{12}, $\beta_1, \ldots, \tau_1$, on a

$$[v_1\, v_2 \ldots v_{nn}] = [\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n]^2\, [u_1\, u_2 \ldots u_{nn}].$$

Démonstration. La même que ci-dessus pour trois variables.

10. *Exemple*.

$$u = \mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{A}'x_2^2 + \mathrm{A}''x_3^2 + \mathrm{E}x_4^2 + 2\mathrm{B}x_2 x_3 + 2\mathrm{B}'x_1 x_3$$
$$+ 2\mathrm{B}''x_1 x_2 + 2\mathrm{C}x_1 x_4 + 2\mathrm{C}'x_2 x_4 + 2\mathrm{C}''x_3 x_4.$$

Calcul fait, on trouve pour le déterminant de quatre variables,

$$\mathrm{D} = u_{11}\, u_{22}\, u_{33}\, u_{44} - \mathrm{P} + \mathrm{Q} - \mathrm{R} + \mathrm{S},$$
$$\mathrm{P} = u_{33}\, u_{44}\, u_{12}^2 + u_{22}\, u_{44}\, u_{13}^2 + u_{22}\, u_{33}\, u_{14}^2 + u_{11}\, u_{44}\, u_{23}^2$$
$$+ u_{11}\, u_{33}\, u_{24}^2 + u_{11}\, u_{22}\, u_{34}^2,$$
$$\mathrm{Q} = u_{12}^2\, u_{34}^2 + u_{13}^2\, u_{24}^2 + u_{14}^2\, u_{23}^2,$$
$$\mathrm{R} = 2[u_{12}\, u_{23}\, u_{34}\, u_{14} + u_{12}\, u_{24}\, u_{43}\, u_{13} + u_{13}\, u_{32}\, u_{24}\, u_{41}],$$
$$\mathrm{S} = 2[u_{11}\, u_{23}\, u_{24}\, u_{34} + u_{22}\, u_{13}\, u_{14}\, u_{34} + u_{33}\, u_{12}\, u_{14}\, u_{24} + u_{44}\, u_{13}\, u_{12}\, u_{23}];$$

$$u_1 = 2\mathrm{A}x_1 + 2\mathrm{B}'x_3 + 2\mathrm{B}''x_2 + 2\mathrm{C}x_4,$$
$$u_2 = 2\mathrm{A}'x_2 + 2\mathrm{B}x_3 + 2\mathrm{B}''x_1 + 2\mathrm{C}'x_4,$$
$$u_3 = 2\mathrm{A}''x_3 + 2\mathrm{B}x_2 + 2\mathrm{B}'x_1 + 2\mathrm{C}''x_4,$$
$$u_4 = 2\mathrm{E}x_4 + 2\mathrm{C}x_1 + 2\mathrm{C}'x_1 + 2\mathrm{C}''x_3,$$

$$u_{11} = 2\mathrm{A},\quad u_{12} = 2\mathrm{B}'',\quad u_{13} = 2\mathrm{B}',\quad u_{14} = 2\mathrm{C},\quad u_{22} = 2\mathrm{A}',$$
$$u_{23} = 2\mathrm{B},\quad u_{24} = 2\mathrm{C}',\quad u_{33} = 2\mathrm{A}'',\quad u_{33} = 2\mathrm{C}'',\quad u_{44} = 2\mathrm{E},$$
$$u_{11}\, u_{22}\, u_{33}\, u_{44} = 16\,\mathrm{AA}'\mathrm{A}''\mathrm{E};$$

$$\mathrm{P} = 16[\mathrm{AA}'\mathrm{C}''^2 + \mathrm{AA}''\mathrm{C}'^2 + \mathrm{AEB}^2 + \mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{C}^2 + \mathrm{A}'\mathrm{EB}'^2 + \mathrm{A}''\mathrm{EB}''^2],$$
$$\mathrm{Q} = 16[\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 + \mathrm{B}'^2\mathrm{C}'^2 + \mathrm{B}''^2\mathrm{C}''^2],$$
$$\mathrm{R} = 32[\mathrm{BB}''\mathrm{CC}'' + \mathrm{BB}'\mathrm{CC}' + \mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{C}'\mathrm{C}''],$$
$$\mathrm{S} = 32[\mathrm{ABC}'\mathrm{C}'' + \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{CC}'' + \mathrm{A}''\mathrm{B}''\mathrm{CC}' + \mathrm{EBB}'\mathrm{B}''];$$

c'est le déterminant de la fonction décanòme à trois variables rendue homogène et quaternaire. Ce *second déterminant* D jouit des mêmes propriétés pour les surfaces du second degré que ce que nous avons nommé L pour les lignes du second degré. C'est ce que nous verrons dans nos *relations d'identité,* appliquées aux surfaces du second degré. La plupart de ces relations ont été énoncées pour les formes quadratiques à deux variables par l'illustre M. Gauss (*Disquisitiones,* § 267) ; si je n'en ai pas averti plus tôt, c'est que, par inadvertance, je ne m'en suis aperçu que récemment, à cause de la différence de notation. Lorsque la fonction *u* dépasse le second degré, nous verrons que le *déterminant* est toujours le résultat d'une élimination entre des équations de degrés de plus en plus élevés.

Dans les lignes du second degré, il suffit de connaître les deux déterminants pour avoir le produit des axes principaux et par conséquent l'aire de l'ellipse; de même dans les surfaces du second degré, les deux déterminants donnent le produit des trois axes principaux et le volume de l'ellipsoïde. Les déterminants (fonctions cramériennes) dominent aujourd'hui toute la science mathématique. C'est donc avec raison qu'on les a ôtés du nouvel enseignement. On les a fructueusement remplacés par *le plan auxiliaire, le logarithme, le travail élémentaire;* triade adorable, sans oublier la règlette de saint Gunther que tout géomètre est tenu d'avoir incessamment dans ses poches ou dans ses mains. Nous verrons renaître l'ère des Archimèdes et des Apollonius :

Magnus ab integro seclorum nascitur ordo.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. CONCOURS D'ADMISSION, EN 1850.

Nous croyons être agréables à nos lecteurs en réunissant ici les énoncés des questions qui ont été traitées dans la composition mathématique du concours d'admission pour l'École Polytechnique, en 1850, à Paris et dans les autres villes d'examen.

Il était prescrit, dans chaque programme, de tenir compte des parties vues et des parties cachées (arêtes, traces, contours, etc.) dans les projections des corps représentés.

Deux mois environ avant le concours, la direction des études de l'École avait envoyé dans les départements, par l'intermédiaire des préfets, une Note qui avait pour titre : *Composition mathématique, indications à suivre dans la partie graphique.*

1. *Données.* Le plan dont l'inclinaison sur le plan horizontal est de 60 degrés, et dont la trace horizontale *ab* fait un angle de 45 degrés avec la ligne de terre; le pentagone P donné par ses côtés et ses diagonales exprimés en millimètres; la droite (D, D') quelconque.

On demande : 1° de construire les projections du polygone P posé sur le plan donné, et de prendre ce polygone pour base d'un prisme parallèle à la droite (D, D'), et dont la hauteur serait de 80 millimètres au moins; 2° de développer la surface de ce prisme, et de construire l'angle qui mesure l'inclinaison d'une face sur l'une des bases.

2. *Données.* Une ellipse E tracée sur le plan horizontal, avec des axes de 50 millimètres et de 35 millimètres; le plan dont l'inclinaison sur le plan horizontal est de 60 degrés, et dont la trace verticale *ab* fait un angle de 45 degrés avec la ligne de terre; la droite (D, D′).

On demande : 1° de construire les projections du cylindre qui aurait pour base l'ellipse E, qui serait parallèle à la droite (D, D′), et qui aurait 80 millimètres de hauteur; 2° de couper ce cylindre par le plan donné, le cylindre étant supposé convenablement tourné pour cela; 3° de construire le développement de la surface cylindrique sur le plan tangent suivant une des génératrices du contour horizontal, et d'y tracer la transformée de la section plane.

Le développement sera fait à l'aide d'un prisme inscrit dans le cylindre.

3. *Données.* La verticale (a, $a'a'$), et l'inclinée (pm, $p'm'$), distante de 10 à 15 millimètres de cette verticale; le plan horizontal HH, plus rapproché de la perpendiculaire commune à ces deux droites que ne l'est le plan horizontal de projection.

On demande : 1° de construire les projections de la surface lieu de toutes les positions de la droite (pm, $p'm'$) : on construira au moins douze positions de la génératrice mobile, dont (pm, $p'm'$) sera la position initiale; on limitera la surface, d'une part, au plan horizontal de projection, de l'autre, au plan HH; 2° de couper cette surface par un plan parallèle à la génératrice (pm, $p'm'$) et à la cinquième à partir de celle-ci; 3° de mener des tangentes aux points à l'infini de la section plane.

4. *Données.* Le plan P, dont la ligne de plus grande inclinaison sur le plan horizontal est la droite (pm, $p'm'$).

On demande : 1° de construire les projections d'une pyramide pentagonale dont la base serait placée sur le plan P, et dont le sommet serait pris à volonté; 2° de mesurer la hauteur de cette pyramide, de construire sa base en vraie grandeur, et de calculer son volume en millimètres cubes; 3° de faire une troisième projection de cette pyramide sur un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.

5. *Données.* Un prisme pentagonal et un prisme quadrangulaire, ni parallèles, ni perpendiculaires aux plans de projection, dont les projections croisées puissent donner lieu à une rencontre.

On demande : 1° de construire la partie commune à ces deux prismes; 2° de développer la surface de l'un d'eux, et de tracer sur le résultat la transformée de la figure de rencontre des deux surfaces.

On fera attention que différents cas peuvent se présenter, selon que les deux prismes ont ou n'ont pas de plan rasant commun; un plan rasant étant celui qui passe par une arête, et non par une face. On ne traitera graphiquement qu'un de ces cas, mais on discutera les autres dans le texte.

Des questions analogues à la précédente ont été proposées pour une pyramide pentagonale et un prisme quadrangulaire, ni perpendiculaire, ni parallèle à l'un des plans de projection; pour une pyramide pentagonale et une pyramide quadrangulaire, etc.

6. *Données.* Deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent sous un angle de 45 degrés, dans un plan vertical non parallèle au plan vertical de projection; une sphère à axe vertical $(a, a'a')$, et d'un rayon de 5 centimètres au moins; un cylindre incliné, de 3 à 4 centimètres de rayon, et dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphère.

On demande : 1° de construire la courbe d'intersection des deux surfaces; 2° de mener une tangente en un point de cette courbe.

7. *Données.* Le plan P, dont la ligne de plus grande

inclinaison sur le plan vertical est la droite $(pm, p'm')$.

On demande : 1° de construire les projections d'un cône oblique dont la base, posée sur le plan P, serait un cercle de 35 millimètres au moins de rayon, et dont le sommet serait pris à volonté; 2° de mesurer la hauteur de ce cône, et d'en calculer le volume en millimètres cubes; 3° de faire une troisième projection de ce cône sur un plan perpendiculaire aux horizontales du plan donné P.

8. *Données.* Le plan P dont la trace horizontale et la trace verticale font respectivement avec la ligne de terre des angles de 45 et de 60 degrés; l'ellipse E dont les axes sont de 45 et de 35 millimètres; la droite (D, D'); le point (m, m').

On demande : 1° de construire les projections de l'ellipse E posée sur le plan P, de manière que le grand axe fasse un angle de 30 degrés avec le plan horizontal; 2° de prendre cette ellipse pour base d'un cylindre parallèle à la droite (D, D'), et ayant 90 millimètres de longueur; 3° de mener à ce cylindre deux plans tangents passant par le point (m, m').

On supposera, lors de la mise à l'encre de l'épure, que les deux plans tangents existent réellement, et l'on tiendra compte de cette supposition dans la distinction des parties vues et des parties cachées.

9. *Données.* L'ellipse E' tracée sur le plan vertical, avec des axes de 50 et de 35 millimètres; un point (S, S') quelconque.

On demande : 1° de construire les projections du cône qui aurait pour base l'ellipse E', et pour sommet le point (S, S'); 2° de couper ce cône par un plan qui rencontre toutes les génératrices entre la base et le sommet; 3° de construire sur la surface la courbe lieu de tous les points distants du sommet de 20 millimètres; 4° de développer la surface à l'aide de cette courbe, et de tracer sur le développement la transformée de la base ou celle de la section plane.

10. *Données*. Le cylindre droit et vertical (A, A′), de 5 centimètres de rayon; le cylindre (B, B′), incliné, à base circulaire de 4 centimètres de rayon, et dirigé de manière à avoir un plan tangent commun avec le précédent; un troisième cylindre (C, C′), parallèle à (B, B′), à base circulaire de 3 centimètres de rayon et concentrique à la base du cylindre (B, B′). Les cylindres (B, B′) et (C, C′), parallèles entre eux, ne devront pas être parallèles au plan vertical.

On demande: 1° la courbe d'intersection des cylindres (A, A′) et (B, B′); 2° la courbe d'intersection du cylindre (A, A′) avec le cylindre (C, C′) qui est enveloppé et caché par le cylindre (B, B′); 3° le développement du cylindre vertical, et, sur ce développement, la transformée de l'une des courbes d'intersection.

On pourra, si l'on veut, tracer à l'encre rouge le cylindre (C, C′) et ses courbes d'intersection, et arrêter les parties vues et les parties cachées comme s'il n'était pas enveloppé par le cylindre (B, B′).

Des questions analogues ont été proposées sur un cylindre droit et sur deux cônes de même sommet, à bases circulaires et concentriques (le sommet commun n'étant pas sur l'axe du cylindre), ou sur deux cônes à bases circulaires et concentriques, mais de sommets différents, l'un situé dans le cylindre, l'autre sur le cylindre, etc.

11. *Données*. Deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent dans un plan vertical non parallèle au plan vertical de projection : 1° un hyperboloïde à une nappe, dont l'axe est vertical, et dont le cercle de gorge est de 30 millimètres; limité, d'une part, au plan horizontal de projection, de l'autre, à un plan horizontal HH qui donne

un cercle plus petit que celui de la base ; 2° une sphère de 40 à 50 millimètres de rayon, et dont le centre ne se trouve pas sur l'axe de l'hyperboloïde.

On demande : 1° de construire la courbe d'intersection de ces deux surfaces ; 2° de mener une tangente en un point de cette courbe.

On est libre de considérer l'hyperboloïde comme une surface infiniment mince ou comme un solide, l'un et l'autre étant limités par deux plans horizontaux ; mais on devra tenir compte de la différence qui résulte de telle ou telle supposition dans la distinction des parties vues et des parties cachées de la projection horizontale.

12. *Données*. La verticale $(a, a'a')$, et l'inclinée $(pm, p'm')$ parallèle au plan vertical ; la droite $(r, r'r')$ perpendiculaire au plan vertical ; le plan horizontal HH plus rapproché de la perpendiculaire commune aux deux droites $(a, a'a')$ et $(pm, p'm')$, que ne l'est le plan horizontal.

On demande : 1° de construire les projections de douze positions au moins de la droite $(pm, p'm')$ tournant autour de la verticale $(a, a'a')$, à partir de $(pm, p'm')$ comme position initiale : ces droites seront limitées, d'une part, au plan horizontal de projection, et, de l'autre, au plan HH ; 2° de couper la surface, lieu de toutes les positions de la droite mobile $(pm, p'm')$, par trois plans passant par la droite $(r, r'r')$, et rencontrant, l'un, toutes les génératrices, l'autre, toutes les génératrices moins une, le troisième, toutes moins deux ; 3° de mener une tangente en un point situé à l'infini sur celle des trois sections planes qui présente de tels points.

13. *Données*. Un plan P, dont on connaît un point (p, p') et les deux droites principales qui passent par ce point : la parallèle $(ph, p'h')$ au plan horizontal, et la parallèle $(pv, p'v')$ au plan vertical ; le cercle C d'un

rayon de 25 millimètres; une droite (D, D′) inclinée à 45 degrés sur la ligne de terre.

On demande : 1° de construire les projections du cylindre parallèle à la droite (D, D′), dont le cercle C serait la base posée sur le plan P, et dont la longueur serait triple du rayon de cette base; 2° de mesurer la hauteur de ce cylindre, pour en déduire le volume en millimètres cubes; 3° de construire la projection de ce cylindre sur un plan perpendiculaire à la trace verticale du plan P.

14. *Données*. Deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent sous un angle de 30 degrés, dans un plan vertical non parallèle au plan vertical de projection : l'une, à axe vertical (a, $a'a'$), est engendrée par une ellipse méridienne de 80 millimètres de diamètre horizontal et de 50 millimètres de diamètre vertical; l'autre est un cône dont l'angle au sommet est de 60 degrés, et dont le sommet pourra être placé à volonté dans l'ellipsoïde, mais non au centre, sur l'ellipsoïde, ou en dehors.

On demande : 1° de construire la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et du cône; 2° de mener une tangente en un point de cette courbe.

On fera remarquer dans le texte qu'il peut y avoir pénétration ou arrachement.

Note. Nous croyons devoir rappeler un projet d'*Instruction sur les travaux graphiques,* dans lequel on trouvera d'utiles renseignements. (Voir *Nouvelles Annales,* tome V, page 23.)

PROGRAMME D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE, EN 1851 (*).

Nous avons en diverses occasions exprimé l'opinion que le mode d'examen pour l'École de Saint-Cyr était très-rationnel, et de beaucoup préférable à celui qui était en usage pour l'École Polytechnique; toutefois, on a encore trouvé moyen d'empirer ce dernier mode d'examen, ce qui paraissait très-difficile. Par compensation, on a joint maintenant à ce mode d'entrée, un mode de sortie tout à fait inqualifiable; les dispositions en sont tellement draconiennes, que les esprits les plus illibéraux n'auraient pas osé les proposer dans les jours les plus mauvais de la monarchie, tant impériale que royale. Mais parlons des programmes : celui de l'École de Saint-Cyr, que nous avons sous les yeux, est une excellente esquisse faite d'après un très-mauvais modèle. Les énoncés sont clairs, précis, allant droit au but, nommant les choses par leur nom, sans ambages, sans emphase. On dit tout simplement ce qu'il faut apprendre dans l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, sans ajouter des phrases oiseuses et prétentieuses, telles que celles-ci : l'*arithmétique sera exposée avec simplicité, la géométrie sera pratiquée avec dextérité, les équations seront résolues avec fidélité, on passera légèrement sur tel théorème, on démontrera rapidement telle théorie, on insistera sur les mouvements naturels*, etc. ; et autres aménités de ce genre qui semblent échappées d'une plume en veine de gaieté. Au contraire, le style du programme de

(*) Extrait de l'Instruction pour l'admission à l'École spéciale militaire du 11 février 1851 ; 7 pages in-folio. Imprimerie nationale.

Saint-Cyr est partout convenable et adapté au sujet; les matières y sont arrangées avec méthode, mises à la portée des candidats et appropriées aux besoins de l'enseignement. Toutefois, il est à regretter que, forcé d'imiter un mauvais modèle, on n'ait pas admis les fractions continues dans l'arithmétique; d'autant plus que ces fractions rentrent dans la théorie du plus grand commun diviseur qu'on a laissé subsister en arithmétique; leur usage, d'ailleurs, est d'une utilité constante, puisqu'à chaque instant on a besoin de remplacer de grandes fractions irréductibles par des fractions plus simples et approchées. Comment, sans les fractions continues, ramener π au rapport d'Archimède, ou à $\frac{355}{113}$? Comment, sans ces fractions, expliquer l'intercalation grégorienne, etc.

Il est facheux aussi, toujours en suivant un détestable guide, d'avoir retranché de la géométrie, la théorie des polyèdres symétriques; formes que l'on trouve dans tout le système des êtres organisés, et qui, d'après des découvertes récentes, jouent un si grand rôle dans les phénomènes de la cristallisation. Lorsque nous voyons le Créateur accorder une si large part aux corps symétriques dans sa géométrie, est-ce le moment de les exclure de la nôtre? Il faut convenir qu'un célèbre rapporteur, homme du ciel, a montré en cette occasion peu de déférence pour le maître de son domaine.

Il est à regretter aussi qu'on n'ait pas ajouté à la géométrie, à la suite des plans, les principaux théorèmes des projections coniques et cylindriques; c'est là leur véritable place, et non dans la géométrie descriptive, dont les procédés ne sont que des applications de ces théorèmes, qui ont d'ailleurs des applications d'une extrême fécondité, indépendamment de leur utilité graphique.

Les articles de la géométrie descriptive ne se succèdent peut-être pas dans un ordre bien naturel. *Les rabattements et les plans auxiliaires* sont aujourd'hui à l'ordre du jour et figurent partout. Un moyen certain de rendre ridicules les meilleurs procédés, est d'en prôner sans cesse et d'en prodiguer l'emploi outre mesure. Disons un mot du programme relatif à l'allemand : il y est dit qu'on expliquera à livre ouvert un auteur d'*un texte facile;* tout programme de ce genre devrait se réduire à ce peu de mots : celui qu'on a adopté pour l'École Polytechnique semble avoir été rédigé à Dresde pour des officiers saxons, dont les trois quarts peut-être n'y répondraient pas. Mais à Saint-Cyr comme à l'École Polytechnique, on a grand tort d'attacher à cette langue une importance ridiculement exagérée. Aujourd'hui, Napoléon, qui n'avait aucune aptitude pour les langues, ne serait admis ni à l'une ni à l'autre École. On rapporte même à ce sujet une anecdote d'une incontestable authenticité. Junker, professeur d'allemand à l'ancienne École militaire, a donné au jeune Bonaparte cette note remarquable : *sujet incapable et sans moyens*. Pourquoi? probablement qu'il ne savait pas conjuguer le verbe *seyn*. Quel Junker a donc rédigé le factum ultra-teutonique à l'usage de la seconde École militaire qu'on vient de fonder à Paris (*)? Revenons à celle de Saint-Cyr.

Pourquoi exiger la connaissance des origines de l'histoire de France et l'histoire de la géographie? Qu'un candidat à l'Académie des Inscriptions fasse preuve de ces connaissances, soit; mais on peut être un excellent officier

(*) Toute institution où le sabre prédomine est uniquement militaire, quelque nom qu'elle se donne, dût-elle s'appeler *séminaire*. Si l'on y tolère les services civils, tant pis pour ceux-ci; à moins qu'ils ne trouvent avantageux de s'exercer à l'humilité chrétienne. Ces services devraient désormais se recruter à l'École Normale, section des sciences; là sera l'École Polytechnique; ailleurs de nom. On pourrait alors réunir peut-être les deux Écoles militaires. Nous reviendrons là-dessus.

français et très-instruit, sans jamais avoir entendu parler des recherches de Montfaucon, du père Daniel, de Boulainvillers, de Gosselin, de Ritter, de Mannert, etc. On ne saurait aussi blâmer trop sévèrement la prétention de vouloir rendre tout également obligatoire, et de n'admettre aucune compensation : une telle prétention ne s'accorde ni avec la justice, ni avec le bon sens. Certes, un candidat qui écrira très-bien la langue nationale, qui montrera une haute intelligence scientifique et des connaissances passables en histoire et en géographie, dût-il même ignorer complétement l'allemand, sera certainement préférable à un concurrent médiocre sur tous ces points (*).

Ces critiques ne portent que sur des détails, sur des défauts empruntés, et, pour ainsi dire, imposés ; l'ensemble du programme mérite des éloges, et procure une véritable consolation dans un temps où l'on en a tant besoin.

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ;

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Élève de l'École Polytechnique.

Déduire des deux relations

$$(1)\qquad \sin^3\theta = \sin(\alpha - \theta)\sin(\beta - \theta)\sin(\gamma - \theta),$$
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

la suivante,

$$\cot\theta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$$ (*voir* tome IX, page 363).

Si l'on développe le produit indiqué dans le second membre de (1), on trouve, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de $\sin\theta$,

---

(*) Nous n'observons de mesure en rien ; passant immédiatement d'un extrême à l'extrême opposé. Autrefois, nous permettions une igorance profonde en histoire et sur les langues; aujourd'hui, nous sommes travaillés d'une fièvre historique et linguistique.

$$(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\left|\begin{array}{r}\sin^3\theta-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma\sin\beta\\ -\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\end{array}\right|\begin{array}{r}\cos\theta\sin^2\theta+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ +\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma\\ +\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\end{array}\left|\begin{array}{l}\cos^2\theta\sin\theta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos^3\theta=0,\\ \\ \\ \end{array}\right.$$

ou, en remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$ et $\cos^2\theta$ par $1-\sin^2\theta$,

$$\left.\begin{array}{r}1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ -\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ -\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma\\ -\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right|\begin{array}{r}\sin^3\theta+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ +\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma\\ +\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{r}\sin\theta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ +\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\\ +\cos\alpha\cos\gamma\sin\beta\\ +\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\end{array}\right|\begin{array}{r}\cos^3\theta-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma\sin\beta\\ -\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{l}\cos\theta\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}=0.$$

Mais

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi;$$

donc

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1, \tag{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0. \tag{3}$$

En développant ces deux expressions, on reconnait que les coefficients de $\sin^3\theta$ et $\cos^3\theta$ s'annulent. L'équation précédente devient, en remplaçant le coefficient de $\cos\theta$ par sa valeur $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ déduite de (3), et en supprimant les facteurs communs

$$\cot\theta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma,$$

formule à laquelle on devait arriver.

SOLUTION DE LA QUESTION 89 (PROUHET)

(voir t. III, p. 376);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Professeur au séminaire de Vals.

Soient $F(x)$ une fonction entière en x; a, b deux nombres positifs, et $b > a$; si $\frac{F(a)}{F(b)} > 0$ et $\frac{F(b) - F(a)}{F'(a)} < 0$, il y aura au moins deux racines de $F'(x) = 0$ comprises entre a et b.

Lorsque, dans une fonction entière $F(x)$, on fait croître la variable d'une manière continue, l'accroissement de la fonction $F(x+h) - Fx$ correspondant à la valeur $x = a$ est toujours de même signe que la dérivée $F'(x)$. Donc, si $F'(x)$ ne change pas de signe, lorsqu'on y fait varier x d'une manière continue depuis a jusqu'à b, la valeur de $F(x)$ ne cesse d'augmenter ou de diminuer, selon que $F'(a)$ est positif ou négatif, et la relation $\frac{F(b) - F(a)}{F'(a)} < 0$ ne peut subsister.

Cette dernière inégalité ayant lieu, $F'x$ change de signe entre a et b, il existe donc au moins une racine de

$F'(x) = 0$ comprise entre a et b, et puisque nous avons en même temps $\frac{F'(b)}{F'(a)} > 0$, il en existe un nombre pair dont deux au moins sont inégales.

L'interprétation géométrique de l'énoncé du théorème montre qu'il existe entre les ordonnées $F(a)$ et $F(b)$ ou un maximum et un minimum de $F(x)$, ou un point d'inflexion de la courbe représentée par $y = F(x)$. Ce dernier cas ne peut avoir lieu quand la fonction proposée est entière, car la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x, doit nécessairement passer par l'infini.

SOLUTION DE LA QUESTION 183

(voir t. VII, p. 158);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Professeur au séminaire de Vals.

Problème. *t_n travailleurs, dont la force individuelle est représentée par f_n, exécutent m_n mètres d'ouvrage en i_n jours, dans un terrain dont la dureté est représentée par d_n; l'indice n prend les n valeurs $1, 2, 3,\ldots, n$: combien de jours mettront tous ces travailleurs, au nombre de $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$, travaillant ensemble, à exécuter* M *mètres d'ouvrage, dans un terrain de dureté* D?

Solution. Si t_n travailleurs exécutent m_n mètres d'ouvrage en i_n jours dans un terrain de dureté d_n, ils exécuteront en un jour, employant la même force, dans un terrain de dureté D,

$$\frac{1}{D}\,\frac{m_n d_n}{i_n}$$

mètres d'ouvrage.

Par conséquent, $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$ travailleurs exécuteront ensemble en un jour, dans le même terrain, un nombre de mètres d'ouvrage marqué par

$$\frac{1}{D}\sum\frac{m_n d_n}{i_n};$$

le symbole sommatoire $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs que prend la fraction $\frac{m_n d_n}{i_n}$, lorsqu'on y fait successivement $n = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Le nombre de jours qu'emploieront tous ces travailleurs pour exécuter M mètres d'ouvrage est donc

$$\frac{M}{D}\sum\frac{m_n d_n}{i_n} \text{ (*)}.$$

AVIS AUX PROFESSEURS, SUR DES EXERCICES DE CALCUL.

Dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1849, on trouve, dans le Mémoire de M. Le Verrier sur la planète Herschel (dite *Uranus*), un grand nombre de systèmes d'équations numériques linéaires à quatre inconnues; exercices à l'ordre du jour, pris à bonne source. A la page 169, on fait usage des formules cramériennes. C'est ce qu'on devrait se garder d'imiter. Car, l'on a ôté ces formules de l'enseignement; mais comment l'illustre calculateur les aurait-il employées si on ne les lui avait pas enseignées?

(*) C'est à l'examinateur Reynaud qu'on doit l'emploi de l'*unité* dans ce genre de questions.

SOLUTION DE LA QUESTION 87 (PROUHET)

(voir t. III, p. 376) ;

PAR M. J. DENIS,
Régent au collége de Cherbourg.

Soient p un nombre premier avec 10, k le nombre des entiers inférieurs et premiers à p ; on sait que la division de 10^k par p ne peut jamais se faire exactement, et qu'elle donne pour reste l'unité. Cela posé :

THÉORÈME. *Soient* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k = 1$ *les valeurs absolues des restes obtenus en divisant par* p *les puissances successives de* 10, *depuis la première jusqu'à celle de l'ordre* k; *si l'on multiplie le quotient* $Q = \frac{10^k - 1}{p}$ *successivement par chacun des restes* $r_k, r_{k-1}, \ldots, r_1$, *en commençant par celui dont le rang est* k *et remontant jusqu'au premier, les produits obtenus seront tous composés des mêmes chiffres, et dans un ordre tel, que chaque produit pourra se déduire du précédent en transportant à sa gauche le premier chiffre qui est à sa droite.*

Démonstration. Je suppose pour plus de simplicité que les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$, qui sont nécessairement périodiques, ne forment qu'une période; s'il en était autrement, on se bornerait à considérer les restes contenus dans une seule période, et les quotients correspondants, comme on va le voir dans ce qui suit.

J'appelle $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ les chiffres obtenus au quotient, et correspondant respectivement aux restes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$; quelques-uns de ces chiffres peuvent être des zéros, même les premiers; mais les restes sont des nombres d'un ou de plusieurs chiffres chacun, et ne sont jamais nuls.

D'après la définition de la division, on a en même temps les deux identités suivantes :

$$10^k = Qp + r_k,$$
$$10^k = (Q - q_k)p + r_{k-1} \times 10,$$

d'où l'on déduit

$$r_{k-1} \times 10 = r_k + q_k . p;$$

ce qu'il est d'ailleurs facile de voir à priori. Mais, en vertu de la première identité,

$$p = \frac{10^k - r_k}{Q};$$

donc

$$Q r_{k-1} \times 10 = Q r_k + q_k(10^k - r_k),$$

ou bien

$$Q r_{k-1} \times 10 = Q + q_k(10^k - 1),$$

puisque

$$r_k = 1.$$

Or, on peut admettre que Q a toujours k chiffres, les premiers chiffres à gauche pouvant être des zéros; alors le produit $Q r_{k-1} \times 10$ ou $Q - q_k + q_k . 10^k$ pourra s'obtenir en remplaçant par un zéro le chiffre q_k qui est à la droite du nombre Q, et écrivant k rangs plus loin le même chiffre q_k qui représentera alors $q \times 10^k$; puis, si l'on supprime le zéro mis à la place de q_k, on obtiendra le produit

$$Q r_{k-1} = \frac{Q - q_k}{10} + q_k . 10^{k-1},$$

lequel se déduit du premier produit $Q \times 1$, d'après la loi énoncée plus haut.

Généralement, soit le produit $Q r_n$ déduit des précédents comme il vient d'être dit, et soit q_n son dernier chiffre à droite; je vais prouver que $Q r_{n-1}$ pourra se déduire de $Q r_n$ en transportant à la gauche de ce nombre le chiffre q_n qui est à sa droite.

D'après la définition de la division, on a en même temps

$$10^k = (Q - q_k - q_{k-1} \times 10 - q_{k-2} \times 10^2 \ldots - q_{n+1} \times 10^{k-n-1} - q_n \times 10^{k-n})\, p + r_{n-1} \times 10^{k-n+1},$$

$$10^k = (Q - q_k - q_{k-1} \times 10 - q_{k-2} \times 10^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - q_{n+1} \times 10^{k-n-1})\, p + r_n \times 10^{k-n}.$$

De ces deux égalités résulte la suivante :

$$r_{n-1} \times 10^{k-n+1} = r_n \times 10^{k-n} + q_n \times 10^{k-n} \times p,$$

et comme $p = \dfrac{10^k - 1}{Q}$,

$$Q r_{n-1} \times 10^{k-n+1} = Q r_n \times 10^{k-n} + q_n \times 10^{k-n}.(10^k - 1),$$

$$Q r_{n-1} \times 10 = Q r_{n-1} + q_n (10^k - 1).$$

Or r_n est plus petit que p, puisque p est le diviseur, et r_n la valeur absolue de l'un des restes, et Qp est plus petit que 10^k, puisque $p = \dfrac{10^k - 1}{Q}$; donc, à plus forte raison, $Q r_n < 10^k$; $Q r_n$ peut donc toujours être considéré comme composé de k chiffres, *significatifs ou non* : par conséquent, le produit $Q r_{n-1} \times 10$ ou $Q r_n - q_n + q_n \times 10^k$ pourra se déduire de $Q r_n$ en transportant à la gauche de ce nombre le chiffre q_n qui est à sa droite, et remplaçant celui-ci par un zéro; puis, si l'on supprime ce zéro, on obtiendra le produit

$$Q r_{n-1} = \frac{Q r_n - q_n}{10} + q_n \times 10^{k-1},$$

déduit du précédent, d'après la loi énoncée.

Si donc un des produits est ainsi formé avec celui qui le précède, il en sera de même de celui qui le suit ; mais nous avons prouvé cette loi de formation, pour le second : donc, etc.

Corollaires. 1°. Si le diviseur p est inférieur à 10, le quotient partiel q_1 sera au moins égal à 1, en sorte que Q contiendra k chiffres dont le premier ne sera pas zéro ; d'autre part, les restes r_1, r_2, r_3,..., r_k seront tous des nombres d'un chiffre chacun, et comme ils représentent respectivement des unités de l'ordre k, $k-1$, $k-2$,..., 1, il suffira de les écrire de gauche à droite, les uns à la suite des autres, dans l'ordre où ils ont été obtenus, pour former un nombre de k chiffres, tel que *si l'on multiplie le quotient total* Q *par ce nombre, tous les chiffres d'une même colonne verticale soient égaux*, suivant la remarque faite par M. Prouhet (*Nouvelles Annales*, tome III, page 376) sur les produits

$$142857 \times 326451.$$

Soit $p = 7$, on trouve pour quotients partiels

$$1,\quad 4,\quad 2,\quad 8,\quad 5,\quad 7,$$

et pour restes correspondants

$$3,\quad 2,\quad 6,\quad 4,\quad 5,\quad 1;$$

le multiplicande est 142857, le multiplicateur est 326451, et les produits partiels suivent la loi indiquée dans l'énoncé du théorème précédent.

2°. Si le diviseur p est supérieur à 10, le premier ou les premiers quotients partiels q_1, q_2, ..., seront nuls, et les restes pourront être des nombres de plusieurs chiffres chacun; mais la proposition démontrée n'en est pas moins vraie, puisqu'il n'a été fait aucune supposition sur la grandeur des restes, et que les quotients partiels q_1, q_2,..., q_k n'ont pas été supposés non plus avoir des valeurs particulières. Toutefois, pour que les produits Qr_k, Qr_{k-1},..., Qr_1 présentent la même régularité, il faudra remplacer par un zéro chacun des quotients q_1, q_2,..., qui sera nul, et effectuer les multiplications par les restes r_k, r_{k-1},..., r_1, comme si c'étaient des nombres d'un seul chiffre chacun.

Par exemple, soit $p = 21$; on trouve pour quotients partiels

$$0,\quad 4,\quad 7,\quad 6,\quad 1,\quad 9,$$

qui forment une période complète, et pour restes correspondants les nombres

$$10,\quad 16,\quad 13,\quad 4,\quad 19,\quad 1,$$

ce qui donne les produits rassemblés dans le petit tableau suivant :

$$\begin{aligned}
047619 \times 1 &= 047619\\
047619 \times 19 &= 904761\\
047619 \times 4 &= 190476\\
047619 \times 13 &= 619047\\
047619 \times 16 &= 761904\\
047619 \times 10 &= 476190
\end{aligned}$$

Si deux ou plusieurs restes consécutifs sont des nombres d'un seul chiffre chacun, on peut former, comme nous l'avons fait plus haut, un multiplicateur de plusieurs chiffres jouissant de la propriété demandée (question 87). Il suffit de faire la somme des valeurs relatives de ces restes, mais en excluant ceux qui précèdent et ceux qui suivent.

Exemple. Soit $p = 13$; on trouve, pour quotients partiels,

$$0,\quad 7,\quad 6,\quad 9,\quad 2,\quad 3,$$

qui forment une période complète, et pour restes correspondants

10, 9, 12, 3, 4, 1;

et en multipliant 076923 par le nombre 341 que forment les trois derniers restes, on trouve les trois produits partiels

076923
307692
230769

qui jouissent de la propriété demandée.

3°. Il est évident que tout ce qui vient d'être exposé serait encore vrai, si au lieu de 10^k on prenait pour dividende la puissance a^k d'un nombre quelconque a, pourvu que le diviseur p fût premier avec a, que k fût le nombre des entiers inférieurs et premiers à p, et qu'on écrivît les nombres en prenant a pour base du système de numération.

Exemple. Soient $p = 5$, $a = 8$; si l'on effectue la division en écrivant les nombres avec les huit caractères 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, on trouve pour quotients partiels

1, 4, 6, 3,

qui forment une période complète, et pour restes correspondants

3, 4, 2, 1.

La multiplication du nombre 1463 par 3421, effectuée dans le système de numération dont la base est *huit*, donne les quatre produits partiels

1463
3146
6314
4631

où l'on retrouve la même régularité que dans les exemples précédents.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Notions de Mécanique exigées pour l'admission à l'École Polytechnique; ouvrage rédigé d'après le programme officiel, par M. *H. Sonnet,* docteur ès sciences, inspecteur de l'Académie départementale de la Seine, professeur adjoint de Mécanique à l'École centrale des Arts et Manufactures. Paris, 1851; in-8° de 199 pages, 4 planches gravées par M. *E. Wormser.*

C'est le développement complet, ponctuel et fidèle des matières énoncées dans le programme officiel; travail qui répond à un besoin urgent et qui sera promptement recherché par professeurs et élèves; ouvrage exécuté d'après un plan utile à la technologie, nuisible à l'enseignement classique. Car, ce plan est fondé sur deux idées qui sont complétement fausses. La première, c'est de croire que la Mécanique est comprise dans la science des machines; c'est le contraire qui est vrai. La théorie des machines n'est qu'une application particulière de la Mécanique. Les lois de la Dynamique régissent la nature entière, tandis que les machines n'effectuent que le travail très-restreint de l'homme. On s'imagine, et c'est la seconde erreur, qu'on a simplifié l'enseignement et qu'on l'a rendu plus facile. Il est facile de s'apercevoir que les auteurs de programmes n'ont jamais enseigné dans les colléges, et ne connaissent pas la jeunesse. Les fils de famille, ayant reçu une éducation littéraire, base de toute éducation libérale, ne sont pas familiarisés avec les outils, les instruments, et leurs divers agencements, qu'on rencontre dans les usines et dans les ateliers; détails fort obscurs pour des jeunes gens étrangers aux métiers. L'intelligence juvénile, bien cultivée, est de préférence accessible aux idées grandes, abstraites, philosophiques. C'est méconnaître cette intelligence, l'amoindrir, que de vouloir la rendre de prime abord pratique, ouvrière. L'École Polytechnique et les Écoles industrielles n'ont pas le même auditoire, et par conséquent ne peuvent, ne doivent pas avoir le même enseignement, ni pour le fond, ni pour la forme. L'oubli de cette distinction est l'origine des malheureux programmes, fléau pédagogique de notre époque, qui, s'il durait, abaisserait les études et les ouvrages classiques. Dans cet ouvrage de Mécanique, Lagrange, Laplace, Poisson ne sont pas une seule fois nommés; ni les couples, ni leur illustre auteur ne sont mentionnés; on ne rencontre que deux noms de professeurs machinistes. Une méthode d'enseignement qui amène un tel résultat est jugée. La responsabilité porte sur les ordonnateurs de la méthode et non sur l'auteur d'un ouvrage utile (*).

Appendice. 1851; in-8°, pages 405-532.

M. Joseph Bertrand, maître de conférences à l'École normale supérieure, a publié, en 1850, un *Traité élémentaire d'Algèbre* (tome IX, page 439); sous le titre d'*Appendice,* le savant auteur joint un complément, faisant suite au Traité tant pour les chapitres que pour la pagination: on y parle des séries, des suites, du théorème de Descartes, de la résolution des équations numériques, de la méthode des substitutions équidistantes, de la théorie des dérivées

(*) M. Callon, ingénieur des mines, vient de publier une Mécanique du même genre; il en sera rendu compte.

appliquée aux fonctions transcendantes ; en d'autres termes, on donne les principes du calcul aux différences et du calcul aux différentielles, sans nommer ces calculs. Pourquoi ne pas mettre ces deux admirables instruments ouvertement entre les mains des élèves ? La réponse est facile. Cette marche étant indiquée par le bon sens, il y a là une bonne raison pour qu'on ne la suive que le plus tard possible. Comme nous prenons un grand intérêt aux succès du jeune professeur, nous croyons devoir l'avertir que l'esprit de l'ancienne École Polytechnique perce trop dans ses ouvrages ; ainsi il démontre le beau théorème de Bernoulli $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=e$. Soit ; mais à quoi cela est-il *utile ?* Comment déduire d'un tel théorème l'épaisseur d'un tuyau de conduite (*), ne fût-ce que pour des eaux ménagères ? L'auteur veut encore que les élèves s'exercent sur cette belle proposition de Gauss : Si dans $f(x)=0$, où $f(x)$ est une fonction entière algébrique, on remplace x par $x+iy$, on obtient

$$\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=0;$$

si l'on pose ensuite

$$\varphi(x, y)=0; \quad \psi(x, y)=0,$$

les deux courbes représentées par ces équations se coupent orthogonalement. Soit, mais à quoi cela sert-il ? Quelle machine ce théorème met-il en mouvement ? De tels problèmes occasionnent évidemment des pertes de forces vives intellectuelles.

Au résumé, cet excellent opuscule contient les beaux travaux des grands maîtres, que l'on a soin, comme de juste, de ne jamais nommer ; par inadvertance, on a laissé subsister deux noms : celui de l'auteur et celui de Descartes ;

(*) Raison donnée par les programmes.

ils disparaîtront sans doute dans une nouvelle édition, qui ne se fera pas attendre. Puisse le maître des conférences n'avoir pas irrité le Dieu régnant du jour! le poëte au *vers solitaire* a dit :

Le trident de *Neptune* est le sceptre du monde.

L'École Polytechnique fait partie du monde.

MÉMOIRES SUR LA MÉCANIQUE; par M. le chevalier *Du Buat*, capitaine au corps royal du génie; tome I. Paris, 1821; in-4° de 203 pages, 1 planche.

La belle expérience de M. Foucault sur le pendule donne une certaine importance à cet ouvrage, peu répandu. Le tome I seul a paru et ne renferme que trois Mémoires, mais il y est fait mention d'un dixième Mémoire; l'auteur, fils du célèbre hydraulicien, étant mort, il n'y a pas d'apparence que le reste de l'ouvrage soit publié. Dans le troisième Mémoire, page 84, on trouve cette question :

« Un point matériel ou un corps m, attaché par une » verge d'une longueur donnée à un centre C, et sollicité » par une force accélératrice constamment dirigée vers » un centre C', forme ce qu'on appelle un pendule sim- » ple; nous supposons ici non-seulement que le centre C » se meut autour de C', mais encore que le centre C' se » meut autour d'un troisième centre C'', et que le centre » C'' se meut autour d'un quatrième centre fixe C'''; au » lieu de trois centres mobiles, on pourrait en admettre » un nombre quelconque. Nous supposons, de plus, que » les mouvements uniformes et circulaires de tous ces » centres s'exécutent dans le même plan et dans le même » sens. »

Notations :

$$mC = r; \quad CC' = R; \quad C'C'' = R'; \quad C''C''' = R'',$$

ω = angle $C\,C'\,C''$ }
ω' = angle $C'C''C'''$ } à l'origine du mouvement,
ω'' = angle de $C''C'''$ avec une droite fixe $C'''W$ }
i = vitesse angulaire de C autour de C',
i' = vitesse angulaire de C' autour de C'',
i'' = vitesse angulaire de C'' autour de C''',
t = le temps,
φ = angle $m\,CC'$,
g = force attractive constante.

L'auteur parvient à cette équation différentielle

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -g\frac{R\sin\varphi}{K} + Ri^2\sin\varphi \\ &+ R'i'^2\sin[\varphi + \omega + (i - i')t] \\ &+ R''i''^2\sin[\varphi + \omega + \omega' + (i - i')t] \end{aligned}\right\}\text{(page 87)},$$

où

$$K = (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Équation qui n'est intégrable qu'en supposant très-petits φ, $\varphi + (i - i')\,t$, $\varphi + (i - i'')\,t$, de sorte que ces arcs se confondent avec leurs sinus, et leurs cosinus avec l'unité; dans ces suppositions, on obtient

$$\begin{aligned} h\varphi &= hC\sin\left(t\sqrt{\frac{h}{r}} + \theta\right) \\ &+ t[R'i'^2(i - i')\cos\omega + R''i''^2(i - i'')\cos(\omega' + \omega)] \\ &+ R'i'^2\sin\omega + R''i''^2\sin(\omega' + \omega); \end{aligned}$$

$$h = +\frac{gR}{R - r} - Ri^2 - R'i'^2\cos\omega - R''i''^2\cos(\omega' + \omega).$$

C et θ sont deux constantes à déterminer par les valeurs initiales de φ_0, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$; la durée d'une oscillation est

$\pi\sqrt{\frac{h}{r}}$; de là l'auteur déduit : 1° que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ du pendule autour de C est périodique ; 2° que l'angle φ n'est pas périodique ; ainsi le rayon CC′ ne partage en deux parties égales ni l'amplitude, ni la durée d'une oscillation ; 3° que la durée d'une oscillation dépend non-seulement des vitesses angulaires i, i', i'', mais encore des angles ω, ω' à l'origine du mouvement ; 4° que le pendule ne peut rester en repos dans la verticale, à moins que l'on n'ait $i''=i'=i=0$ ou seulement $i''=i'=0$, c'est-à-dire que le pendule ne soit à centres fixes ou à un « seul centre » mobile ; donc un pendule à deux centres ou à plusieurs » centres mobiles, abandonné à lui-même, commence à » se mouvoir, et l'on peut demander quelle est la direc- » tion de son mouvement et quelle est l'amplitude de sa » première oscillation. »

Pour résoudre cette question, l'auteur suppose $i''=0$; ce qui est le cas de la nature ; et nommant φ_1 l'amplitude de la première oscillation, on trouve

$$r\varphi_1 = \pi\left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{3}{2}} R' i'^2 (i - i') \cos\omega,$$

et i étant plus grand que i', la direction est déterminée par le signe de $\cos\omega$: ce résultat s'applique aux pendules qui oscillent à la surface de la terre dans le plan de l'équateur ; on a alors

$$i = \frac{2\pi}{86400} \quad \text{et} \quad i' = \frac{2\pi}{365,25 . 86400},$$

la seconde étant prise pour unité de temps ; i étant le mouvement diurne et i' la projection de la vitesse annuelle sur l'équateur qu'on peut supposer constante pendant un petit nombre de secondes : on suppose aussi constant le rayon vecteur de l'orbite terrestre projeté sur l'équateur et égal à 23578 R et R = 6366195 mètres; l'angle ω est évidemment l'angle horaire du lieu où est situé le pendule, le temps étant compté depuis minuit.

La durée d'une oscillation est

$$\pi\left(\frac{r}{g-0{,}034-0{,}006\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}},$$

quantité variable, dont le maximum correspond à minuit et le minimum à midi pour un pendule de 1 mètre de longueur; et supposant $g = 9{,}7798$, le maximum est $1''{,}00645$ et le minimum $1''{,}00523$.

« Les mêmes données étant substituées dans l'expression de $r\varphi_1$ du déplacement spontané du pendule, on trouve cet arc égal à $0^{\text{m}}{,}0004353 \cos\omega$ ou à $0^{\text{m}}{,}5436 \cos\omega$, en donnant au pendule une longueur de 225 mètres. Or, quoique le signe de l'angle φ' soit négatif, quand l'angle horaire est plus grand qu'un angle droit, il est facile de voir que le déplacement du pendule a toujours lieu vers l'est, etc. » (page 95).

L'auteur finit ainsi : « Dans le Mémoire sur la limite » des durées des oscillations d'un système, après avoir » donné les formules du mouvement des pendules à *une* » *latitude quelconque,* nous en conclurons que la durée » des oscillations est indépendante de la position du plan » vertical, dans lequel le pendule oscille; que la gravité » des corps terrestres est modifiée par le mouvement an- » nuel, ainsi que par le mouvement diurne, et qu'un » pendule abandonné à lui-même dans la verticale, et » dans un lieu *quelconque* de la terre, se meut spontané- » ment. Si ce dernier résultat était vérifié et rendu sen- » sible par l'expérience, on aurait une nouvelle preuve du » mouvement de la terre autour du soleil. Cette preuve » pourrait résulter aussi de l'observation de la marche » d'une horloge astronomique pendant les différentes

» heures du jour et de la nuit. Il est facile en effet de
» conclure de ce qu'on a vu plus haut, que le mouvement
» d'une horloge, réglée par un pendule de 1 mètre de lon-
» gueur, est plus rapide à midi qu'à minuit, dans le rap-
» port de 1,00645 à 1,00583 ou dans le rapport de
» 7204,44 à 7200; en sorte que si l'horloge a marqué
» 7200″ pendant un certain temps, pris au milieu de la
» nuit, elle marquera 7204″ pendant le même temps,
» pris au milieu du jour. En comparant donc l'horloge à
» un garde-temps très-exact, pendant les intervalles de
» onze heures du matin à une heure du soir, et de onze
» heures du soir à une heure du matin, elle avancera de
» quatre secondes environ, dans le premier de ces inter-
» valles; nous supposons l'expérience faite à l'équateur,
» car à une latitude un peu élevée l, les variations dans
» la marche d'une horloge, calculées d'après la formule

$$\pi\left(\frac{r}{g - 0^{m},034\cos^{2}\varphi - 0^{m},006\cos l\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}},$$

» qui est celle de la durée d'une oscillation du pendule,
» dont la longueur est r, sont tout à fait insensibles, à
» moins que la longueur r ne soit très-grande. »

Nous voyons, d'après ce qui précède, que Du Buat a traité la question générale et qu'il a trouvé nécessairement que l'axe du pendule décrit une surface apparente gauche dirigée vers l'est; résultat confirmé par l'ingénieuse observation de M. Foucault; mais pour démontrer le mouvement de la terre, Du Buat emploie la durée des oscillations, ce qui exige à nos latitudes un pendule très-long, parce que r entre au numérateur. Au résumé, le pendule offre trois moyens de prouver le mouvement de la terre : 1° la durée des oscillations; 2° l'amplitude des oscillations; 3° le déplacement du plan d'oscillation. Du Buat a indiqué le premier moyen, il a dû nécessairement connaître le troisième moyen que M. Foucault a réalisé si heureusement. Ces expériences réussiraient beaucoup mieux dans les hautes latitudes, telles que Stockholm, Tornea, etc. La durée des oscillations variant avec l'heure du jour, cela ne nécessite-t-il pas, à une époque d'extrême précision, quelques nouvelles corrections à faire dans les observations du pendule?

Depuis que ceci est écrit, M. Binet a donné une théorie analytique rentrant dans celle de Du Buat; M. Foucault a fourni une ingénieuse explication géométrique, de même que M. Poinsot. Ces considérations, purement géométriques, ne sont pas encore d'une parfaite clarté. (Voir les *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXXII, pages 157, 197 et 206.)

Nous venons de recevoir les deux ouvrages suivants, auxquels nous ferons de nombreux emprunts.

1. Mathematische Abhandlungen. Mémoires de Mathématiques; par le docteur *Oskar Schlömilch*, professeur de hautes mathématiques à l'École royale technique de Dresde en Saxe. In-8° de 150 pages.

Voici le contenu :

1°. *Mémoire sur la série de Mac-Laurin*. On donne une discussion très-claire, très-détaillée sur le caractère de convergence, la variable ayant pour valeur un *nombre complexe;* ce critérium diffère de celui que M. Cauchy a donné, qui est quelquefois erroné. Nous parlerons bientôt de ce sujet important qui présente un intérêt de circonstance. Tout se déduit de considérations sur la *discontinuité* des fonctions. L'auteur trouve que la série

$$l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{x}{1}-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.3.4}x^5-\ldots$$

n'est convergente que pour une valeur complexe dont le module est moindre que l'unité; lorsque la valeur est réelle, il faut qu'elle soit comprise entre $+1$ et -1.

2°. *Sur la série de Bürmann.* L'auteur déduit de cette série remarquable, presque inconnue en France, la série de Lagrange et encore d'autres, ainsi que plusieurs applications au retour des suites, au calcul intégral.

3°. *Sur les approximations des quadratures.* Il s'agit de la méthode de Laplace pour les évaluations numériques des intégrales définies de la forme $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$ (*Théorie analytique des Probabilités*, livre I, 2ᵉ partie, chapitre III) : cette méthode est complétée et généralisée.

4°. *Sur une intégrale double avec deux fonctions arbitraires.* C'est l'intégale $\int_a^b dx \int_{\psi x}^{\varphi x} f(x, y)\,dy$, avec des applications géométriques.

5°. *Sur l'évaluation de la masse pour des densités variables.* Applications aux surfaces cylindriques et sphériques.

2. Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Communications de la Société des investigateurs de la nature, de Berne (1848, 1849, 1850).

Cette collection renferme des documents précieux pour l'histoire des sciences, en Suisse, patrie de tant d'illustres géomètres, naturalistes et physiciens. On y trouve des Lettres inédites de Haller, de Bonnet (Ch.), de de Saussure, de Bernoulli, de Lambert, etc., etc. Une lettre de de Saussure, datée de Paris, le 24 avril 1768, fait un grand éloge de la bonhomie de Jussieu et de Buffon. Il aime mieux les savants de Paris que les beaux-esprits qui sont d'un orgueil insupportable. « Les uns et les autres donnent » très-peu de temps au cabinet, et sont par conséquent

» peu profonds; les plaisirs, les femmes, et surtout la » passion de voir les grands et de leur faire la cour, » absorbent la meilleure partie de leur temps » (n^{os} 112 et 113 de 1848, page 33). Les choses sont bien changées. Aujourd'hui nos savants ne quittent pas leurs cabinets et deviennent très-profonds. Nous avons un spécimen de cette profondeur dans les célèbres programmes qui terminent si glorieusement la moitié du XIX^e siècle (*). Nous insérerons en entier dans nos *Annales* une Notice *autobiographique* de Bernoulli (Jean I). Tout ce qui se rapporte à cette famille prodigieuse, *unique* dans les fastes du monde, mérite une haute attention. On lit aussi dans ce recueil des descriptions de livres rares, entre autres des Tables logarithmiques de Burgi, retrouvées récemment à la bibliothèque de Munich, et qui ont été composées peut-être avant celles de Néper, quoique publiées postérieurement. Nous devons ces richesses littéraires à M. R. Wolf, secrétaire de la Société depuis 1841, qui enrichit le recueil d'intéressants travaux scientifiques, parmi lesquels nous avons déjà fait connaître d'élégantes propriétés balistiques. Directeur de l'observatoire de Berne, M. Wolf publie les résultats journaliers de ses observations. Nous répéterons ici ce qui est toujours pour nous un sujet d'étonnement. Lorsque notre Observatoire national possède tant d'astronomes pleins de jeunesse, de talent, d'intelligence, guidés par un chef si diversement célèbre, pourquoi la France est-elle aujourd'hui le seul grand

(*) Certes, ce ne sont pas des esprits frivoles qui ont découvert que l'analyse indéterminée, l'élimination, les lieux géométriques, etc., sont inutiles aux élèves. Grâce à ces découvertes, les questions du grand concours seront désormais puisées dans l'arithmétique de Barême; c'est la bonne, on y parle de capitaux, d'intérêts, de salaires, etc.; applications *utiles*, comme s'expriment nos intéressants programmes. Quelle magnifique génération d'Épaminondas, de Léonidas, nous promet un si noble système d'éducation!

pays civilisé où l'astronomie n'ait pas un journal spécial? Est-ce le temps qui manque? Personne n'osera dire cela. Que manque-t-il donc? Serait-ce le zèle, que rien ne remplace et qui remplace tout?

INSTRUCTION POUR LE PEUPLE. Cent Traités sur les connaissances les plus indispensables, etc. 2 vol. in-8°; 1847.

Le *peuple*, c'est vous, c'est moi, c'est tout le monde; je ne connais pas d'autre peuple. Cette dénomination comprend des hommes instruits et d'autres qui, n'étant pas instruits, ont le désir de s'instruire. C'est cette portion du peuple que les *cent* traités ont en vue; ces genres d'ouvrages sont aussi de bonnes actions, et dès lors on n'est pas surpris de voir figurer parmi les collaborateurs le nom d'un ingénieur distingué. L'arithmétique et l'algèbre, la mécanique, la théorie et l'histoire des machines à vapeur forment trois traités, qu'on doit à la plume exercée de M. Léon Lalanne, l'auteur si connu de l'*Abaque* (tome V, page 511); genre de lectures toujours attrayantes lorsque l'intelligence s'enrichit sans fatigue, indispensables aux professeurs d'instruction primaire, et qui ne seront pas infructueusement consultées par les professeurs d'enseignement spécial (*).

COURS ÉLÉMENTAIRE DE DESSIN appliqué à l'architecture, à la sculpture, à la peinture, ainsi qu'à tous les arts industriels, etc.; par *Antoine Étex*, statuaire, architecte et peintre. 1 vol. grand in-4° oblong; prix, 30 fr. et 50 fr. sur papier de Chine.

Le prospectus se termine ainsi :

« Il (l'*ouvrage*) s'adresse à tous ceux qui veulent con-
» naître l'art sous ses trois faces : peinture, sculpture et

(*) L'auteur vient de publier une seconde édition refondue de son excellent *Abaque universel* que nous expliquerons prochainement.

» architecture; aux élèves qui étudient les mathéma-
» tiques, comme à ceux qui se destinent à n'importe
» quelle carrière! En même temps, c'est un charmant
» album, très-intéressant pour les gens du monde et les
» amateurs. »

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS TRINOMES, D'APRÈS M. GAUSS.

1. Le Mémoire de l'illustre analyste porte pour titre : *Beitrage zur theorie der algebraischen gleichungen; von* Carl Friedric Gauss; Supplément à la Théorie des équations algébriques. Gottingue, 1849, 1 vol. in-4° de 34 pages. Extrait du tome IV des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Gottingue*.

Ce travail est divisé en deux parties : la première contient la démonstration du principe fondamental de la théorie des équations, que l'auteur a donnée en 1799, et qu'il reproduit sous une nouvelle forme, avec des additions considérables. Cette démonstration est connue en France sous le nom de *Théorème de M. Cauchy*, qui a donné en effet une grande extension à la théorie de M. Gauss. C'est le sujet d'une belle thèse de M. Prouhet (voir *Nouvelles Annales*, tome I, page 438).

2. La seconde partie, la seule qui va nous occuper, est consacrée à la résolution des équations numériques de cette forme

$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0.$$

m, n, e, f sont des nombres *positifs* donnés; m et n peuvent être quelconques : mais, sans nuire à la généralité, on admet que m et n sont des entiers, premiers entre eux. Cette forme renferme quatre cas; mais, comme on peut se borner à la recherche des racines positives, on peut supprimer le cas où tous les signes sont positifs.

Faisons de plus, pour abréger, $\frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$.

Première forme :

$$x^{m+n} + e x^m - f = 0.$$

Introduisons un angle θ, à prendre dans le premier quadrant. A cet effet posons

$$\frac{x^{m+n}}{f} = \sin^2\theta, \quad \frac{e x^m}{f} = \cos^2\theta,$$

d'où

$$x^{m+n} = f\sin^2\theta, \quad x^m = \frac{f\cos^2\theta}{e}, \quad x^n = e\,\mathrm{tang}^2\theta.$$

Éliminant x, on obtient

$$\lambda = \frac{\sin^{2m}\theta}{\cos^{2m+2n}\theta},$$

équation qui sert à déterminer la valeur de θ. En faisant croître θ depuis o jusqu'à 90 degrés, on voit que le second membre de la dernière équation croît depuis o jusqu'à ∞ ; il existe donc une valeur et une valeur seulement, qui satisfait à l'équation: après qu'on aura trouvé θ, une quelconque des équations (1) donnera les valeurs de x.

Lorsque $\theta = 45$ degrés, on a $\lambda = 2^n$; donc, lorsque λ est moindre que 2^n, il faut chercher θ dans le premier octant, et pour $\lambda > 2^n$, il faut chercher θ dans le second octant; on trouve la valeur de θ par la méthode indirecte connue.

Deuxième forme :

$$x^{m+n} - e x^m - f = 0.$$

Posons

$$f x^{-m-n} = \sin^2\theta, \quad e x^{-n} = \cos^2\theta;$$

d'où

$$(1) \qquad x^{m+n} = \frac{f}{\sin^2\theta}, \quad x^n = \frac{e}{\cos^2\theta}, \quad x^m = \frac{f\cot^2\theta}{e},$$

et, éliminant x,

$$\lambda = \frac{\sin^{2n}\theta}{\cos^{2m+2n}\theta}.$$

θ a une valeur réelle et n'en a qu'une seule.

Pour $\lambda < 2^m$, il faut chercher θ dans le premier octant, et pour $\lambda > 2^m$, dans le second octant.

Troisième forme :

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0.$$

Posons

$$\frac{x^n}{e} = \sin^2\theta, \quad \frac{fx^{-m}}{e} = \cos^2\theta,$$

d'où

$$(1) \qquad x^{m+n} = f\,\text{tang}^2\theta, \quad x^m = \frac{f}{e\cos^2\theta}, \quad x^n = e\sin^2\theta,$$

et de là

$$\lambda = \cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta.$$

Le second membre s'annule en faisant $\theta = 0$ et en faisant $\theta = 90^\circ$; il existe donc un maximum entre 0 et 90 degrés. Le logarithme de cette fonction est

$$2n\log\cos\theta + 2m\log\sin\theta;$$

la différentielle est

$$(2m\cot\theta - 2n\,\text{tang}\,\theta)\,d\theta;$$

donc le maximum correspond à une valeur θ_1 telle, que l'on ait

$$\text{tang}\,\theta_1 = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Ainsi, pendant que θ croît de 0 à θ_1 (moindre que 90 degrés), la fonction croît et atteint pour $\theta = \theta_1$, la plus grande valeur $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$, et décroît de θ_1 à 90 degrés ou elle devient nulle; lorsque $\theta = 45^\circ$, la fonction est égale à $\frac{1}{2^{m+n}}$; donc on a toujours $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > \frac{1}{2^{m+n}}$, à moins que l'on ait $m = n$; dans ce cas, la valeur maximum devient égale à $\frac{1}{2^{m+n}} = \frac{1}{2^{2m}}$.

On conclut de là, lorsque

$$\lambda > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

qu'aucune valeur de θ ne peut satisfaire à l'équation

$$\lambda = \cos^{2n}\theta \sin^{2m}\theta,$$

et, par conséquent, l'équation

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0$$

n'a aucune racine (positive); et si

$$\lambda < \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

cette équation a deux racines. Dans le cas spécial où

$$\lambda = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

les deux racines de l'équation deviennent égales, et, pour les trouver, on peut employer à volonté l'une quelconque des trois équations

$$x^{m+n} = \frac{fm}{n}, \quad x^m = \frac{f}{e}\,\frac{m+n}{n}, \quad x^n = \frac{em}{m+n}.$$

Cas de deux racines. Si

$\lambda > \frac{1}{2^{m+n}}$ et $m < n$, les deux valeurs de θ sont dans le premier octant;

$\lambda > \frac{1}{2^{m+n}}$ et $m > n$, les deux valeurs de θ sont dans le deuxième octant;

$\lambda < \frac{1}{2^{m+n}}$, une valeur de θ est dans le premier octant et une dans le deuxième octant;

$\lambda = \frac{1}{2^{m+n}}$, une valeur de θ est 45 degrés, et l'autre est dans le même octant que θ_1.

On conclut facilement de l'analyse précédente des trois formes, que l'équation trinôme ne peut avoir plus de trois racines réelles, lorsque m et n n'ont pas de commun diviseur ; ce qu'on sait aussi d'après d'autres principes.

3. Pour résoudre l'équation qui donne la valeur de θ_1, on peut se servir des Tables de logarithmes trigonométriques; mais M. Gauss emploie des Tables auxiliaires extrêmement commodes, qu'il a inventées en 1810, et qui, très-répandues aujourd'hui en Allemagne et en Angleterre, sont encore inconnues en France, même de nos calculateurs de profession. Nous en parlerons très-incessamment; nous ne serions pas compris si nous rapportions aujourd'hui les calculs de M. Gauss, qu'il applique à la résolution de l'équation de la première forme

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0,$$

où

$$\lambda = \frac{6750}{823543}, \quad \log \frac{1}{\lambda} = 2,0863825.$$

On a

$$\lambda < 8; \quad \text{donc} \quad \theta < 45^\circ.$$

On trouve

$$x = 1,9228841;$$

c'est la seule valeur positive.

Racines négatives.

Faisant $x = -y$, il vient

$$y^7 - 28y^4 + 480 = 0,$$

équation de la troisième forme; on a

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750}, \quad \frac{7^7}{3^3.4^4} = \frac{823543}{6912} < \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{1}{\lambda} > 2^7 \quad \text{et} \quad m > n.$$

Ainsi l'on a le troisième cas, et il existe deux racines; on trouve

$$y = 2,4580892, \quad y = 2,5778036.$$

Racines imaginaires.

4. Pour plus de généralité, on suppose que les coefficients sont des nombres *complexes*, et l'équation trinôme prend cette forme

$$(\mathrm{X}) \quad x^{m+n} + e(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)x^m + f(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0.$$

On admet encore que m et n sont premiers entre eux; e et f sont des nombres positifs. Si le coefficient de x^m est réel, alors on a

$$\varepsilon = 0, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 180°;$$

de même, si la quantité toute connue est réelle, on a

$$\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi = 180°:$$

nous donnons aux racines la forme connue

$$r(\cos\rho + i\sin\rho).$$

Ordinairement on suppose que r est positif; mais pour notre but, il est plus avantageux de ne pas admettre cette supposition, mais d'admettre que ρ est compris entre 0 et 180 degrés. Lorsque les coefficients de l'équation (X) sont réels, le nombre de valeurs de ρ se réduit à moitié, car une des valeurs étant comprise entre 0 et 90 degrés, il faut prendre une autre racine $180° - \rho$, et remplacer r par $-r$; à chaque racine $t + iu$ correspond une autre racine $t - iu$.

5. Divisant l'équation (X) par x^{m+n}, on obtient

$$1 + e(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)x^{-n} + f(\cos\varphi + i\sin\varphi)x^{-m-n} = 0;$$

remplaçant x par sa valeur $r(\cos\rho + i\sin\rho)$, on a

$$1 + er^{-n}[\cos(n\rho - \varepsilon) - i\sin(n\rho - \varepsilon)]$$
$$+ fr^{-m-n}\{\cos[(m+n)\rho - \varphi] - i\sin[(m+n)\rho - \varphi]\} = 0.$$

Égalant à zéro, la partie imaginaire, on déduit une valeur de r^m en fonction de ρ.

Si l'on divise l'équation (X) successivement par son deuxième et son troisième terme en opérant comme ci-dessus, en égalant à zéro la partie imaginaire et réunissant les résultats, on obtient

$$(1)\qquad \begin{cases} r^m = -\dfrac{f\sin[(m+n)\rho-\varphi]}{e\sin(n\rho-\varphi)}, \\[2ex] r^{m+n} = -\dfrac{f\sin(m\rho+\varepsilon-\varphi)}{\sin(n\rho-\varepsilon)}, \\[2ex] r^n = \dfrac{e\sin(m\rho+\varepsilon-\varphi)}{\sin[(m+n)\rho-\varphi]}; \end{cases}$$

chacune de ces équations est d'ailleurs une conséquence des deux autres.

Éliminant r entre deux quelconques d'entre elles, on a

$$(2)\qquad \lambda = (-1)^{m+n}\frac{\sin^m(m\rho+\varepsilon-\varphi)\sin^n(n\rho-\varepsilon)}{\sin^{m+n}[(m+n)\rho-\varphi]}$$

ou

$$\lambda = \frac{f^n}{e^{m+n}};$$

ainsi λ est essentiellement positif.

Cette équation détermine les diverses valeurs de ρ; la valeur de r, qui correspond à chaque valeur de ρ, se trouve au moyen d'une des équations (1), de préférence de la deuxième équation, eu égard à la valeur absolue; toutefois, au cas où $m+n$ est pair, il faudra encore avoir recours à l'une des deux autres équations pour décider si r est positif ou négatif.

6. La solution de l'équation (2) s'obtient facilement par voie indirecte; à quoi peuvent contribuer les considérations suivantes :

1°. Les valeurs de ρ sont entre 0 et 180 degrés, et, au cas où les coefficients sont réels, il suffit de chercher la moitié des valeurs, celles qui sont comprises entre o et 90 degrés.

2°. Dans l'un et dans l'autre cas, il faut sous-diviser l'intervalle de o à 90 ou à 180 degrés, au moyen des changements de signe qu'on observe dans les valeurs du second membre de l'équation (2), lorsque ρ parcourt toutes ses valeurs de o à 180 degrés; changements qui s'opèrent évidemment lorsque l'un des angles $m\rho + \varepsilon - \varphi$, $n\rho - \varepsilon$, $(m+n)\rho - \varphi$ devient divisible par 180 degrés, et alors cette fonction devient nulle ou infinie. On n'a pas besoin d'avoir égard aux valeurs négatives, puisque λ est essentiellement positif.

7. Cherchons les racines imaginaires de l'équation de ci-dessus,

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0;$$

on a

$$m = 4, \quad n = 3, \quad e = 28, \quad f = 480$$

et

$$\varepsilon = 0, \quad \varphi = 180^\circ.$$

Les équations (1) deviennent

$$r^4 = \frac{480 \sin 7\rho}{28 \sin 3\rho},$$

$$r^7 = -\frac{480 \sin 4\rho}{\sin 3\rho},$$

$$r^3 = -\frac{28 \sin 4\rho}{\sin 7\rho};$$

l'équation (2) donne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750} = \frac{\sin^7 7\rho}{\sin^3 3\rho \sin^4 4\rho}.$$

L'équation a trois racines réelles et, par conséquent, quatre racines imaginaires. Il faut donc chercher deux valeurs de ρ comprises entre o et 90 degrés.

On forme facilement le tableau suivant des diverses valeurs de la fonction en ρ, qui établissent des changements de signe,

$$\begin{array}{lll} \rho = & 0^\circ \ldots\ldots\ldots & + \dfrac{823543}{6912} = \dfrac{7^7}{3^3 . 4^4}, \\ & 25^\circ \frac{5}{7} \ldots\ldots\ldots & + 0, \\ & 45^\circ \ldots\ldots\ldots & - \infty, \\ & 51^\circ \frac{3}{7} \ldots\ldots\ldots & - 0, \\ & 60^\circ \ldots\ldots\ldots & + \infty, \\ & 77^\circ \frac{1}{7} \ldots\ldots\ldots & - 0, \\ & 90^\circ \ldots\ldots\ldots & + \infty; \end{array}$$

ainsi les deux valeurs de ρ sont comprises entre $51 \frac{3}{7}$ et 60, et entre $77 \frac{1}{7}$ et 98. L'auteur trouve pour première valeur,

$$\rho = 57^\circ 41' 41'',366,$$

et, d'après la seconde équation (r^7), on trouve

$$\begin{array}{rl} \log \sin 4\rho = & 9,8891425\, n \\ \text{compl.} \log \sin 3\rho = & 0,9193523 \\ \log(-480) = & 2,6812412\, n \\ \hline 7 \log r = & 3,4897360 \\ \log r = & 0,4985337, \end{array}$$

(La lettre n désigne que le nombre est négatif.)

et

$$x = + 1,6843159 + 2,6637914\, i,$$

et aussi

$$x = + 1,6843159 - 2,6637914\, i,$$

et la seconde valeur de $\rho = 86^\circ 19' 13'',342$

$$\begin{array}{rl} \log \sin 4\rho = & 9,4049540\, n \\ \text{compl.} \log \sin 3\rho = & 0,0081108\, n \\ \log(-480) = & 2,6812412\, n \\ \hline 7 \log r = & 2,0943060\, n \\ \log r = & 0,2991866\, n \end{array}$$

Si l'on veut que r soit positif, il suffit d'augmenter ρ de 180 degrés, et de prendre $\rho = 266^\circ 19' 13'',342$.

8. Ainsi les sept racines de l'équation

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0$$

sont

$$\begin{array}{l} +1,9228841 \\ -2,4580892 \\ -2,5778036 \\ +1,6843159 \pm 2,6637914\, i \\ -0,1278113 \pm 1,9874234\, i \end{array}$$

La somme des racines est $+0,0000005$; ce qui s'accorde avec la vraie valeur (zéro) autant qu'on peut l'espérer, en faisant usage des Tables avec sept décimales; cherchant le logarithme du produit de ces racines, on trouve

$$2,6812411,$$

qui s'approche suffisamment du logarithme de 480.

MÉTHODES POUR TROUVER LES VALEURS APPROCHÉES DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Nota. L'une de ces méthodes se rapporte aux équations trinômes et l'autre aux équations générales; elles nous ont été indiquées par M. Piobert, avec une application à l'équation de M. Gauss traitée dans l'article précédent; il a bien voulu en permettre la publication.

Première méthode.

1. Soit l'équation

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0.$$

Supposons $m > n$; faisant $m - n = p$, l'équation peut se mettre sous la forme

$$x^{m+n-p} + ex^{m-p} - fx^{-p} = 0;$$

or

$$m + n - p = 2n.$$

Et $m - p = n$; on a donc

$$x^{2n} + ex^n - fx^{-p} = 0.$$

Résolvant comme une équation du second degré, on obtient

$$x^n = -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^2 + fx^{-p}}.$$

Occupons-nous des racines positives. Si a est une limite supérieure de x, on a évidemment

$$x > \left(-\frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4}e^2 + fa^{-p}}\right)^{\frac{1}{n}},$$

limite inférieure; en la substituant dans la valeur de x^n, on obtient une limite supérieure, et ainsi de suite.

2. *Équation de Gauss.* Soit

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0.$$

Il est évident qu'on doit avoir

$$28x^4 < 480; \quad \text{d'où} \quad x < 2,0348;$$

et même $x < 2$. L'équation donnée peut prendre la forme

$$x^6 + 28x^3 = \frac{480}{x},$$

d'où

$$x = \left(-14 + \sqrt{196 + \frac{480}{x}}\right)^{\frac{1}{3}} = f(x).$$

Substituant dans $f(x)$ la limite supérieure 2, on a pour limite inférieure

$$1,902 < x,$$

et de là

$$1,9287 > x, \quad 1,9213 < x.$$

Ces substitutions successives donneraient des valeurs de plus en plus approchées ; mais l'on peut accélérer l'opération à l'aide de cette observation : pour des points situés sur une droite, les variations des ordonnées sont constamment proportionnelles aux variations correspondantes des abscisses ; il en est de même pour de très-petits arcs de courbe. En d'autres termes, les variations de x et de $f(x)$, pour des limites très-resserrées, sont sensiblement proportionnelles. Or, nous voyons que x croissant de 1,902 à 1,9287, augmentant ainsi de 0,0267, fx décroît de 1,9287 à 1,9213, ou de 0,0074. Si donc x devient $1,9287 - \delta$, alors $f(x)$ devient $1,9213 + \frac{74}{267}\delta = 1,9213 + 0,277\,\delta$; or l'on doit avoir $x = f(x)$, ou

$$1,9287 - \delta = 1,9213 + 0,277\,\delta;$$

d'où l'on tire

$$\delta = \frac{0.0074}{1,277} = 0,0058,$$

et

$$x = 1,9287 - 0,0058 = 1,9229.$$

Cette valeur donne, pour une plus grande approximation,

$$f(x) = 1,9228798.$$

Or

$$1,9229 - 1,9228798 = 0,0000202.$$

Divisant par 1,277, on trouve

$$\delta = 0,00001582,$$

et

$$x = 1,9229 - 0,00001582 = 1,92288418.$$

Et, continuant à procéder de la même manière, on arrive à la valeur

$$x = 1,922884130350 2,$$

beaucoup plus approchée que celle de M. Gauss.

3. *Racines négatives*. **Faisant** $x = -y$, il vient

$$y^7 - 28y^4 + 480 = 0;$$

d'où

$$y = \left(14 + \sqrt{196 - \frac{480}{y}}\right)^{\frac{1}{3}} = f(y);$$

on doit avoir

$$196 > \frac{480}{y}; \quad \text{d'où} \quad y > 2,44897.$$

Le cube de cette quantité étant $14,68775$, le radical doit être plus grand que

$$0,68775, \quad \text{ou} \quad 196 - \frac{480}{y} > 0,473, \quad y > 2,4549.$$

D'un autre côté, on doit avoir

$$y^7 < 28y^4, \quad \text{ou} \quad y^3 < \sqrt[3]{28}, \quad y < 3,0368;$$

substituant $y = 3$, $f(y)$ se réduit à $\sqrt[3]{20}$; d'où

$$y < \sqrt[3]{20}; \quad \text{ou} \quad y < 2,71442.$$

On trouve de même avec cette limite supérieure que $\frac{480}{y}$ ne peut descendre au-dessous de 177, et que y est $< 2,64$, et ensuite on parvient à $y < 2,61$. Ainsi les racines sont comprises entre $2,4549$ et $2,61$; ces deux limites se rapprochant peu l'une de l'autre, et toutes deux rendant $f(y) < y$, il convient d'essayer une valeur intermédiaire, telle que $2,5$ qui donne $f(y) > y$: donc $2,5$ est compris entre deux racines. En effet, ces racines sont

$$2,4580891142 \quad \text{et} \quad 2,5778034287.$$

Ainsi les dernières décimales données par M. Gauss sont trop fortes.

4. Par cette méthode, les premières approximations peuvent s'obtenir d'une manière très-expéditive, en em-

ployant la Règle à calcul; les dernières seules exigent l'emploi des Tables de logarithmes.

5. Ce procédé s'applique avec succès à beaucoup de cas; par exemple à l'équation suivante, qu'on rencontre dans les Éléments d'Algèbre,

$$9x^3 - 24x^2 + 16x - 0,001 = 0:$$

les trois valeurs sont réelles, et deux diffèrent très-peu. La plus petite racine est donnée rapidement par les approximations suivantes :

$$a = \frac{0,001}{16} = 0,0000625;$$

$$a' = \frac{0,001 + 24a^2}{16} = 0,0000625585937;$$

$$a'' = \frac{0,001 + 24a'^2 - 9a'^3}{16} = 0,0000625585936227.$$

Appliquant ensuite la méthode, on met la proposée sous la forme,

$$x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{16}{9} - \frac{0,001}{9x} = 0;$$

d'où

$$x = \frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{0,001}{x}}.$$

On obtient ainsi sans difficulté les deux racines voisines

$$1,3424 \quad \text{et} \quad 1,3242.$$

Seconde méthode.

6. Dans cette seconde méthode, on fait usage de la proposée non résolue, et l'on emploie les logarithmes et leurs différences, de manière à pousser très-loin les approximations par une seule substitution; mais pour cela il faut opérer avec plus de précision qu'on ne le fait ordinairement. En effet, dans les logarithmes donnés par les Tables, le septième chiffre n'étant exact qu'à une demi-unité près de cet ordre, le logarithme de la puissance $n^{ième}$ d'un nombre

peut n'être exact qu'à $\frac{n}{2}$ unités du septième ordre décimal, ce qui est insuffisant.

De même la *différence* de deux logarithmes tabulaires, consécutifs, peut être en erreur de près d'une unité. Pour obvier à cet inconvénient, il faut, s'il est trop long de la calculer par les méthodes connues, prendre la différence de deux logarithmes comprenant entre eux celui qu'on considère, puis la diviser par le nombre de rangs qui les sépare, et qui, pour plus d'exactitude, doit être égal au nombre de termes de la série, après lesquels les différences tabulaires irrégulières reparaissent.

7. Cela posé, prenons l'exemple traité ci-dessus; on a trouvé pour valeur approchée de l'inconnue, $1,9229 = a$; substituant cette valeur dans la proposée, elle se réduit à $+0,01822$. Les différences des logarithmes, prises comme il a été indiqué, sont, pour les unités du quatrième ordre décimal,

$$\begin{array}{rl} 225,84 & \text{pour } a, \\ 1,1345 & \text{pour } 28a^4, \\ 4,465 & \text{pour } a^7. \end{array}$$

Si $a+\delta$ est substitué dans la proposée à la place de x, δ exprimant aussi des unités du quatrième ordre décimal, cela revient à écrire :

$$7 \cdot \frac{225,84\,\delta}{4,465} + 4 \cdot \frac{225,84\,\delta}{1,1345} + 182,2 = 0;$$

d'où

$$\delta = -\frac{182,2}{1150,048} = -0,1585;$$

$$x = 1,9229 - 0,00001585 = 1,92288415.$$

Pour pousser l'approximation plus loin, on substitue dans la proposée le nombre $1,9228841$. Mais il faut avoir son logarithme, avec au moins 8 décimales; on le déduit de celui de $19229 = 7.41.67$, que l'on peut obtenir à 20 et même à 61 décimales au moyen des Tables auxiliaires placées à la suite des Tables de Callet; la proposée devient égale à

$$-0,0000349\text{I} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{0,349\text{I}}{1150,048} = 0,0003035;$$

d'où

$$x = 1,92288413035 \quad \text{racine positive.}$$

8. *Première racine négative*. Le résultat de la substitution de $2,46$, dans l'équation en y, donne $-0,2248$, et l'on en déduit $y = 2,458089$. Pour approcher davantage, il est nécessaire d'avoir le logarithme de cette valeur avec une grande exactitude; on le déduit de $244808 = 16.27.569$, et la substitution donne

$$+0,0000136;$$

par suite,

$$7.\frac{176,7\,\delta}{0,801} - 4.\frac{176,7\,\delta}{4,2483} + 0,136 = 0;$$

d'où

$$\delta = \frac{0,136}{119,52} = 0,00114, \quad \text{et} \quad y = 2,458089114.$$

9. *Deuxième racine négative*. D'après M. Gauss, cette racine est $2,5778036$; pour pousser plus loin l'approximation, le logarithme de ce nombre se déduit de celui de $25775 = 25 . 1031$; la substitution donne

$$+0,0000234,$$

et l'on a

$$7.\frac{168,5\,\delta}{0,574} - 4.\frac{168,5\,\delta}{3,513} + 0,234 = 0;$$

d'où

$$\delta = -0,001713, \quad \text{et} \quad y = 2,57780342 87.$$

SUR LES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS.

1. Théorème. *Soit l'équation (algébrique à coefficients réels) ordonnée suivant les puissances décroissantes de*

l'inconnue

$$Ax^p + A_1 x^q + A_2 x^r + \ldots = 0;$$

le dernier terme n'est pas nul.

On suppose de plus que $p - r$ et $q - r$ sont premiers entre eux; cette équation ne peut avoir plus de $r + 3$ racines réelles.

Démonstration. Prenons les dérivées successives du premier membre jusqu'à la dérivée de l'ordre r, et égalons ces dérivées à zéro; l'équation dérivée de l'ordre r est de la forme

$$ax^{p-r} + bx^{q-r} + c = 0.$$

Cette équation n'a pas plus de trois racines réelles; donc, d'après le théorème de Rolle, la dérivée qui la précède n'a pas plus de quatre racines réelles, et, remontant jusqu'à l'équation donnée, on trouve qu'elle n'admet pas plus de $r + 3$ racines réelles.

Observation. Si r et p sont de même parité, il est évident que l'équation ne peut avoir plus de $r + 2$ racines réelles.

2. Soient

$$B_1 x^{p'} + B_2 x^{q'} + B_3$$

les trois derniers termes de l'équation; les trois premiers termes de l'équation aux racines inverses seront

$$B_3 y^p + B_2 y^{p-q'} + B_1 x^{p-p'} + \ldots = 0.$$

Si donc p' et q' sont premiers entre eux, cette équation ne peut avoir plus de $p - p' + 3$ racines réelles; cette limite appartient évidemment aussi à l'équation donnée.

QUESTIONS.

230. Deux polygones quelconques de $2n$ côtés sont équivalents quand leurs côtés ont les mêmes milieux.

(PROUHET.)

231. La surface d'un polygone de $2n$ côtés ne change pas lorsque tous les sommets de rang pair ou tous les sommets de rang impair décrivent des droites égales et parallèles. (PROUHET.)

232. P_1 étant l'aire d'un polygone convexe de n côtés; P_2 l'aire d'un polygone ayant pour sommets les milieux des côtés du premier polygone; P_3 l'aire d'un polygone ayant pour sommets les milieux des côtés du second polygone, et ainsi de suite; on a

$$P_1 - \frac{n^2-2^2}{2.3}P_2 + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.3.4.5}P_3 - \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.3.4.5.6.7}P_4\ldots$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{n^2-2^2.n^2-4^2\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2.3\ldots n-1}P_{\frac{n}{2}} = 0,\quad n \text{ pair};$$

$$P_1 - \frac{n^2-1^2}{1.2}P_2 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}P_3\ldots$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2.3\ldots(n-1)}P_{\frac{n-1}{2}} = 0, n \text{ impair}.$$

(PROUHET.)

233. T étant l'aire d'un triangle rectiligne; r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit; a, b, c, les trois côtés: ceux-ci sont racines de l'équation

$$z^3 - \frac{2T}{r}z^2 + \left(\frac{T^2}{r^2} + 4Rr + r^2\right)z - 4RT = 0.$$

Les quantités $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, sont racines de l'équation

$$u^3 - \frac{2T}{r}u^2 + 4r(4R+r)u - 8rT = 0.$$

Si l'on applique à ces équations le théorème de Sturm, il faut, pour la réalité des racines, que l'on ait: 1° $R \geqq 2r$;

2° que T ne tombe pas hors des limites

$$r\left[2R^2 + 10Rr - r^2 \pm 2\sqrt{R(R-2R)^3}\right].$$

Lorsque $R > 2r$ et que T est égal à une de ces limites, le triangle est isocèle; si $R = 2r$, les deux limites se confondent, T devient égal à cette limite, et le triangle est équilatéral. (C. Ramus, *de l'Univ. de Copenhague.*)

234. Soit l'équation

$$(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_{2n-1})$$
$$+ b^m(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n}) = 0;$$

b est un nombre positif; m un nombre entier positif; les $2n-1$ différence a_1-a_2, a_2-a_3, $a_3-a_4, \ldots, a_{2n-1}-a_{2n}$ sont positives; les n racines de l'équation sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et $a_4, \ldots, a_5$ et $a_6 \ldots$

(Richelot.)

235. Résoudre en nombres rationnels l'équation $x^y = y^x$. (Goldbach.)

236. Si $x^2 + 2ay^2$ est un carré, $x^2 + ay^2$ est la somme de deux carrés.

237. Soit

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}; \quad n_q = \frac{n!}{(n-q)!};$$

où $n!$ désigne le produit $1.2.3\ldots n$. On a

$$S_n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} n_{n-1} S_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(Arndt.)

CORRESPONDANCE.

1. M. Neorouzian, élève du collége Sainte-Barbe, annonce et démontre ce théorème : ABC étant un triangle circonscrit à un cercle, A′, B′, C′ étant les points de contact, on a l'inégalité

$$4\,\text{aire}\,.\,A'B'C' < \text{aire}\,ABC.$$

2. M. le professeur Nievengloski nous a adressé une solution de la démonstration du théorème de M. Steiner; elle ne diffère pas essentiellement de celle de M. Hément (page 119).

3. M. Achille Deshons, sorti d'une école primaire rurale, maintenant élève de M. Haillecourt au lycée de Nîmes, et n'ayant que quinze mois d'étude, nous a adressé deux bonnes solutions d'une question du grand concours d'élémentaires de 1845 et d'une des questions du grand concours d'élémentaires de 1850.

4. M. Haillecourt rappelle ce moyen mnémonique donné par Mauduit, pour la résolution des triangles sphériques rectangles : Tracez un *pentagone* et écrivez successivement sur les côtés, en allant dans le même sens, les cinq quantités a, B, $90° - c$, $90° - b$, C; on applique ensuite à chaque côté (considéré comme arc) ce double principe :

1° cos (un côté) = produit des sinus des côtés opposés.

2° cos (un côté) = produit des cotang. des côtés adjacents.

Du reste, Mauduit distribue les cinq éléments autour d'un triangle, en faisant abstraction de l'angle droit A, dans cet ordre C, a, B, $90° - c$, $90° - b$; C et B sont placés aux angles (voir *Astronomie* de Delambre, t. I, p. 204). C'est à l'obligeance de M. Caillet, examinateur d'hydrographie, que je dois ce renseignement. (*Voir* Francœur, *Mathématiques pures*; 4e édition, tome II, page 273.)

5. La *Biographie universelle* (Michaud) mentionne l'ouvrage suivant de Ceva (Jean) : *De re nummaria quoad fieri potuit, geometricè tractata*. Mantua, 1711, in-4°. On désire connaître le contenu de cet ouvrage qui ne

se trouve pas dans les bibliothèques publiques de Paris.

6. M. J. Murent, de Clermont-Ferrand, nous fait observer que trois des théorèmes énoncés t. IX, p. 281, ont déjà été démontrés par M. Page (t. I, p. 65); et M. Murent en donne de nouvelles démonstrations directes.

7. M. Édouard Dewulf, élève du lycée de Douai, classe de M. David, donne le développement de $\sum_1^n \sin a_n$ et $\sum_1^n \cos a_n$, en écrivant

$$\sum_1^n \cos a_n + i\sum_1^n \sin a_n = e^{i\Sigma_1^n a_n} = e^{ia_1}.e^{ia_2}\ldots e^{ia_n};$$

remplaçant ensuite e^{ia_1}, $e^{ia_2}\ldots$ par les séries connues, on trouve les formules connues (*voir* t. I, p. 345); c'est la marche suivie par Bernoulli (J.), auteur de ces formules.

Le même élève nous a adressé une solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Normale, en 1849; il fait observer que le théorème de M. Steiner (t. IX, p. 12) donne une solution simple de ce problème de trigonométrie, proposé par MM. Briot et Bouquet : On a une circonférence dont le centre est I; on mène le diamètre AIB; sur ce diamètre, on prend un point C par lequel on mène la corde quelconque OCO'; on a

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,\mathrm{CIO}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,\mathrm{CIO'}} = \text{constante}.$$

Le même élève trouve que le lieu d'un point sur la sphère, duquel menant des arcs tangents à deux petits cercles donnés, le rapport des cosinus de ces arcs étant donné, est un petit cercle (tome IX, page 364). Dans ce genre de problème, il est avantageux d'employer les coordonnées sphériques de M. Borgnet (*voir* t. VII, p. 147).

Observation. On écrit Bernoulli et non Bernouilli, orthographe vicieuse qu'on rencontre fréquemment chez les auteurs français.

SUR UNE FORMULE RELATIVE AU CALCUL INVERSE DES DIFFÉRENCES;

PAR M. E. PROUHET.

1. Soit $f(x)$ une fonction algébrique et entière; supposons que l'on substitue à la variable n valeurs en progression arithmétique, depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + (n - 1)h$: la somme des résultats sera une fonction de n que je désignerai par $\varphi(n)$. Nous aurons donc

$$(1) \quad \varphi(n) = f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + \overline{n-1}\,h).$$

Posons de même

$$(2) \quad \psi(n) = f'(a) + f'(a+h) + \ldots + f'(a + \overline{n-1}\,h).$$

Il en résultera

$$(3) \qquad \varphi(n+1) - \varphi(n) = f(a+nh),$$

$$(4) \qquad \psi(n+1) - \psi(n) = f'(a+nh).$$

Mais $\varphi(n)$ est, comme l'on sait, une fonction algébrique et entière de n : de sorte que l'égalité (3), qui a lieu pour une infinité de valeurs de n, puisqu'elle est vraie toutes les fois que n est entier, doit être identique. Nous pourrons donc la différentier par rapport à n, ce qui nous donnera

$$(5) \qquad \varphi'(n+1) - \varphi'(n) = hf'(a+nh),$$

et, en comparant avec (4),

$$(6)\qquad \varphi'(n+1)-\varphi'(n)=h\psi(n+1)-h\psi(n).$$

Si maintenant nous changeons successivement, dans cette égalité, n en $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$, et que nous ajoutions les résultats, nous aurons

$$\varphi'(n+k)-\varphi'(n)=h\psi(n+k)-h\psi(n),$$

ou bien

$$(7)\qquad \varphi'(n)-h\psi(n)=\varphi'(n+k)-h\psi(n+k).$$

Le premier membre de cette égalité est indépendant de k : il doit donc en être de même du second, mais ce dernier est une fonction symétrique de n et de k, et ne peut être indépendant de k sans l'être de n. Il se réduit donc à une constante, et l'on a simplement

$$\varphi'(n)-h\psi(n)=c,$$

ou, suivant les notations usitées,

$$(\mathrm{F})\qquad \frac{d}{dn}\Sigma f(x)=\Delta x\,\Sigma f'(x)+c.$$

C'est la formule que nous voulions établir.

2. On tire de (F), en intégrant,

$$(\mathrm{I})\qquad \Sigma f(x)=\Delta x\int\Sigma f'(x).dn+cn,$$

et il n'y a pas d'autre constante à ajouter, puisque le premier membre doit s'annuler pour $n=0$.

On voit, par là, que $\Sigma f(x)$ se ramène à $\Sigma f'(x)$; de même $\Sigma f'(x)$ se ramène à $\Sigma f''(x)$, et ainsi de suite.

3. Supposons que $f(x)$ soit du degré m; alors $f^m(x)$ sera une constante A, et l'on aura tout d'abord

$$\Sigma f^{(m)}(x)=\mathrm{A}n,$$

d'où l'on tire successivement, en appliquant la formule (I),

$$\Sigma f^{m-1}(x) = \frac{Ahn^2}{1.2} + \frac{B_1 n}{1},$$

$$\Sigma f^{m-2}(x) = \frac{Ah^2 n^3}{1.2.3} + \frac{B_1 hn^2}{1.2} + \frac{B_2 n}{1},$$

$$\Sigma f^{m-3}(x) = \frac{Ah^3 n^4}{1.2.3.4} + \frac{B_1 h^2 n^3}{1.2.3} + \frac{B_2 hn^2}{1.2} + \frac{B_3 n}{1},$$

....

$$\Sigma f(x) = \frac{Ah^m n^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{B_1 h^{m-1} n^m}{m!} + \frac{B_2 h^{m-2} n^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + \frac{B_m n}{1};$$

$B_1, B_2, \ldots, B_m$, désignent des constantes dont on déterminera successivement la valeur, à chaque intégration, en faisant $n = 1$.

4. Proposons-nous maintenant de trouver la somme S_m des $m^{\text{ièmes}}$ puissances de n nombres en progression arithmétique. On sait que le procédé ordinaire consiste à exprimer S_m en fonctions de S_{m-1}, S_{m-2}, etc.; mais on n'arrive ainsi au but qu'à l'aide de substitutions pénibles, et la complication du calcul croît rapidement avec m. Les formules (F) et (I) vont, au contraire, nous fournir un procédé d'une extrême simplicité.

Dans le cas particulier dont il s'agit, on a $f(x) = x^m$, $f'(x) = mx^{m-1}$, et les formules (F) et (I) deviennent

$$(\text{F}') \qquad S'_m = mh\, S_{m-1} + B_m,$$

$$(\text{I}') \qquad S_m = mh \int S_{m-1}\, dn + n B_m.$$

Comme on connaît $S_0 = n$, on aura, d'après (I'),

$$S_1 = h \int n dn + nB_1 = \frac{hn^2}{2} + \frac{2a-h}{2} n,$$

en déterminant la constante B_1 par la condition que le second membre se réduise à a pour $n = 1$. On passera avec la même facilité à S_2, S_3, etc.

Par exemple, si l'on veut avoir les sommes des puissances semblables des termes de la suite naturelle, on fera $a=1$, $h=1$, et l'on obtiendra sans peine les résultats suivants :

$$S_0 = n,$$

$$S_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

$$S_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$S_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$S_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$

$$S_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$$

$$S_6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42},$$

$$S_7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12},$$

$$S_8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30},$$

$$S_9 = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20},$$

$$S_{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66},$$

$$S_{11} = \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \frac{11n^{10}}{12} - \frac{11n^8}{8} + \frac{11n^6}{6} - \frac{11n^4}{8} + \frac{5n^2}{12},$$

etc.

5. La formule démontrée au commencement de cet article n'est pas nouvelle : elle coïncide avec la suivante, citée par Lacroix (*),

$$\frac{d\Sigma u}{dx} = \sum \frac{du}{dx},$$

(*) *Traité des différences et des séries*, page 93.

lorsqu'on y fait $\Delta x = 1$, $n = x$ et que l'on comprend la constante dans le symbole $\sum$; mais la conséquence immédiate à laquelle elle conduit, lorsqu'il s'agit d'une fonction algébrique et entière, ne paraît pas avoir été remarquée.

Au reste, l'utilité de cette formule n'est pas bornée aux seules fonctions algébriques ; elle permet encore de ramener à un problème de calcul intégral ordinaire la sommation d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes. C'est ce que nous allons montrer en commençant par quelques cas particuliers.

1°. Soient

$$y = \Sigma u e^{ax}, \quad y_1 = \Sigma u' e^{ax};$$

la formule donne immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = ay + y_1 + c;$$

équation différentielle du premier ordre qui ramène $\Sigma u e^{ax}$ à $\Sigma u' e^{ax}$. Si donc u est une fonction algébrique et entière de x, alors y dépendra, en dernière analyse, d'une équation de la forme

$$\frac{dz}{dx} = az + c,$$

qui s'intègre immédiatement.

2°. Soient

$$y = \Sigma u \sin bx, \quad z = \Sigma u \cos bx,$$
$$y_1 = \Sigma u' \sin bx, \quad z_1 = \Sigma u' \cos bx;$$

on aura, en différentiant deux fois de suite,

$$\frac{dy}{dx} = bz + y_1 + c,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -b^2 y + bz_1 + y'_1 + c_1,$$

et, en posant $V = bz_1 + y'_1 + c_1$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2 y = V,$$

équation du second ordre qui ramène $\Sigma u \sin bx$ à $\Sigma u' \sin bx$ et $\Sigma u' \cos bx$. On pourra donc trouver $\Sigma u \sin bx$, par une suite de réductions, quand u sera une fonction algébrique et entière de x.

3°. Soient

$$y = \Sigma u\, e^{ax} \sin bx, \quad z = \Sigma u\, e^{ax} \cos bx,$$
$$y_1 = \Sigma u' e^{ax} \sin bx, \quad z_1 = \Sigma u' e^{ax} \cos bx;$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = y_1 + bz + ay + c,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'_1 + b(z_1 + by + az + c_1) + a\frac{dy}{dx}.$$

L'élimination de z entre ces deux équations donnera une équation du second ordre et fera dépendre y de y_1 et de z_1. Il sera donc possible d'obtenir les intégrales demandées, si u est une fonction algébrique et entière de x.

En résumé, le rapprochement des trois résultats qui précèdent montre qu'on pourra trouver

$$\Sigma f(x, \sin bx, \cos bx, e^{ax}),$$

lorsque la fonction f sera algébrique et entière.

Toutes ces applications de la formule $\frac{d\Sigma u}{dx} = \sum \frac{du}{dx}$ ont peut-être été déjà faites; mais comme elles ne se trouvent pas même indiquées dans le grand Traité de Lacroix, et à plus forte raison dans les Traités élémentaires, j'ai pensé qu'il n'était pas inutile d'en dire ici quelques mots.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Éléments de mécanique à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, rédigés d'après le dernier programme d'admission à cette École; par M. *Callon*, ingénieur ordinaire des Mines, professeur suppléant du cours d'exploitation et de mécanique à l'École nationale des Mines de Paris; avec deux planches. Paris, 1851; in-8° de 199 pages.

A aucune époque de notre histoire, la lenteur n'a été une vertu éminemment française; mais depuis l'établissement des chemins de fer, cette passion de la *vitesse* semble avoir augmenté et se manifeste en des occasions où l'on ne s'y attendait guère. Ainsi, dans les *fameux* programmes, on lit en toutes lettres, qu'il faut démontrer certains théorèmes, exposer certaines théories *rapidement*. Cet adverbe est un peu vague. On peut atteindre à plus de précision, à plus d'exactitude. Voici comment. On sait qu'aujourd'hui les successeurs de Lagrange, de Monge, de Fourier, etc., sont placés sous la surveillance de certains capitaines. C'est la position que des enfants de l'École Polytechnique ont faite à leur mère. Inspiré par un si bon exemple, désirant aussi me montrer bon fils, élève reconnaissant envers mes anciens maîtres, je veux contribuer pour ma part à discipliner leurs remplaçants. A cet effet, je propose de placer dans toutes les classes de l'École des espèces de chronomètres. Chaque théorème, chaque théorie, chaque question, aura son coefficient chronométrique, comme on en voit aux morceaux de musique, réglés sur l'instrument de Melzel; le capitaine surveillant, le regard fixé sur le *coefficient du jour*, pourra commander au professeur de ralentir ou de hâter sa démonstration, pour que la leçon s'exécute avec la ponctualité militaire. Nous recommandons cette idée, encore imparfaite, à nos professeurs machinistes; nous pensons, comme eux, qu'il faut réduire science, professeurs, examinateurs, élèves, à l'état de machines; alors nous toucherons à la perfection vers laquelle d'ailleurs nous marchons *rapidement*.

Il paraît que ces dispositions chronométriques commencent à se répandre. Ainsi M. Callon a soin de nous apprendre qu'il a mis *trente-cinq* jours à composer cette Mécanique, et cela malgré de nombreuses occupations professionnelles. L'auteur s'excuse d'avoir mis un temps si court; n'est-il pas trop long? Désormais, rien ne se fera plus vite, plus facilement qu'un traité élémentaire. On prend le programme article par article; on amplifie, on développe, on souffle dedans, et l'on obtient un *volume*.

Tout ouvrage classique ne sera qu'un programme *soufflé* et analogue à certaine composition culinaire de même nom. Nous posséderons bientôt une algèbre soufflée, des arithmétiques soufflées, des géométries soufflées; enfin toute une mathématique soufflée; il suffira d'en faire sortir l'air, pour qu'elle s'aplatisse en programme. Quel immense avantage! comme cela facilite la besogne de la critique! *L'auteur a satisfait aux conditions du programme,* phrase stéréotypée, d'une application *omnibus*. Ces conditions sont-elles bonnes? Hélas, non. Vouloir confisquer toute la mécanique au bénéfice des *machines* est une entreprise funeste, sous le point de vue philosophique et pédagogique. La mécanique rationnelle n'admet que la *vitesse,* notion que la nature donne à tout le monde; tandis que la *mécanique-machine* admet la *force,* la *vitesse,* le *travail élémentaire,* trois êtres *sui generis,* dont chacun a son *théorème de composition* à part. Le *travail élémentaire* n'est pas une idée simple, comme le prétendent nos machinistes; c'est au contraire une idée complexe, dérivée, une conception scientifique que la nature n'inspire pas d'instinct. Nous possédons maintenant deux ouvrages de mécanique, composés d'après le nouveau plan, par MM. Sonnet et Callon, deux hommes de mérite, accoutumés au professorat. Ces ouvrages sont plus difficiles, moins compréhensibles pour les élèves, que les *Éléments* de M. Poinsot. Cela tient non au mode d'exécution, mais aux vices du plan, qu'on ne peut reprocher aux auteurs, puisque ce plan est militairement commandé. L'Université mathématique est entrée dans les attributions du ministère de la Guerre.

L'ouvrage de M. Callon, exécuté d'urgence, très à la hâte, n'est qu'un travail provisoire qui a besoin d'une sévère révision pour la rédaction, l'exposition et la disposition des matières, révision que le savant auteur est, mieux que personne, en état de réaliser.

Si l'on faisait entrer dans le texte de la *Statique* citée quelques notions de physique moléculaire et les théorèmes de rotation que l'illustre auteur a consignés dans des Mémoires isolés, en y joignant les procédés dynamométriques qui donnent la *quantité de travail* de Coriolis, on aurait le meilleur traité élémentaire de mécanique qu'on puisse offrir à la jeunesse libéralement studieuse de nos lycées. Une étude est *libérale* lorsqu'elle a pour but la recherche du *vrai*, l'utilité intellectuelle; tandis qu'une étude qui ne s'applique qu'à la recherche de l'utilité directement *matérielle* est une étude *servile*. Il est fort singulier qu'on ait attendu que nous fussions en république, pour nous soumettre à un enseignement servile! Il y a tant d'autres singularités de ce genre!

ANNONCE.

Application de l'analyse a la Géométrie; par *G. Monge. Cinquième édition, revue, corrigée et annotée* par M. *J. Liouville,* Membre de l'Institut (Académie des Sciences) et du Bureau des Longitudes. Volume in-4° (638 pages), imprimé sur carré superfin des Vosges, avec le portrait de Monge et 5 planches; 1849. Paris, *Bachelier,* imprimeur-libraire. (36 francs.)

Les *livres* se multiplient avec une stérile abondance; les *ouvrages* deviennent d'une excessive rareté. Heureux lorsqu'on fait revivre d'anciens ouvrages; c'est une nouvelle obligation que le public géomètre devra au célèbre académicien. Le volume qu'il édite renferme deux chefs-d'œuvre sur les *surfaces,* l'un de Monge, chef-d'œuvre depuis longtemps épuisé et qu'on ne pouvait consulter que très-difficilement; l'autre est un Mémoire latin de M. Gauss, très-récent, peu connu en France, et qu'on ne saurait trop répandre (*) : le tout est enrichi de sept Notes (en 70 pages) très-précieuses. La première renferme un beau travail inédit de M. Serret, sur les courbes à double courbure, et divers théorèmes que nous devons à MM. Bertrand, Bonnet, Puiseux. Les lignes géodésiques, les tracés dits *géographiques* et la construction des cordes vibrantes sont traités avec cette lucidité qui caractérise le beau talent du savant éditeur. Nous donnerons un extrait étendu de cette importante production, véritable exposition de la

(*) On prépare une traduction qui paraîtra dans les *Nouvelles Annales.*

haute industrie géométrique, où chaque mathématicien, digne de ce nom, voudra faire des acquisitions.

Nous n'apprendrons rien de nouveau à nos lecteurs en faisant ressortir les soins, la correction, l'élégance typographique et graphique (*); mais on regrette qu'on n'ait pas confié aux mêmes presses le monument national élevé à la gloire de Laplace. Puisse-t-on y avoir recours pour Fermat, dont la réimpression, ordonnée législativement en 1843, n'est pas encore commencée en 1851.

On dit qu'on publiera les *Notes sur Diophante* sans le texte; c'est une mesquinerie. La grande nation doit tout faire grandement; ainsi l'entendait *Louis le Grand*, que je suis toujours tenté de saluer en passant sur la place des Victoires, ne fût-ce que pour avoir doté mon pays d'un observatoire et, mieux encore, d'un Cassini.

(O. TERQUEM.)

RECTIFICATION AU SUJET DU THÉORÈME TRIANGULAIRE DE FONTAINE;

PAR M. L'ABBÉ LECOINTE,
Professeur au séminaire de Vals.

Le théorème triangulaire de Fontaine, tel qu'il se trouve énoncé dans ces *Nouvelles Annales* (tome V, page 154, et tome VI, page 71), m'a semblé inexact; aussi j'ai cru devoir en rectifier l'énoncé de la manière suivante :

Un point O, situé dans le plan d'un quadrilatère

(*) M. Bailleul, prote de l'imprimerie de M. Bachelier, a obtenu la *Médaille d'Argent* à l'Exposition de 1849; tous les géomètres applaudiront à cette honorable distinction, si bien méritée.

ABCD, étant considéré comme le sommet commun de six triangles ayant pour bases les côtés et les diagonales du quadrilatère, le produit des aires des triangles qui ont pour bases les diagonales est égal au produit des triangles qui ont pour bases deux côtés opposés, plus le produit des triangles qui ont pour bases les deux autres côtés, si le point O est situé hors du quadrilatère, et si, en même temps, aucun des sommets du quadrilatère n'est situé dans l'intérieur du triangle formé par ce point O et les deux extrémités de l'une quelconque des diagonales, ou bien moins ce même produit dans tous les autres cas.

Du reste, l'inexactitude de l'énoncé de ce théorème, tel qu'il se trouve donné aux endroits déjà cités de ces *Nouvelles Annales*, peut facilement être mise en évidence en supposant le point O situé hors du quadrilatère et sur le prolongement de l'une des diagonales; car, dans ce cas, on devrait avoir

$$\text{OAB} \times \text{OCD} + \text{OBC} \times \text{OAD} = \text{OAC} \times \text{OBD},$$

et comme l'un des triangles OAC, OBD est nul, on aurait

$$\text{OAB} \times \text{OCD} + \text{OBC} \times \text{OAD} = 0;$$

ce qui ne peut être. Donc, etc.

THÉORÈME SUR LA SURFACE D'ÉLASTICITÉ;

PAR M. STREBOR.

Étant donné un ellipsoïde (A) ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et une surface d'élasticité (B) ayant pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = bcx^2 + acy^2 + abz^2,$$

la partie de la surface (A) qui est déterminée par un hyperboloïde homofocal quelconque (H) (ou l'aire d'une ligne de courbure), sera équivalente à la partie de la surface (B) déterminée par le cône asymptotique de l'hyperboloïde (H)

CALCUL DE π AVEC 208 DÉCIMALES.

Dans les *Transactions philosophiques de* 1841, M. Rutherford a donné la valeur de π avec 208 décimales; les 152 premières décimales sont les mêmes que celles qui ont été calculées par M. Dahse (*voir* tome IX, page 12), mais les 56 dernières décimales diffèrent. Voici ces 56 décimales, d'après M. Rutherford :

48473 78139 20386 33830 21574 73996 00825 93125
91294 01832 80651 744.

Le premier groupe 48473 correspond au groupe 48111 de M. Dahse; ainsi l'exactitude des 152 premières décimales est contrôlée.

Observation. — Nous devons ce renseignement à l'obligeance de M. Prouhet.

SOLUTION DE LA QUESTION 196

(voir t. VII, p. 448);

PAR M. E. PROUHET.

L'énoncé doit être rectifié et complété comme il suit :

S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des termes de la suite des nombres naturels de o à n, on aura, si m est impair et plus grand que 1,

$$S_m = n^2(n+1)^2\varphi[n(n+1)] = u^2\varphi(u),$$

en posant $n\ (n+1)=u$, et φ désignant une fonction entière. (Jacobi.)

A quoi j'ajouterai que si m est impair, on aura

$$S_m = n(n+1)(2n+1)\varphi[n(n+1)] = u(2n+1)\varphi(u).$$

Démonstration. Le théorème de M. Jacobi se vérifie directement pour $m=3, 5, 7$: il suffira donc de faire voir que, s'il est vrai jusqu'à un certain nombre impair, il le sera encore pour le nombre impair suivant.

Mais il nous faut auparavant établir une relation entre les sommes dont l'indice est de même parité.

On sait que pour une progression quelconque, dont a et l sont les termes extrêmes et h la raison, on a la formule

$$(\mathrm{P})\quad C^m_1 h S_{m-1} + C^m_2 h^2 S_{m-2} + \ldots + C^m_{m-1} h^{m-1} S_1 + nh^m = (l+h)^m - a^m.$$

Si l'on change a, l, h respectivement en l, a, $-h$, ce qui revient à prendre les termes de la progression dans un autre ordre, S_1, S_2, etc., conserveront la même valeur, et l'on aura

$$-C^m_1 h S_{m-1} + C^m_2 h^2 S_{m-2} + \ldots \pm C^m_{m-1} h^{m-1} S_1 \mp nh^m = (a-h)^m - l^m;$$

d'où, en ajoutant cette formule à (P) et divisant par 2,

$$(\mathrm{R})\quad C^m_2 h_2 S_{m-2} + C^m_4 h^4 S_{m-4} + \ldots = \frac{(a-h)^m + (l+h)^m - a^m - l^m}{2},$$

ce qui est la relation cherchée.

Si maintenant on suppose m impair, $a=1$, $h=1$, $l=n$, cette relation devient

$$C_2 S_{m-2} + C_4 S_{m-4} + \ldots + C^m_{m-1} S_1 = \frac{(n+1)^m - 1 - n^m}{2},$$

ou

$$(\mathrm{N})\qquad C_2 S_{m-2} + C_4 S_{m-4} + \ldots + C^m_{m-3} S_3 = \frac{K}{2},$$

en renvoyant au second membre le terme $C^m_{m-1}S_1 = \frac{mn(n+1)}{2}$ et posant, pour abréger,

$$K = (n+1)^m - 1 - n^m - mn(n+1).$$

On voit que K s'annule pour $n = 0$ et pour $n = -1$, et qu'il en est de même de sa dérivée

$$m(n+1)^{m-1} - mn^{m-1} - m(2n+1);$$

donc K est divisible par n^2 et par $(n+1)^2$.

Maintenant de $u = n(n+1)$ on tire

$$n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1} \quad \text{et} \quad n+1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1},$$

ce qui réduit K à

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1}\right)^m - 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+1}\right)^m - mu;$$

et, comme m a été supposé impair, on voit que les radicaux disparaîtront et que K se réduira à une fonction rationnelle et entière de u.

L'égalité (N) pourra donc se mettre sous la forme

$$C^m_2 S_{m-2} + C^m_4 S_{m-4} + \ldots + C^m_{m-3} S_{m-3} = u^2 F(u),$$

d'où l'on tirera évidemment, pour S_{m-2}, une valeur de la forme $u^2 \varphi(u)$, si $S_3, S_5 \ldots, S_{m-4}$ sont de cette forme.

Le théorème relatif au cas de m pair peut se démontrer d'une manière analogue, ou mieux encore au moyen de la relation

$$S'_{2p+1} = (2p+1) S_{2p},$$

conséquence de la formule (F′), donnée plus haut, page 188, et du théorème précédent, d'après lequel S'_{2p+1} ne peut évidemment renfermer de terme indépendant de n.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Déterminer la courbe dont un arc de longueur l ayant ses extrémités sur deux droites données, parallèles à l'axe des x, soit tel, que le trapèze limité par cet arc, les ordonnées de ses extrémités et l'axe des x, engendre un volume maximum en tournant autour de cet axe.

Démontrer que cette courbe peut être décrite par le centre d'une hyperbole équilatère qui roulerait sans glisser sur l'axe des x.

Nous désignerons par M, M' les droites données, et par A, B les extrémités de l'arc cherché.

Soient, en outre,

x_1, x_2 les abscisses inconnues de A, B;

y_1, y_2 les ordonnées connues de ces points;

s la longueur de l'arc de la courbe pris à partir d'un point situé au delà de A par rapport à B, et s'étendant dans le sens de A vers B jusqu'au point (x, y).

x_1 peut être prise arbitrairement, et nous supposerons $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$.

Le volume dont il s'agit est représenté, d'après cela, par

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx,$$

et l'on doit avoir

$$\int_{x_1}^{x_2} ds = l; \tag{1}$$

ainsi (règle d'Euler) la question revient à la détermination de la courbe qui satisfait aux conditions relatives aux points A, B, et pour laquelle l'intégrale

$$(\mathrm{I}) \qquad \int_{x_1}^{x_2} (y^2\,dx - \lambda\,ds)$$

est un maximum, λ étant une constante qui dépend de l'équation (1).

On a

$$\delta\,ds = \frac{dx}{ds}.d\delta x + \frac{dy}{ds}.d\delta y,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{ds}.d\delta x = \left(\frac{dx}{ds}.dx\right)_{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta x.d_x\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

et

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{ds}.d\delta y = -\int_{x_1}^{x_2} \delta y.d_x\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

car δx_1, δy_1 et δy_2 sont nuls; donc la variation de l'intégrale (I) est représentée par

$$\left[\left(y^2 - \lambda\frac{dx}{ds}\right)\delta x\right]_{x_2}$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} dx\left\{\left[\lambda.\mathrm{D}_x\left(\frac{dx}{ds}\right) - 2y\frac{dy}{dx}\right]\delta x + \left[\lambda\ \mathrm{D}_x\left(\frac{dy}{ds}\right) + 2y\right]\delta y\right\} (*).$$

Pour que cette variation soit nulle, ce qui est la condition commune aux maxima et minima de l'intégrale (I), il faut que

$$(2) \qquad y_2^2 - \lambda\left(\frac{dx}{ds}\right)_{x_2} = 0,$$

$$(3) \qquad 2y\frac{dy}{dx} - \lambda.\mathrm{D}_x\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0;$$

(*) Le mode de calcul employé ici a l'avantage de laisser le choix entre deux équations, dont l'une est immédiatement intégrable.

et cela suffit, car l'équation (3), qui est immédiatement intégrable, ne diffère pas essentiellement de celle qu'on formerait en égalant aussi à zéro le coefficient de δy.

L'intégrale de l'équation (3) est

$$y^2 - \lambda \frac{dx}{ds} = C;$$

mais il faut faire $C = 0$, afin que cette intégrale soit, d'après l'équation (2), vérifiée par les valeurs de y et de $\frac{dx}{ds}$, relatives au point B; on a donc seulement

$$(4) \qquad y^2 - \lambda \frac{dx}{ds} = 0.$$

En remplaçant dans cette équation $\frac{dx}{ds}$ par $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$, puis résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - y^4}}{y^2}.$$

Les courbes qui satisfont à l'équation (5) sont de l'espèce de celles qu'on nomme *courbes élastiques* ou *linteaires* (*).

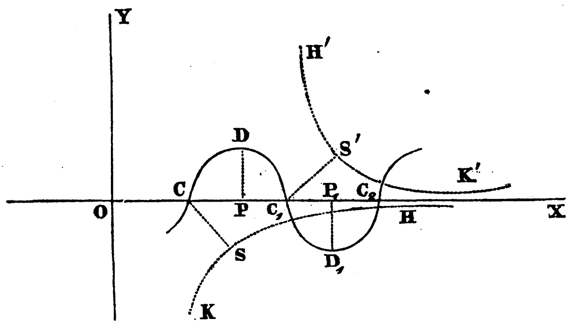
Il est facile d'en reconnaître la forme générale qui ne dépend pas de la valeur de λ, car on aurait évidemment des courbes semblables entre elles si l'on donnait différentes valeurs à cette constante, que l'on peut d'ailleurs regarder comme positive.

On voit d'abord que, pour ne pas créer de solution de continuité, on doit alternativement prendre + et — au second membre de l'équation (5), en changeant de signe lorsque y passe par une valeur qui rend $\frac{dy}{dx}$ nulle.

(*) *Théorie des fonctions*, etc., par M. Cournot, livre V, page 144; *Cours d'analyse*, par M. Duhamel, 2e partie, page 258.

x allant en croissant, si l'on prend premièrement le signe $+$, y doit croître depuis zéro jusqu'à $\sqrt{\lambda}$, car $\frac{dy}{dx}$ est positive; la courbe a donc un arc tel que CD, touché en C par une perpendiculaire, en D par une parallèle à l'axe des x, et concave vers cet axe, car $\frac{dy}{dx}$ est ∞ pour $y = 0$, nulle pour $y = \sqrt{\lambda}$, et diminue constamment de l'un à l'autre. Le point D est un point maximum, car on doit prendre le signe $-$ au delà, et $\frac{dy}{dx}$ change ainsi de signe. Avec le signe $-$, y doit décroître de $\sqrt{\lambda}$ à zéro, et l'on a l'arc DC_1, qui est symétrique de DC par rapport à l'ordonnée DP, puisque $\frac{dy}{dx}$ a des valeurs égales et de signes contraires, sur ces deux arcs, pour la même valeur de y. En continuant de prendre $-$ jusqu'à ce que $y = -\sqrt{\lambda}$, puis en prenant $+$ jusqu'à $y = 0$, on a au-dessous de l'axe des x, l'arc $C_1 D_1 C_2 = CDC_1$.

Enfin, la courbe se compose d'une infinité de parties telles que $CDC_1 D_1 C_2$, se raccordant avec celle-là et entre elles, comme DC_1 se raccorde au point C_1 avec C_1D_1.



Si l'on changeait de signe dans l'équation (5), non-seulement quand y passe par une des valeurs $+\sqrt{\lambda}$ ou $-\sqrt{\lambda}$, mais encore quand y passe par zéro, la courbe qu'on aurait différerait de celle que nous venons de décrire, en ce que les parties placées comme $C_1 D_1 C_2$ se trouveraient du côté des y positives; elle présenterait donc des rebroussements, au lieu d'inflexions, en C, C_1, etc., et offrirait de l'analogie avec la cycloïde au lieu d'en offrir avec la sinusoïde (*).

Les points d'inflexion C, C_1, etc., de la courbe CDC_1D_1,... sont des centres de cette courbe.

On peut remarquer encore que le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'ordonnée. En effet, l'équation (5) donne

$$D_y.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mp \frac{2\lambda^2}{y^3\sqrt{\lambda^2 - y^4}};$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.D_y\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{2\lambda^2}{y^5};$$

donc, comme $\frac{ds}{dx} = \frac{\lambda}{y^2}$, on a

$$-\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda}{2y} \text{ (**)}.$$

Il faut chercher maintenant à déterminer λ. Cette con-

(*) Toutes les fois que l'on connaît la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à une courbe fait avec un des axes, en fonction de la coordonnée qui se compte sur cet axe ou même d'une autre variable, la discussion de la courbe ne présente pas de difficulté réelle. La discussion des courbes du second degré suggère aux commençants l'idée qu'il faut avoir y en fonction de x pour pouvoir reconnaître la plupart des propriétés d'une courbe, et cette idée se maintient longtemps; si l'on disait, dans les cours, quelque chose des courbes du troisième degré, il n'en serait pas ainsi.

(**) *Voir* la Note I.

stante pouvant être regardée comme positive, nous ferons

$$\lambda = \alpha^2.$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (4), remplaçant λ par α^2, $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$ par $1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$, et résolvant par rapport à ds, on obtient

$$ds = \pm \frac{\alpha^2\, dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}},$$

que l'on ramène à

$$ds = \pm \alpha . \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}},$$

en posant

$$y = \alpha u.$$

D'après cela, l'équation (1) devient

$$(6) \qquad \alpha \left(\int_{\frac{y_1}{\alpha}}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} \pm \int_{\frac{y_2}{\alpha}}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} \right) = l,$$

le signe supérieur devant la seconde intégrale se rapportant aux cas dans lesquels l'arc AB coupe M′ entre A et B, et le signe inférieur aux autres.

On voit immédiatement, quand on prend le signe + devant la seconde intégrale, que l'on ne peut avoir plus d'une valeur de α; car les deux intégrales croissent avec α. Il n'est pas aussi facile de constater le même fait, quand on prend le signe —; cependant si l'équation fournissait, avec ce signe, plusieurs valeurs de α plus grandes que y_2, on devrait avoir pour toutes ces valeurs

$$[l - (y_2 - y_1)] - \frac{1}{10}(y_2^5 - y_1^5)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4$$
$$- \frac{1}{24}(y_2^9 - y_1^9)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^8 - \ldots = 0,$$

par le développement des intégrales en séries convergentes. Or cela est impossible; car on tombe sur une équation algébrique en $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4$, à une seule racine positive, quel que soit le rang du terme auquel on s'arrête. Donc l'équation (6) ne donnera pas, en prenant — devant la seconde intégrale, plus d'une valeur de α supérieure à y_2.

On peut supposer que le point B varie sur M′ entre deux positions extrêmes, telles que, pour chaque position intermédiaire, il y ait une courbe de longueur l, dont l'équation se déduirait de l'équation (5) par le changement de y^2 en $y^2 - \mathrm{C}$, et pour laquelle le volume engendré par le trapèze serait un maximum. Or, on demande le *maximum* de ces *maxima*, qu'il est permis de considérer comme les valeurs successives d'une fonction de x_2.

Le calcul ne doit pas conduire plutôt à un maximum qu'à un minimum. Mais la fonction de x_2 dont il s'agit est évidemment très-petite lorsque x_2 diffère très-peu de x_1, ce qui est possible; et, par conséquent, elle doit commencer par croître. Donc, si l'équation (6) ne fournit qu'une valeur de α plus grande que y_2, celle du volume qui y répondra sera un maximum. Et si cette équation fournit deux valeurs de α qui satisfassent à la condition $\alpha > y_2$, l'une donnera un maximum, et l'autre un minimum.

Soit v le volume; on a, d'après l'équation (5),

$$v = \pi\left(\int_{y_1}^{\alpha} \frac{y^4\,dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}} \pm \int_{y_2}^{\alpha} \frac{y^4\,dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}}\right),$$

le même signe devant être pris devant la seconde intégrale que dans l'équation (6).

On trouve facilement que

$$\int \frac{y^4\,dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}} = -\frac{y}{3}\sqrt{\alpha^4 - y^4} + \frac{\alpha^4}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}};$$

et en posant

$$y = \alpha \cos\varphi,$$

on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}} = -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}};$$

donc, il vient

$$v = \frac{\pi}{3}\left[\begin{array}{c} y_1\sqrt{\alpha^4 - y_1^4} \pm y_2\sqrt{\alpha^4 - y_2^4} \\ -\frac{\alpha^3}{\sqrt{2}}\left(\int_{\varphi_1}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} \pm \int_{\varphi_2}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right)\end{array}\right],$$

φ_1 et φ_2 désignant les plus petits arcs positifs qui aient $\frac{y_1}{\alpha}$ et $\frac{y_2}{\alpha}$ pour cosinus.

Enfin cette équation prend la forme

$$v = \frac{\pi}{3}\left\{\begin{array}{c} y_1\sqrt{\alpha^4 - y_1^4} \pm y_2\sqrt{\alpha^4 - y_2^4} \\ + \frac{\alpha^3}{\sqrt{2}}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi_1\right) \pm F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi_2\right)\right]\end{array}\right\}$$

par la notation des fonctions elliptiques (*).

Lorsque α aura deux valeurs, la plus grande valeur de v sera le maximum, et l'autre sera le minimum (**).

Afin de démontrer le théorème qui forme la seconde partie de la question, nous chercherons l'équation de la

---

(*) On trouvera dans le Traité de M. Cournot, au chapitre déjà cité, les expressions de x et de s en fonction de φ.

(**) Un maximum d'une fonction peut être inférieur à un minimum; mais cela n'arrive que s'il y a entre eux un minimum et un maximum.

courbe décrite par le centre d'une hyperbole équilatère roulant sur l'axe des x.

Soient :

$2a$	la longueur de ses axes ;
F, F' et U	ses foyers et son centre, lorsqu'elle touche Ox en M ;
y, y', y_1,	les ordonnées de F, F', U ; et
$MF = r$	et $UMO = \beta$.

On a

$$(1) \qquad y + y' = 2y_1,$$

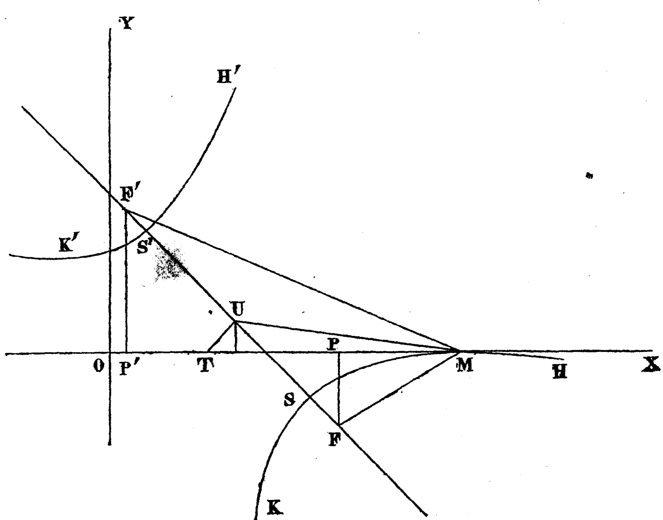
puisque U est le milieu de FF' ;

$$(2) \qquad yy' = -a^2,$$

par une propriété connue de l'hyperbole ;

$$(3) \qquad \frac{y}{y'} = \frac{r}{2a - r},$$

par les triangles semblables PFM et P'F'M ;



et le triangle FMF′ fournit, d'après le théorème sur les médianes,

$$r^2 + (r - 2a)^2 = 2\overline{\mathrm{MU}}^2 + 2\overline{\mathrm{UF}}^2,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad r(r - 2a) = \frac{y_1^2}{\sin^2\beta},$$

en observant que $\mathrm{UF} = a\sqrt{2}$, et que le triangle MUP donne

$$\mathrm{MU} = \pm \frac{y_1}{\sin\beta}.$$

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), on obtient

$$y^2 = \frac{a^2 r}{r - 2a};$$

et l'élimination de y' entre les équations (1) et (3) conduit à

$$y = \frac{r y_1}{a}.$$

En remplaçant y par cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$(5) \qquad r(r - 2a) = \frac{a^4}{y_1^2};$$

et les équations (4) et (5) donnent

$$\frac{y_1^2}{\sin^2\beta} = \frac{a^4}{y_1^2},$$

de laquelle on tire

$$\sin\beta = \pm \left(\frac{y}{a}\right)^2,$$

suppression faite de l'indice de y.

Lorsqu'une courbe est décrite de la manière indiquée, la droite qui joint une position quelconque du point générateur à celui où la courbe roulante touche la ligne fixe est toujours normale à la première courbe (*); donc, si l'on représente par x l'abscisse du point U, dont l'ordonnée est maintenant désignée par y, et par s l'arc du lieu géométrique du centre de l'hyperbole compris entre un point quelconque de ce lieu géométrique et le point (x, y), on a

$$\frac{dx}{ds} = \pm \sin\beta$$

Cette équation et la précédente donnent enfin pour la courbe décrite par le centre de l'hyperbole, l'équation

$$\frac{dx}{ds} = \pm \left(\frac{y}{a}\right),$$

qui ne diffère de l'équation (4) de la première partie que par le changement de λ en $\pm a^2$; et cela démontre suffisamment le théorème en question.

L'hyperbole équilatère pour laquelle $a = \mathrm{DP}$ (*fig.* 1), ayant son centre en C sur Ox, et étant placée de manière que l'asymptote de la branche SH coïncide avec cet axe; à mesure que, par le mouvement de cette courbe, le point de contact se rapprochera de P, le centre U s'élèvera au-dessus de Ox, et il en sera à la distance maxima DP, lorsque l'hyperbole touchera Ox en P par son sommet S (ainsi CP est la différence entre l'asymptote CX et SH); le mouvement continuant dans le même sens, l'hyperbole touchera successivement Ox ou son prolongement par tous les points de la branche SK, et le centre U aura décrit l'arc DC, lorsque l'asymptote de SK sera venue se placer sur Ox. Le sens du mouvement changeant alors, la partie K′S′H′ de l'hyperbole touchera successivement

(*) *Voir* la Note II.

Ox par tous ses points de K′ vers H′, et le centre U décrira au-dessous de l'axe des x l'arc $C_1D_1C_2$, etc., etc.

Note I. On trouve l'équation différentielle des courbes élastiques, en cherchant la courbe dont le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'ordonnée; ainsi, cette propriété est caractéristique.

En effet, on peut prendre

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}=\pm\frac{\alpha^2}{2y}$$

pour l'équation de ce problème, $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ étant une ligne donnée au carré de laquelle le rectangle du rayon et de l'ordonnée doit être constamment équivalent.

Si l'on pose $\frac{dx}{dy}=x'$, cette équation devient

$$\frac{dx'}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{2y\,dy}{\alpha^2},$$

et l'on a, en intégrant de part et d'autre,

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}=\pm\frac{y^2-\beta}{\alpha^2},$$

β étant une arbitraire.

Enfin, en résolvant cette dernière équation par rapport à $x'=\frac{dx}{dy}$, on a

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{y^2-\beta}{\sqrt{\alpha^4-(y^2-\beta)^2}}.$$

Note II. Soient AA′ une courbe tracée dans un plan, BB′ une courbe donnée qui roule sans glisser dans ce plan sur AA′, et M un point qui suive le mouvement de BB′ de manière que ses distances à deux points déterminés de cette courbe ne varient pas.

Supposons qu'on ait marqué sur AA′ des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et sur BB′ les points $b_1, b_2, \ldots, b_n$ qui viendront successivement coïncider avec ceux-là; puis, que des points (a) comme centres, avec des rayons égaux à $b_1\mathrm{M}$, $b_2\mathrm{M}, \ldots, b_n\mathrm{M}$, on ait décrit des circonférences. Ces circonférences formeront un polygone curviligne, dont le contour sera nécessairement coupé en des points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par le lieu géométrique de M. Si l'on prend sur AA′ de nouveaux points entre a_1 et a_2, a_2 et a_3, etc., en conservant ceux-ci, on aura de même un second polygone avec des points intermédiaires entre les points (m), et ainsi de suite.

Or la limite de ces polygones est évidemment un arc $m_1 m_n$ de la courbe décrite par le point M, et les lignes telles que $a_1 m_1$, $a_2 m_2$, etc., sont toutes normales aux côtés correspondants de ces polygones; donc *ces lignes sont aussi normales à l'arc* $m_1 m_2$.

QUESTION ANALOGUE A CELLE DU CONCOURS.

« *Déterminer la courbe passant par deux points*
» *donnés, dont l'arc compris entre ces points engendre*
» *une surface minimum en tournant autour de l'axe*
» *des x, tandis que le trapèze curviligne limité par cet*
» *arc, les ordonnées de ses extrémités, et l'axe des x,*
» *engendre un volume donné.*
» *Démontrer que cette courbe peut être engendrée par*
» *le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule-*
» *rait sans glisser sur l'axe des x.* »

DISCOURS

Prononcé lors de la reprise du Cours de Calcul des Probabilités, à la Faculté des Sciences, le 26 avril 1851;

PAR M. LAMÉ,
Membre de l'Institut.

Messieurs, à l'ouverture de chacune des parties de ce cours, j'ai pris l'habitude de traiter quelque question relative aux sciences exactes, à leur enseignement, ou à leurs applications. D'abord, comme les savants qui ont créé le calcul des probabilités, comme les auteurs qui en ont traité, j'ai dû, dans un discours préliminaire, dire ce qu'était cette science, ce qu'elle pouvait, jusqu'où s'étendait son domaine; afin de justifier son droit de cité, et pour combattre une sorte de défaveur, tenant principalement aux difficultés de son analyse, mais aussi à ses hardiesses, et à ses solutions prématurées.

Depuis, je crois être parvenu à simplifier l'étude des probabilités, de manière à la rendre facilement abordable, sur tous les points, dans toutes les questions relatives à d'importantes applications. En outre, j'ai le bonheur de compter parmi mes amis, un savant (M. Bienaymé) qui aujourd'hui représente presque seul, en France, parmi les géomètres, la théorie des probabilités, qu'il a cultivée avec une sorte de passion, dont il a successivement attaqué et détruit les erreurs; je dois à ses conseils d'avoir bien compris la véritable portée de la science que j'enseigne, et quelles limites elle ne peut franchir sans s'égarer.

Maintenant que la défaveur n'a plus aucune raison d'exister, sa disparition complète n'est plus que l'affaire du temps. Mon discours préliminaire n'y aiderait que fort peu; je pourrais donc m'en dispenser, et, comme on dit, entrer de suite en matière. Mais, à cette défaveur particulière, paraît s'en joindre une autre, plus menaçante, beaucoup plus étendue, et qui embrasserait toutes les mathématiques. Aujourd'hui, sous le prétexte de quelques réformes, peut-être nécessaires, dans l'enseignement des sciences exactes, on s'attaque aux théories et aux savants; on les déprécie, on les repousse, on restreint de plus en plus l'espace qu'ils occupent, pour faire une plus large place aux applications et aux praticiens. Si cet envahissement systématique continue, la véritable science, et ceux qui s'en occupent exclusivement, ne tarderont pas à disparaître. Une telle révolution dans l'enseignement sera-t-elle un progrès, ou une décadence? Je n'ai pu résister au désir d'aborder encore une fois cette question, de l'envisager aujourd'hui sur toutes ses faces, de jeter enfin une sorte de cri, dans l'espoir de conjurer un dangereux orage. Tel est le sujet que je me propose de traiter dans ce discours préliminaire. Que ne puis-je lui donner une force capable d'arrêter la destruction!

D'abord, il me sera facile, sans entrer dans trop de détails historiques, de faire ressortir cette vérité, que les mathématiques doivent les immenses progrès qu'elles ont faits, depuis deux siècles, à l'idée de les appliquer; c'est-à-dire que leur utilité, plus ou moins immédiate, a toujours dicté ces progrès. Remontez à leurs découvertes principales, elles n'apparaissent d'abord que comme des spéculations philosophiques; mais elles sont suivies, de très-près, par des applications importantes qui viennent doubler leur valeur. Et l'on ne saurait trop admirer cette logique cachée, et en quelque sorte instinctive, de l'esprit humain, qui, d'abord découvre et perfectionne l'instrument, puis entreprend hardiment, et à coup sûr, le travail utile pour lequel cet instrument était indispensable.

A peine Descartes et Pascal, Fermat et Leibnitz, ont-ils jeté les fondements de l'analyse appliquée, et du calcul infinitésimal, que Newton découvre le principe de la pesanteur universelle, et explique les lois qui régissent les mouvements des astres. Pour déduire toutes les conséquences de cette découverte, il a fallu un siècle de préparation : l'infatigable Euler, les Bernoulli, d'Alembert, dévoilent successivement toutes les ressources de l'analyse mathématique, et créent la mécanique rationnelle. Lagrange vient compléter, coordonner, simplifier toutes ces acquisitions de la science, et les réduire à un petit nombre de principes. Enfin ses travaux, ceux de Laplace surtout, de Legendre, Poisson, Ivory, de MM. Gauss, Poinsot, Binet, etc., achèvent cette première application des sciences exactes, et ne laissent plus qu'à glaner dans le champ de la mécanique céleste.

Mais une autre application, plus importante peut-être, plus difficile certainement, se prépare depuis longtemps; c'est celle qui concerne l'explication de tous les phénomènes physiques, spontanés sur la terre, ou que nous pouvons y faire naître. De ce côté, la science marche vers de nouveaux principes, analogues à celui découvert par Newton; et tandis que de nombreux expérimentateurs recueillent, sur tous les phénomènes physiques, des lois semblables aux lois de Képler, mais infiniment plus nombreuses et plus compliquées, les géomètres modifient et perfectionnent l'analyse mathématique, afin qu'elle puisse aborder ces lois, pour les calculer, les mesurer, les prévoir, les réduire à un moindre nombre; et, s'il est possible, à une loi unique, qui servira de base à une vaste théorie, à une sorte de *Mécanique terrestre,* dont la Mécanique céleste elle-même ne sera qu'un chapitre particulier. Cette œuvre immense est à peine commencée; mais la réalité incontestable de ses premiers progrès ne permet pas de douter qu'elle ne s'accomplisse un jour, si des réformes exagérées, et intempestives, ne viennent pas éteindre le zèle des travailleurs, et anéantir jusqu'au souvenir de leurs découvertes.

Il me suffira de résumer succinctement ce que les géomètres ont fait depuis cinquante ans, pour justifier pleinement cette assertion. Mais d'abord, rappelons les étonnants progrès des sciences physiques, pendant la même période de temps. La chimie, dégagée de ses langes par la découverte de Lavoisier, est rapidement élevée au rang des sciences les plus fécondes, par les travaux de Bertholet, Chaptal, Gay-Lussac surtout, Dawy, Berzelius, Dulong, Ampère, de MM. Thenard, Chevreul, Dumas, Pelouze, Regnault, Balard, et tant d'autres. La physique proprement dite, dont l'origine, comme science, remonte à peine au delà de Newton, n'avait fait que des pas lents et clair-semés; à l'époque de la découverte de Volta, qui date de 1800, elle prend son essor, et ses découvertes se multiplient rapidement. Malus, Wollaston, Fresnel, MM. Arago, Biot, Brewster, Babinet, découvrent sur la lumière de nouveaux faits, et des lois nouvelles. Gay-Lussac, Saussure, Dalton, Dulong et Petit, plus tard MM. Melloni, Pouillet, Despretz, M. Regnault et son école, font le même travail sur la théorie physique de la chaleur. La découverte d'OErstedt, sa liaison avec celle du magnétisme en mouvement, les travaux antérieurs de Dawy, ceux plus récents d'Ampère, de MM. Becquerel, de la Rive, Faraday, Pouillet, etc., font marcher à pas de géant la théorie physique de l'électricité. A cette science si nouvelle, et d'une fécondité sans exemple, se rattachent, par mille liens, les autres parties de la physique, la chimie, et même les phénomènes de la vie organique, qu'elle semble convier à venir lui demander leur cause, leur raison d'être.

La minéralogie, qui ne consistait d'abord que dans une simple classification factice, devient, après la découverte d'Haüy, une sorte de science rationnelle, fondée sur les propriétés géométriques, physiques et chimiques des substances minérales, cristallisées ou amorphes. Par ses lois naturelles, elle exerce une puissante réaction sur la chimie, et sur toutes les parties de la physique, comme le témoignent les travaux de Beudant, de MM. Mitscherlich, Dufrénoy, Senarmont, Ébelmen, Delafosse, Pasteur, etc. La géologie, qui se bornait à classer les roches, et à recueillir les indices que les différents terrains peuvent offrir, pour signaler la présence des minéraux utiles, devient une science de premier ordre, par les travaux de M. Élie de Beaumont sur l'âge relatif des révolutions du globe, par ceux de Brochant, Brongniart, de MM. de Buch, Cordier, Dufrénoy, Constant Prevost, etc. Enfin tous ces divers chapitres de l'histoire physique de notre globe, joints à la météorologie, et aux faits du magnétisme terrestre, sont coordonnés par les travaux de MM. de Humboldt, Arago, Duperrey, Kaëmtz, etc.

En présence de cette abondante moisson de faits nouveaux, les géomètres ne pouvaient rester inactifs. Habitués à déduire rapidement les conséquences d'un principe ou d'une loi posée, ils aident d'abord puissamment aux travaux des expérimentateurs, les excitent, et les prévoient : plus d'une découverte physique n'a été que la vérification d'une de leurs prévisions. Puis ils cherchent à poser les fondements d'une théorie mathématique des nouveaux phénomènes. Ainsi font Malus, Ampère, ou les inventeurs eux-mêmes; et surtout Fresnel, qui, par sa théorie de la double réfraction et tous ses autres travaux, doit être regardé comme le véritable fondateur de la physique mathématique.

Laplace étudie et explique les phénomènes capillaires. A son exemple, d'autres géomètres, se bornant à l'étude d'une classe très-particulière de phénomènes, parviennent à en donner la théorie mathématique, et élèvent ainsi quelques jalons d'une analyse rigoureuse sur le vaste domaine de la physique. Ainsi font Savary, M. Liouville, pour l'électrodynamique; Poisson, MM. Cauchy, Duhamel, pour l'acoustique; M. Bravais, pour les phénomènes optiques de l'atmosphère; et encore M. Cauchy, qui paraît être sur la voie d'une théorie mathématique complète de la lumière, si bien préparée par les travaux de Fresnel, Hamilton, Mac-Culagh, Newmann, et d'autres savants. Mais arrivons aux travaux qui constituent plus particulièrement la science générale, et toute moderne, appelée physique mathématique.

Fourier, et encore Laplace, puis Poisson, et d'autres géomètres, créent la théorie analytique de la chaleur, qui peut être regardée comme formant le premier livre de la Mécanique terrestre; la simplicité des phénomènes dont cette théorie assigne les lois, permettant d'essayer sur elle, et d'y façonner en quelque sorte les procédés de l'analyse, avant de les étendre à des théories plus complexes, et plus immédiatement applicables. Les travaux des mêmes géomètres, sur les lois qui régissent les températures du globe terrestre, prouvent d'ailleurs l'utilité directe de cette première théorie générale.

Enfin, Navier, puis Poisson, M. Cauchy et d'autres savants, créent la théorie mathématique de l'élasticité des solides. Ils font voir que l'explication complète des phénomènes qui en dépendent n'est maintenant arrêtée que par des difficultés d'intégration. Comme exemples, ils vérifient la plupart des découvertes de Savart sur les vibrations des corps sonores, et donnent plusieurs formules de correction indispensables. Je dirai plus tard tout ce que cette seconde théorie générale recèle dans son sein.

De ces deux premières théories, et d'autres encore, résulte, pour toutes, une marche uniforme, que l'on peut résumer ainsi : la théorie mathématique d'une classe de phénomènes a pour base, un ou deux principes, un ou deux faits empruntés à l'expérience, et que l'on considère comme des axiomes; par eux, et à l'aide du calcul infinitésimal, on parvient à représenter l'ensemble de ces phénomènes par des équations différentielles, ou plutôt aux différences partielles; l'étude de ces équations donne déjà une grande partie des lois que l'on cherche; enfin leur intégration, plus ou moins avancée, faite d'après des circonstances données, peut seule embrasser toutes ces lois. Cette marche était indiquée par le chapitre de l'attraction des sphéroïdes, lequel n'est au fond que la théorie mathématique d'une certaine classe de phénomènes, la première qui ait atteint une perfection relative.

Ce premier résultat important sur l'ordre des travaux à entreprendre, pour atteindre le but désiré, prouve que les progrès de la physique mathématique sont subordonnés à ceux du calcul intégral, et particulièrement à ceux de l'intégration des équations aux différentielles partielles. L'état dans lequel la Mécanique céleste a laissé ces instruments d'analyse, exigeait de nouveaux perfectionnements. Il fallait surtout étudier de plus près les propriétés des surfaces en général, considérées comme limites des intégrations, ou comme celles des corps sur lesquels on se propose d'étudier les phénomènes physiques. A cet appel de la science répondent une multitude de travaux sur l'analyse appliquée à la géométrie, depuis ceux de Monge et Hachette, jusqu'à ceux de MM. Gauss, Ch. Dupin, Poncelet, Brianchon, Chasles, Jacobi, Liouville, et autres.

En outre, les fonctions exponentielles et circulaires étaient insuffisantes; il fallait étendre la méthode des quadratures, l'enrichir de nouvelles fonctions, en étudiant avec soin leurs propriétés. Tel a été le but des travaux de Legendre, et des admirables découvertes d'Abel et de Jacobi, sur les transcendantes, elliptiques ou autres; découvertes dont l'extrême importance est successivement dévoilée par de nombreux commentateurs, et qui font plus que doubler la puissance de l'analyse mathématique.

Ce n'est pas tout. La mécanique rationnelle n'avait été inventée et façonnée que pour résoudre les questions de la mécanique céleste; il fallait appliquer ses principes généraux, surtout celui des vitesses virtuelles et celui des forces vives, aux mouvements qui ont lieu à la surface de la terre; en déduire la théorie des machines, celle des moteurs, les perfectionnements qu'exige l'emploi de ces instruments, et de ces agents industriels. Les travaux des deux Carnot, de Prony, Poisson, Ampère, Navier, Coriolis, de MM. Poinsot, Ch. Dupin, Poncelet, Reech, ont successivement levé les principales difficultés de cette application nouvelle.

Ce résumé, si rapide et si plein, de tout ce que les géomètres modernes ont entrepris, pour hâter les progrès des sciences d'application, est encore fort incomplet. Je n'ai pas cité d'importants travaux, sur la théorie des nombres, par Lagrange, MM. Gauss, Poinsot, Dirichlet, Lebesgue; sur l'analyse pure, par MM. Cauchy, Jacobi, Sturm, Liouville, Binet, Blanchet; sur le calcul des probabilités, par Laplace, Poisson, M. Bienaymé; travaux dont l'utilité serait facilement constatée, soit par les applications directes qu'elles ont fait naître, soit par leur influence, par leur réaction sur les autres branches des mathématiques. En outre, je n'ai pas nommé tous les savants, ni les plus jeunes et les plus actifs, lesquels ont pris une large part à cette œuvre si étendue, et dont les recherches s'enchevêtrent, se croisent, naissent les unes des autres. J'ai cru pouvoir les passer sous silence, et m'effacer moi-même, dans cette description sommaire.

N'est-il pas de la dernière évidence que, durant le demi-siècle qui vient de s'écouler, les sciences exactes ont réellement fait, en vue même des applications, beaucoup plus de progrès que dans tous les siècles précédents? Si l'on objectait que les savants de nos jours, à qui la gloire en revient, ne paraissent pas cependant, étant vus de près, pouvoir être comparés aux illustres géomètres qui les ont précédés, nous répondrions que la plus grande importance des résultats obtenus s'explique tout naturellement, et par le plus grand nombre des travailleurs modernes, et par les ressources qu'ils ont puisées dans l'héritage même du siècle dernier.

Tout indique que cette ardeur scientifique, loin de se ralentir, va au contraire en s'accélérant; les annales de la science inscrivent fréquemment les noms de nouveaux géomètres que signalent la France, l'Allemagne, et même l'Angleterre, où les mathématiques étaient peu cultivées depuis l'époque newtonienne, et qui se réveille enfin d'un long assoupissement. Et c'est lorsque le travail est si bien préparé, lorsque tant d'efforts s'y concentrent, c'est ce moment que l'on semble choisir pour arrêter le mouvement scientifique en France, par des réformes, au moins inopportunes.

Mais à côté, et parallèlement à la phalange des géomètres théoriciens, qui paraît destinée à poursuivre le grand œuvre de la Mécanique terrestre, s'en meut une autre, plus nombreuse, plus impatiente, moins disciplinée, celle des géomètres praticiens. En tête, se trouvent les savants qui appliquent les formules trouvées à l'astronomie, construisent les Tables des mouvements planétaires, déduisent, de longs calculs numériques, le retour des comètes, l'instant de leur passage au périhélie, l'existence et les éléments de nouvelles planètes perturbatrices, et qui, comme Clairaut, Delambre, Bessel, Savary et M. Le Verrier, vérifient les dernières conséquences du principe de la pesanteur universelle. Puis viennent les savants qui utilisent les Tables de statistique, pour en déduire, à l'aide des formules fournies par le calcul des probabilités, le mouvement de la population, le taux des rentes viagères, celui des assurances de toute espèce. Enfin se présentent les ingénieurs, qui appliquent la mécanique rationnelle à l'étude de leur art; qui s'efforcent de déduire, du principe des forces vives, le calcul complet de l'effet des machines, du travail des moteurs, de la résistance des matériaux, et qui, ne trouvant pas les sciences théoriques assez avancées pour résoudre complétement toutes ces questions, comblent les lacunes par des procédés approximatifs, pouvant suffire actuellement: tel est, en effet, le but d'une multitude de travaux de MM. Poncelet, Piobert, Morin, Combes, et de presque tous nos ingénieurs.

Ce partage des géomètres, en théoriciens et praticiens, n'établit aucun parallèle défavorable à l'une ou à l'autre des deux classes. Les fonctions sont seules essentiellement différentes. Ces fonctions sont éminemment utiles, chacune de son côté, pas plus l'une que l'autre; et dans cette division du travail général, il importe que la concorde règne dans les deux camps, afin que leur puissance d'action ait tout son effet. Il arrive souvent d'ailleurs qu'un même savant cumule les deux fonctions, au grand avantage de la théorie et de l'application. Je citerai comme exemples: M. Delaunay, théoricien par ses recherches d'analyse, de géométrie et de mécanique, praticien par ses travaux sur les Tables lunaires et sur les marées; M. Bienaymé, théoricien par ses recherches sur le calcul des probabilités, et praticien par ses travaux sur les Tables de mortalité et sur d'autres applications; enfin M. Poncelet, théoricien par ses belles recherches sur la géométrie et la mécanique rationnelle, praticien par ses calculs sur les machines et les moteurs.

Mais, en dépit de tant de liens et malgré toutes les apparences d'une entente parfaite, c'est dans le camp des géomètres praticiens purs que s'est propagée une fausse appréciation de l'utilité des sciences exactes. Erreur, illusion dangereuse; car si elle parvient à diriger l'enseignement, la décadence est imminente. Les ingénieurs, habitués à de pénibles travaux d'application, voyant clairement les imperfections de la théorie, ne pouvant y remédier à l'aide d'une analyse rigoureuse, ont essayé d'y suppléer par d'autres recherches; ils ont créé une sorte de physique mathématique factice, s'appuyant sur des formules empiriques, c'est-à-dire déduites de l'expérience, et qui peuvent être employées, sans de graves erreurs, entre certaines limites.

Reconnaissons-le, ce travail préliminaire était utile, indispensable. L'industrie humaine ne peut régler son pas sur la marche mesurée et prudente de la science. Son impatience l'en éloigne; elle se contente d'à peu près. Si elle a besoin de certains nombres, il faut les lui calculer, exacts ou approchés, rigoureux ou erronés, peu lui importe. Elle court à de nouvelles conquêtes, sans s'embarrasser de ce qu'elle laisse d'imparfait derrière elle. La véritable science arrivera là, plus tard, pour corriger, consolider, perfectionner. Mais, ne l'oublions pas, il faut que la science suive, et d'assez près pour être entendue, pour avertir quand on fait fausse route. Si vous étouffez sa voix, si vous méprisez ses travaux, vous marchez à l'aventure; vous vous perdrez infailliblement.

Souvent, l'homme absorbé par un travail long et fatigant, auquel il a consacré sa vie active ou intellectuelle, finit par mal juger tout ce qui ne rentre pas dans le cercle restreint de ses idées ordinaires; il est insensiblement conduit à refuser une valeur réelle à tout autre mode d'activité de l'esprit, à mépriser même ceux qui s'en occupent. Ainsi font beaucoup de praticiens: la science empirique qu'ils ont édifiée, leur a suffi, a présidé à tous leurs travaux, leur a permis de les exécuter tant bien que mal; alors ils ne voient plus qu'elle; ils la regardent comme la seule utile, comme la seule qui doive être enseignée à leurs successeurs. Ils oublient que s'ils ont pu créer cette science d'attente, c'est parce qu'ils avaient été préalablement nourris des saines doctrines, parce qu'ils avaient pu prendre leur point de départ sur un terrain solide, dans la véritable science. Mais ils la méprisent aujourd'hui, ils la méconnaissent au point de nier les nombreux emprunts qu'ils lui ont faits. Et leur œuvre, encore si imparfaite, ils veulent la livrer à de nouveaux praticiens qu'ils auront formés dans l'ignorance de la vraie théorie! Mais si cette nouvelle génération d'ingénieurs veut aussi réformer, que sera cette seconde puissance de l'à-peu-près!!

On voit ainsi se produire dans la science, et parmi les savants, les mêmes égarements que dans un tout autre monde. Une question difficile se présente, mais elle n'est pas assez bien définie dans toutes ses parties pour qu'on puisse la résoudre d'une manière complète et rigoureuse; si cependant une solution telle quelle est indispensable, alors on a recours à quelque procédé transitoire qui donne le temps d'attendre, et qui n'engage pas l'avenir. Mais les impatients, ceux qui se sentent ou qui se croient capables d'aborder des questions de cette nature, qui même ont fait leurs preuves sur des sujets moins épineux, ne peuvent se résigner à l'inaction. De là les fausses théories, les utopies de toute espèce que leurs inventeurs essayent de propager par tous les moyens, dussent-ils rendre impossible l'avénement de la véritable solution.

C'est ainsi que d'habiles géomètres, tant théoriciens que praticiens, ont quelquefois sacrifié leur talent à de fausses idoles. Et la preuve n'est pas loin : feuilletez l'immense recueil des travaux mathématiques de notre époque, vous y distinguerez facilement deux genres d'analyse appliquée. L'une prudente, rigoureuse, ne s'appuyant que sur des principes incontestables, riche de déductions, féconde par ses conséquences, à laquelle les amateurs donnent à bon droit l'épithète d'élégante. L'autre, plus hardie d'abord, mais s'appuyant sur des hypothèses hasardées, qui la conduisent péniblement à des résultats numériques incertains, noyés dans des calculs lourds, inextricables, résultats isolés et sans avenir.

Il existe un caractère infaillible auquel tout géomètre pourra reconnaître, lui-même, si son travail appartient au premier ou au second genre. S'il est dans le vrai, s'il a abordé une question bien posée et que l'analyse mathématique puisse résoudre, à chaque difficulté qu'il rencontre, qu'il parvient à surmonter à force de persévérance, et quelquefois par une véritable découverte analytique, il voit ensuite la question marcher en quelque sorte toute seule, les conséquences se multiplier d'elles-mêmes, jusqu'à ce qu'un nouvel obstacle exige une nouvelle concentration d'efforts, dont le succès ramène la même fécondité; alors il travaille dans le premier genre. Mais s'il a entrepris de résoudre un problème mal défini à l'aide de principes douteux, il est obligé de tourner les obstacles plutôt que de les franchir; la question est, en quelque sorte, récalcitrante, elle ne marche que quand on la pousse; le géomètre travaille alors dans le second genre; et si son œuvre pénible n'est pas indispensable, il ferait bien de ne pas la publier. Malheureusement, nous n'aimons pas à perdre complétement nos peines, et, par ce motif, bien des œuvres indigestes ont vu le jour. D'illustres géomètres ont péché par là : comparez le beau Mémoire de Poisson, sur l'équilibre de l'électricité statique à la surface des corps conducteurs, avec son pénible travail sur le magnétisme, même en mouvement, qu'il veut expliquer par l'existence de deux fluides magnétiques, et vous comprendrez la distinction que j'établis.

Mais quittons cette pierre de touche des bons travaux, et revenons aux praticiens. Les circonstances ont surtout favorisé la propagation de l'erreur ou de l'illusion que je déplore, et dont je crains les résultats; un excès dans la division du travail a trop éloigné les ingénieurs des sujets de leurs premières études, et du commerce des théoriciens. Deux exemples anecdotiques feront mieux comprendre toute ma pensée. J'emprunte l'un d'eux à ma propre biographie; mais le rôle que j'y ai joué, dû en grande partie aux circonstances, tout autre eût pu le remplir à ma place.

Il y a plus de trente ans, en 1820, M. Clapeyron et moi nous quittions le corps des mines, en France, pour aller à Saint-Pétersbourg relever une école d'ingénieurs, qui menaçait ruine faute de professeurs. Là, nous avons dû enseigner, successivement et simultanément, toutes les mathématiques, depuis les éléments jusqu'au calcul infinitésimal, la mécanique rationnelle, la théorie des machines, et le cours de construction dans toutes ses parties. Dans cette école, le temps consacré aux études scientifiques était plus limité qu'il ne l'est en France; par exemple, il fallait parcourir toute la mécanique rationnelle en trente leçons; c'était bien peu. Pour utiliser le mieux possible le temps assigné, nous avons à peu près réduit le cours à la connaissance approfondie du principe des vitesses virtuelles, et de celui des forces vives, en multipliant leurs applications sur des sujets nombreux. Le cours de machines et celui de construction, que nous professions aussi, nous venaient en aide par les exemples qu'ils fournissent. Et ces trois cours, réunis dans les mêmes mains, formaient un tout homogène, où dominait la rigueur mathématique, et d'où l'empirisme était scrupuleusement banni.

Toutefois, pour rester dans ces conditions dont nous ne voulions nous départir à aucun prix, nous avons dû nous condamner à de rudes travaux de préparation. C'est ainsi que nous avons introduit, peut-être les premiers, dans les cours d'application, le chapitre relatif aux engrenages, à leur génération, au calcul de leurs frottements; celui de la poussée des voûtes et du tracé de leurs joints de rupture; chapitres qui forment, dans les cours dont ils font partie, comme deux oasis de théorie rigoureuse. Cependant nous n'étions pas satisfaits, nous cherchions à jeter les bases de la théorie mathématique de l'élasticité, et notre travail sur l'équilibre intérieur des corps solides indique tous les efforts que nous avons faits, pour éviter l'empirisme et ses funestes conséquences.

En France, à la même époque, Navier se trouvait à la fois professeur d'analyse et de mécanique rationnelle à l'École Polytechnique, et chargé d'un cours de machines et de construction aux Ponts et Chaussées. Sans doute dominé comme nous par cette passion pour la rigueur mathématique, que les sciences exactes inspirent à tous ceux qui les professent, il chercha longtemps aussi à restreindre l'espace occupé par l'empirisme dans les cours d'application. Les mêmes circonstances le conduisirent au même but; et il venait de présenter son travail sur les corps élastiques, quand le nôtre, presque identique au sien, et enfanté à 800 lieues de Paris, arrivait à son examen. Les recherches de Poisson et de M. Cauchy sur le même sujet sont postérieures aux siennes.

Ainsi, placez des ingénieurs dans des circonstances telles, qu'ils doivent s'occuper à la fois de cours de théorie et de cours d'application, ils travailleront pour ne jamais abandonner la rigueur mathématique; et leur concours accélérera les progrès de la véritable science. Isolez-les, au contraire, chargez-les uniquement de cours d'application, ils resteront géomètres praticiens; et de plus en plus identifiés avec leur science d'attente, ils essayeront de la faire régner seule et sans partage.

Et voilà ce qui explique ce fait singulier, que les plus grands détracteurs d'une célèbre institution, que ceux qui veulent la détruire, s'ils ne la réforment d'après leurs idées anti-scientifiques, ont cependant passé par cette institution même. Résultat déplorable, qui conduit à penser qu'au lieu de restreindre, dans les écoles générales, l'enseignement théorique, pour tailler une plus large place aux cours dits pratiques, ce serait précisément le contraire qu'il faudrait faire; c'est-à-dire introduire, dans les écoles d'application, des cours de haute théorie, semer le bon grain à côté de l'ivraie, afin que les élèves ne perdent pas de vue les saines doctrines, que, constamment placés entre la rigueur mathématique et l'empirisme, leur choix ne soit pas douteux, et, qu'une noble passion aidant, ils fassent aussi tous leurs efforts pour hâter l'époque où l'on pourra se passer de l'à-peu-près. Si cette sage mesure avait été prise lors de l'organisation des corps savants, nous compterions aujourd'hui plus d'un Prony, plus d'un Brisson, plus d'un Navier, plus d'un Coriolis, qui auraient cultivé la science, au lieu de la proscrire.

Ne croyez pas qu'en proposant de développer, dans le amp même des géomètres praticiens, le drapeau qu'ils repoussent, je ne fasse qu'opposer une exagération à une autre. Non : cette mesure se présente d'elle-même à l'esprit, lorsqu'on se rend bien compte de l'état actuel de la science, et qu'on cherche ce qu'il serait convenable de faire pour accélérer ses progrès. Il me sera facile de mettre cette vérité hors de doute, en utilisant le tableau que je viens d'exquisser.

On est généralement convenu d'attribuer à Bacon, toute une théorie sur la marche que l'esprit humain doit suivre pour arriver à la connaissance et à l'explication positive des phénomènes naturels. J'avoue humblement que j'ai en vain cherché, dans son *Novum organum*, des traces bien certaines de tout ce qu'on lui a prêté; et j'aime mieux attribuer l'honneur de cette découverte, s'il y a découverte, à l'esprit humain lui-même, dont la logique instinctive s'est si souvent manifestée. Quoi qu'il en soit, la marche dont il s'agit a été admirablement tracée par la série des travaux qui ont élevé l'astronomie au degré de perfection que nous lui connaissons : premièrement, observations multipliées et recueillies avec soin; secondement, travail de Képler pour résumer les résultats de ces observations par un petit nombre de lois; troisièmement, application de l'analyse, faite par Newton, pour ramener ces lois à une seule, c'est-à-dire au principe de la pesanteur universelle; quatrièmement, enfin, travail inverse des commentateurs, pour expliquer par ce principe tous les phénomènes célestes, et embrasser à la fois les états passés, présents et futurs.

Dans l'œuvre semblable, mais beaucoup plus complexe, que la science poursuit aujourd'hui, la même marche se reproduit, et l'on y reconnaît facilement les quatre genres de travaux. Les découvertes, les faits ont été accumulés outre mesure; c'est le premier travail, le recueil des observations. Des milliers d'expériences ont été entreprises pour étudier successivement toutes les classes de phénomènes, pour les coordonner, les résumer par un certain nombre de lois; c'est le travail képlérien. Les géomètres ont réussi à ramener à une seule toutes les lois de certaines classes particulières de phénomènes; voilà l'époque newtonienne ébauchée. Enfin quelques savants ont été assez heureux pour déduire, de théories mathématiques partielles, l'existence de phénomènes non soupçonnés par les physiciens, et que l'expérience a vérifiés: tels que les cristaux à deux axes, la double réfraction conique, la double réfraction cylindrique, les franges lumineuses dans l'ombre d'un disque, etc., conséquences nécessaires des théories de Fresnel, et encore certains faits déduits de l'électrodynamique. On reconnaît là des indices certains de cet immense travail en retour, qui consistera à expliquer et à prévoir les phénomènes, quand leurs principes seront découverts.

On voit que l'activité n'a pas fait défaut dans les quatre ateliers. Les deux premiers, surtout, ont à peu près achevé leur tâche. Mais le troisième, celui des géomètres théoriciens, est évidemment en retard; les difficultés qui s'y rencontrent suspendent les progrès du travail général; c'est là qu'il conviendrait d'accumuler, de concentrer de nouvelles forces, de multiplier les travailleurs. Sinon, si cet état se prolonge, les autres ateliers abandonneront la partie, et on ne les retrouvera plus, quand il s'agira d'appliquer la théorie, et de vérifier ses résultats par l'expérience. Déjà, dans leur impatience, ils emploient leurs forces à des travaux étrangers, utiles sans doute sous d'autres rapports, mais qui ne concourent plus au but commun, qui même peuvent en retarder l'avénement.

C'est ce que fait le quatrième, celui des géomètres praticiens, des ingénieurs, lequel devait couronner l'œuvre, qui était constitué, de longue main, pour commenter les principes trouvés, pour traduire en nombres toutes leurs conséquences. Le premier, celui des pionniers de la science, des chercheurs de faits nouveaux, a, depuis plusieurs années, abandonné la voie commune; il s'est jeté dans des applications étrangères: la photographie, la galvanoplastie, la télégraphie électrique et d'autres inventions, prouvent toute sa fécondité; mais, tout en admirant ces découvertes, on doit reconnaître qu'elles n'avancent pas celle des principes.

Enfin le second atelier, celui des expérimentateurs, s'est attaqué aux lois trouvées: il a perfectionné ses procédés au point de rendre sensibles les plus petites inexactitudes de ces lois. Et rien ne fait mieux sentir le retard des géomètres dans l'œuvre commune: car, supposez que, immédiatement après les travaux de Képler, les procédés employés par les astronomes observateurs, se fussent assez perfectionnés pour permettre d'apercevoir les inexactitudes des lois trouvées, la connaissance de ces inexactitudes pouvait ajourner le travail de Newton. Heureusement, elles n'ont été bien constatées qu'après la découverte du principe, et s'expliquant merveilleusement par les perturbations dues aux actions mutuelles des planètes, elles sont venues confirmer le principe plutôt que de l'infirmer.

N'est-il pas clair, maintenant, que si l'on veut aider aux progrès de la science, si l'on veut hâter l'œuvre de notre siècle, ce qu'il faudrait faire aujourd'hui, ce serait d'encourager, d'exciter les géomètres théoriciens, d'augmenter leur nombre par tous les moyens possibles, de diriger l'enseignement des sciences exactes, de telle sorte que les élèves connaissent bien tous les instruments de l'analyse, ceux-là même qu'il faut perfectionner pour atteindre le but désiré. Et l'on voit que cette conclusion toute naturelle est diamétralement opposée à celle de nos réformateurs.

Mais, nous dira-t-on, la nouvelle époque newtonienne dont vous annoncez la venue, est un rêve de votre imagination ; l'humanité courra éternellement après les principes, sans jamais les atteindre ; et ce serait folie d'organiser quoi que ce soit en vue de ce but chimérique. Notre réponse est prête : quelle que puisse être notre croyance à cet égard, nous ne demandons rien d'aussi sublime ; notre but est infiniment plus accessible, nous le touchons presque, et (pardon de la chute) il s'agit, tout bonnement, d'intégrer, d'une manière convenable, les équations aux différences partielles qui représentent l'équilibre intérieur des corps solides élastiques ; et voilà tout.

Lorsque cette intégration sera faite, étudiée, commentée, il n'y aura plus rien d'indéterminé dans vos constructions ; vous pourrez calculer exactement la forme précise des solides d'égale résistance dans toutes les circonstances, diminuer considérablement les poids de vos machines, réaliser des applications importantes, que l'exagération de ces poids rend actuellement impossibles. Et il vous serait difficile de dire où s'arrêteront, pour les arts industriels, les conséquences de cette intégration, que nous poursuivons.

Voilà pourquoi nous voudrions que le plus de membres possible des corps savants, qui peuvent si bien comprendre toute l'importance de la découverte dont il s'agit, connussent à fond l'analyse mathématique, afin d'aider à l'achèvement d'un travail commencé par des ingénieurs-géomètres. Or, pour obtenir ce résultat, il faut se garder de restreindre l'enseignement des sciences exactes dans les écoles générales, et, en outre, introduire des cours de théorie pure dans les écoles d'application. Voilà ce que je voulais établir.

Mais, nous dira-t-on encore, vous parlez d'augmenter le nombre des géomètres-théoriciens, comme si cela était possible, comme si les vocations s'imposaient, et, pour un ou deux sujets éminents, capables de remplir vos vues, et qui, de loin en loin, pourraient passer par nos écoles, vous voulez encombrer l'enseignement de cours inutiles à la totalité des élèves. L'objection est spécieuse; la réponse ne sera pas moins catégorique.

D'abord, entendons-nous sur le mot *inutile*. Comme je l'ai dit et répété dans mes premiers discours : « L'utilité » principale et première de l'étude des sciences exactes » est de faire naître, d'exercer, de perfectionner la fa- » culté du raisonnement, de la rendre en quelque sorte » infaillible, en l'appliquant constamment, et pendant » de longues années, à des sujets qui soient à l'abri de » toute controverse;... l'utilité immédiate, ou pratique, » de cette étude ne vient qu'en seconde ligne.... » Or, l'utilité principale profitera à tous les élèves, et dans l'école générale, et dans les écoles spéciales, où il est très-important que la saine théorie ne les abandonne pas en présence de l'empirisme et de l'à-peu-près, si propres à faire dévier l'esprit, même le plus solide.

Ensuite n'oublions pas que tous doivent entrer dans les corps savants, pour y remplir la fonction de géomètres-praticiens, pour y commenter les résultats théoriques à mesure que la science les découvre, pour exprimer numériquement leurs dernières conséquences; et si vous leur laissez ignorer les procédés analytiques qui ont présidé à la découverte de ces résultats, comment voulez-vous qu'ils les appliquent, qu'ils remplissent leur mission? C'est comme si vous exigiez qu'ils obéissent à un ordre écrit dans une langue qui leur serait inconnue. Vous le voyez, les cours de théorie auront cette utilité pratique que vous admettez seule, et ces cours profiteront à tous les élèves indistinctement; ils ne seront inutiles pour aucun.

Parlons maintenant de la *vocation*. On dit, et l'on croit assez généralement, que chaque génération apporte un contingent très-limité, et à peu près constant, d'hommes supérieurs, dans telle ou telle faculté, pour tel ou tel mode d'activité de l'esprit. Je ne sais: mais à moins d'établir des analogies singulières entre les différents genres de célébrité, ou à moins d'attribuer une élasticité fort grande à cette limitation naturelle, il me paraît difficile d'expliquer, dans ce système, pourquoi tel siècle abonde en littérateurs distingués, celui-là en artistes du premier ordre, celui-ci en savants illustres. Il me semble plus rationnel d'admettre qu'à toute époque, la société renferme les éléments nécessaires pour répondre à tous les besoins; forces nombreuses et variées, qui restent latentes si elles ne sont pas actuellement utiles, et qui se manifestent avec abondance quand les circonstances sont favorables.

Quoi qu'il en soit, une longue pratique dans l'enseignement des sciences, des observations suivies sur la marche et les variétés de l'intelligence, m'ont conduit à une formule qui paraît exprimer assez bien la force productive qu'il nous importe de connaître. Parmi les élèves qui suivent les cours de mathématiques de nos colléges, un tiers apporte toute l'attention nécessaire pour profiter de ce genre d'études, et pour comprendre tout ce qu'on leur enseigne. Ce premier contingent, qui peuple seul les diverses écoles générales, s'y fractionne encore une fois, sous le point de vue de l'aptitude mathématique; là, le quart des élèves étudient les sciences exactes avec goût, et peuvent, si l'enseignement est complet et bien dirigé, devenir des géomètres-théoriciens. Enfin, le plus ou le moins de succès des études concomittantes, et leur influence sur le classement définitif, répartit uniformément ce noyau d'analystes dans tous les services publics; en sorte que, dans chaque école d'application, le quart de toute promotion pourrait tirer, du cours de théorie pure, l'utilité particulière que nous avons en vue. N'est-ce pas assez pour justifier la mise à exécution de la mesure que nous proposons? Surtout si l'on considère qu'il ne s'agit pas ici de ces êtres privilégiés et exceptionnels, qui, de loin en loin, viennent étonner le monde savant par la précocité et la puissance de leur intelligence; ils sont trop rares pour qu'on doive compter sur eux.

En résumé, si l'on veut absolument modifier l'enseignement des mathématiques, deux systèmes opposés se présentent pour diriger les réformes. L'un d'eux propose de restreindre de plus en plus les cours de théorie, et de faire prédominer les cours d'application, les idées de pratique immédiate, en s'étayant sur des lois empiriques. L'autre demande, au contraire, que les cours de théorie soient complétés, qu'ils s'étendent jusqu'aux dernières découvertes des géomètres, dans le but de restreindre, de plus en plus, l'espace occupé par l'empirisme dans les cours d'application. Le premier, ne croyant pas aux progrès futurs de la théorie, et satisfait de son état actuel, veut la fixer à tout jamais dans cet état. Le second, considérant que la science s'éteint et se perd quand on l'empêche d'avancer, et croyant fermement à ses progrès, veut les préparer et les exciter.

On comprend toute la gravité du choix que l'on va faire. Ou le mouvement scientifique continuera à s'accélérer en France, jusqu'à l'achèvement de l'œuvre que j'ai définie; ou bien l'honneur d'y mettre la dernière main appartiendra à une autre nation, et probablement à une autre époque. D'un côté la gloire, de l'autre la décadence. Tout à espérer ou tout à craindre. Cruelle incertitude que je voudrais en vain dissiper, et que de nouvelles explorations sur cette question brûlante ne serviraient qu'à augmenter.

On pourra trouver que j'attribue trop d'influence à certains actes, m'accuser même de douter de la science, qui marche et atteint son but, malgré les efforts contraires de ceux qui la dédaignent. On pensera que si, par suite des réformes dont j'ai signalé le danger, telle institution ne produit plus de bons géomètres, alors ceux-ci se formeront ailleurs; dans une école voisine, par exemple; école d'où sont déjà sortis tant d'excellents professeurs, et des jeunes savants dont les noms retentissent dans nos académies.

Tout cela ne me rassure pas: il est un élément essentiel que ces réformes suppriment, et qui, seul, pouvait accélérer l'œuvre séculaire. Dans les sciences exactes, plusieurs routes différentes s'offrent aux géomètres. La théorie des nombres, l'analyse pure, la géométrie, la mécanique rationnelle, la physique mathématique, la théorie des probabilités, réclament toutes des travailleurs. Mais, pour réussir dans telle de ces carrières, il faut un apprentissage spécial, sans lequel l'analyste le plus éminent ne produira le plus souvent que des œuvres éphémères.

Aujourd'hui, le géomètre qui voudra sérieusement faire avancer la mécanique rationnelle ou la physique mathématique, devra réunir des connaissances étendues, sur les machines, sur les moteurs, sur les matériaux de toute espèce employés dans les arts, ou connaître à fond la physique, la chimie, tous les modes d'action des forces naturelles. Sans ces études préliminaires, il ne pourra travailler fructueusement que sur les nombres, sur l'analyse pure, sur la géométrie, sur les probabilités. Ces quatre branches des mathématiques pourront encore faire des progrès en France, quand nos géomètres sortiront tous d'une école où l'on ne s'occupe pas d'applications;

mais les deux autres branches, la mécanique rationnelle et la physique mathématique, resteront probablement stationnaires, ou passeront à l'état de sciences empiriques.

Voilà ce qu'on éviterait en modifiant, dans le sens que j'ai indiqué, le programme des études dans l'école générale et dans les écoles spéciales de nos corps savants. Un géomètre sorti de cette institution, ainsi perfectionnée, mais après l'avoir parcourue dans toutes ses phases, serait plus utile aux progrès de l'analyse appliquée que tous ceux qui auraient suivi l'autre route....

SUR L'APPROXIMATION DES CALCULS NUMÉRIQUES PAR LES DÉCIMALES;

Par M. AMIOT.
Professeur au lycée Saint-Louis.

1. Dans l'évaluation des quantités en décimales, il devient souvent inutile de considérer beaucoup de chiffres décimaux. Ainsi, dans les valeurs monétaires, on ne tient ordinairement compte que des centièmes; dans les mesures linéaires, que des millièmes, etc., parce qu'il n'existe pas de monnaie au-dessous du centime, ni de division du mètre inférieure au millimètre. Mais, quand il s'agit de déterminer, soit par le calcul, soit par l'expérience, des nombres qui doivent être soumis à des opérations, comme multiplication, division, etc., il importe de conserver un assez grand nombre de chiffres décimaux, pour peu que l'on tienne à quelque exactitude dans les résultats. Par exemple, quand on emploie le poids spécifique des corps pour déterminer leur volume connaissant leur poids, ou bien leur poids connaissant leur volume, on peut commettre,

sur le résultat, une erreur assez considérable, si l'on ne prend qu'un petit nombre de chiffres décimaux, et quelquefois même si l'on en prend le plus possible.

Un des principaux objets que nous nous proposons dans cette Note, c'est de montrer, à l'aide de simples considérations arithmétiques, l'utilité de conserver le plus possible de chiffres décimaux dans les résultats, toutes les fois que ceux-ci, soit qu'on les obtienne par le calcul ou l'observation, sont destinés à être soumis à des opérations d'arithmétique; et de tracer en même temps, sans qu'on soit obligé de recourir aux procédés algébriques, une marche certaine pour déterminer, dans chaque circonstance, ce qu'il y a de réellement exact dans les résultats des calculs auxquels on soumet ces nombres.

2. Nous commencerons par rappeler en peu de mots les procédés d'abréviation que l'on suit ordinairement dans chacune des opérations d'arithmétique, lorsque, les nombres proposés renfermant beaucoup de chiffres décimaux, on veut se contenter d'un résultat approché à moins d'une unité d'erreur d'un certain ordre décimal. Ensuite nous verrons comment les mêmes procédés peuvent conduire à déterminer quelle est la partie du résultat sur l'exactitude de laquelle on peut compter lorsque les nombres proposés ne sont eux-mêmes approximatifs qu'à une unité ou une demi-unité d'un certain ordre décimal.

3. On sait, et il est aisé de se convaincre, que pour obtenir la somme de plusieurs nombres décimaux à moins d'une demi-unité d'erreur d'un certain ordre décimal, on prend d'abord des valeurs approchées de ces nombres à moins d'une demi-unité de l'ordre immédiatement inférieur; puis on additionne tous ces nombres, et l'on efface le dernier chiffre à droite de la somme, en ayant soin, toutefois, d'augmenter d'une unité le dernier chiffre restant, lorsque celui qu'on efface égale ou surpasse 5.

4. D'après cela, si un ou plusieurs des nombres donnés étaient approximatifs à moins d'une demi-unité d'un certain ordre décimal, il n'y aurait qu'à prendre de tous les nombres, des valeurs approchées au même degré que celui qui l'est le moins, et l'on serait ramené à opérer comme dans le cas précédent. Donc, règle générale :

Pour additionner plusieurs nombres approximatifs après avoir écrit le premier, je suppose, celui qui contient le moins de chiffres décimaux, conservez-en le même nombre dans tous les autres, et effectuez l'opération d'après la règle connue, puis effacez le dernier chiffre du résultat. De sorte que vous aurez autant de chiffres décimaux exacts moins un, qu'il y en a dans celui des nombres proposés qui en contient le moins.

Il est à remarquer, toutefois, que cette règle n'est applicable qu'au cas où l'on additionne moins d'une vingtaine de nombres. Autrement il faudrait effacer sur la droite du résultat un chiffre de plus pour chaque vingtaine de nombres additionnés.

5. Nous ne citerons la soustraction que pour mémoire, parce qu'il est évident que, si l'on soustrait deux nombres approchés à moins d'une demi-unité d'erreur d'un certain ordre quelconque, le résultat sera lui-même approché à moins d'une demi-unité du même ordre.

6. Quant à la multiplication, on trouve, dans la plupart des Traités d'arithmétique (voyez *Arithmétique* de M. Bourdon, 15^e^ édition : *Note sur les approximations numériques*), une démonstration de la règle suivante :

Pour multiplier deux nombres l'un par l'autre à moins d'une demi-unité d'erreur d'un certain ordre décimal donné, écrivez le multiplicateur au-dessous du multiplicande, en renversant l'ordre des chiffres du multiplicateur, et plaçant celui des unités sous le chiffre du multiplicateur de l'ordre immédiatement inférieur au degré d'approximation donné; multipliez ensuite successivement par chaque ordre d'unités du multiplicateur toute la partie du multiplicande placée à sa gauche, en commençant par le chiffre qui lui correspond, et ajoutez, au produit du premier chiffre, la retenue qui aurait été fournie par la multiplication du chiffre précédent; enfin, écrivez tous les produits partiels de telle façon que, le premier chiffre de chacun étant dans une même colonne verticale, tous les autres chiffres se correspondent; puis additionnez et effacez le premier chiffre à la droite du produit, en ayant soin d'augmenter d'une unité le premier chiffre restant, si celui qu'on efface égale ou surpasse 5. Il ne restera plus qu'à placer la virgule, ce qui est aisé d'après le degré d'approximation donné ou bien d'après l'ordre du dernier chiffre décimal qui est toujours facile à déterminer dans chaque cas.

Si les nombres proposés renfermaient un grand nombre de chiffres décimaux, ou même étaient illimités, comme une fraction périodique par exemple, on négligerait évidemment, dans l'opération, tous les chiffres de chaque facteur auxquels il n'y en a point de correspondant dans l'autre.

7. Supposons actuellement les deux facteurs approchés chacun à moins d'une demi-unité d'un certain ordre décimal. Il est évident qu'en multipliant tout le multiplicande par l'ordre d'unités le plus élevé du multiplicateur, le produit partiel que l'on obtiendra ne sera approché qu'à moins de quelques unités décimales d'un ordre qu'il sera aisé de déterminer dans chaque cas. On prendra donc, suivant la règle qu'on vient de tracer, des valeurs de tous les autres produits partiels approchées à moins d'une demi-unité du même ordre (4), puis on effectuera l'addition et on placera convenablement la virgule.

Soient pour exemples les deux nombres 54,865 et 75,346 supposés approximatifs chacun à moins d'un demi-millième. J'écris d'abord ces nombres conformément à ce qu'on vient de dire, et j'effectue l'opération comme on le voit ci-contre. Pour placer la virgule j'observe que les millièmes du multiplicande 5, multipliés par les dizaines du multiplicateur 7, donnent des centièmes ; de sorte que le chiffre effacé 4 étant des centièmes, le chiffre suivant 8 est des dixièmes, et partant le produit 4133,8 est approché à moins d'un dixième d'erreur.

$$
\begin{array}{r}
54865 \\
\underline{64357} \\
384055 \\
27432 \\
1646 \\
219 \\
\underline{32} \\
413384
\end{array}
$$

Lorsque les nombres proposés ne renferment pas le même nombre de chiffres, tant décimaux que non décimaux, c'est toujours celui qui en contient le moins que l'on prend pour multiplicande, afin de faire porter les erreurs d'approximation sur le premier chiffre de chaque produit partiel, que l'on supprime ensuite, et non sur le nombre de ces produits. Donc, règle générale :

Pour multiplier l'un par l'autre deux nombres approximatifs, prenez pour multiplicande celui qui contient le moins de chiffres ; puis, écrivez le multiplicateur au-dessous, en renversant l'ordre de ses chiffres, et plaçant celui de l'ordre le plus élevé sous le premier, à droite du multiplicande ; effectuez ensuite l'opération d'après la règle du n° 6, et placez enfin la virgule d'après l'ordre que doit représenter le premier chiffre, à droite du produit.

8. Appliquons cette règle à quelques exemples :

1°. Quel est le poids d'une certaine quantité d'acide sulfurique, dont le volume a été trouvé égal à $25^{\text{lit}},54$, à moins d'un demi-centilitre d'erreur ?

25,54	Multiplions ce nombre par 1,8409, poids
90481	spécifique de l'acide sulfurique; j'ai 470, et,
2554	comme le (o) exprime des dixièmes, j'ai
2043	47,0 kilogrammes, à moins de 100 grammes
102	d'erreur. Mais on peut se tromper de plusieurs
2	dizaines de grammes. Pour obtenir un plus
470	haut degré d'exactitude, il aurait fallu mesu-

rer le volume avec plus de précision. Toutefois, cette précision deviendrait elle-même illusoire, dès que le volume contiendrait plus de chiffres que le poids spécifique, ce qu'on peut voir dans l'exemple suivant :

2°. Quel est le poids d'un lingot d'argent pur, dont le volume a été trouvé égal à $1567^{cc},843$, à moins d'un demi-millième d'erreur?

Le poids spécifique de l'argent étant 10,4743, je mul-

10,4743	tiplie ce nombre par le volume donné, et
3487651	j'observe que le chiffre 3 des millièmes du
104743	multiplicateur, ne correspondant à aucun
52371	chiffre du multiplicande, devient, ainsi que
6284	tous ceux qu'on aurait pu mettre à la droite,
733	complétement inutile dans la multiplica-
83	tion (6). Pour placer la virgule, je re-
4	marque que le premier chiffre 8 du produit
164218	résultant de dix-millièmes multipliés par

des mille, exprime des dixièmes, et, comme on l'efface, on a 16423 grammes ou $16^{kil},423$ pour le poids demandé approximatif seulement à moins d'un gramme d'erreur. Et, chose remarquable, c'est qu'une fois le volume mesuré avec autant de chiffres qu'il y en a dans le poids spécifique, toute approximation plus grande dans la détermination du volume ne peut rien ajouter à celle du poids.

3°. Quelle est la quantité d'argent pur contenue dans une ancienne pièce de 6 livres, dite aux trois couronnes?

Je trouve, dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, que cette pièce, au titre de 0,917, pèse 30gr,594. Je multiplie l'un par l'autre ces deux nombres, qui ne peuvent être qu'approximatifs, à moins d'une demi-unité de leur dernier ordre décimal. Je trouve pour produit 281, et, plaçant la virgule, j'ai enfin 28gr,1, à moins d'un dixième de gramme d'erreur. Toutefois, on peut se tromper de plusieurs centièmes de grammes, ce qui peut avoir une certaine importance, surtout lorsque cette erreur peut se répéter un certain nombre de fois pour plusieurs pièces.

$$\begin{array}{r} 917 \\ \underline{49503} \\ 2751 \\ 46 \\ \underline{8} \\ 2805 \end{array}$$

9. Passons à la division, et, comme ce sera encore du procédé par lequel on abrége ordinairement l'opération que nous déduirons nos règles d'approximation, et que d'ailleurs les Traités, de nous connus au moins, donnent plutôt de ce procédé une simple explication qu'une démonstration rigoureuse, nous commencerons par en exposer complétement une théorie nouvelle, basée sur le principe suivant :

Étant donnée une fraction proprement dite quelconque, si l'on augmente ou si l'on diminue le dénominateur d'un certain nombre, sans altérer le numérateur, la fraction subit elle-même une diminution ou une augmentation, laquelle est plus petite que le quotient du nombre dont on a augmenté ou diminué le dénominateur divisé par le dénominateur de la nouvelle fraction.

En effet, soit la fraction $\frac{7}{12}$, dont j'augmente le dénominateur de 2, par exemple ; j'aurai $\frac{7}{12+2}$, fraction plus petite que la proposée. Pour obtenir la différence entre ces deux fractions, je les réduis au même dénominateur, et, en indiquant simplement les calculs, je trouve $\frac{7(12+2)}{12(12+2)}$ pour la première, et $\frac{7\times 12}{12(12+2)}$ pour la seconde. Le numérateur de la première contient évidemment 7×2 de plus que celui de l'autre, et par conséquent la première surpasse la seconde de

$$\frac{7\times 2}{12(12+2)}=\frac{7}{12}\times\frac{2}{12+2}.$$

Or, le premier facteur de ce produit $\frac{7}{12}$ est la fraction proposée, qui est par hypothèse <1; si donc on divise la différence par ce facteur, le quotient $\frac{2}{12+2}$ sera plus grand que cette différence. Donc, enfin, l'augmentation de la fraction proposée sera plus petite que $\frac{2}{12+2}$. Ce qu'il fallait démontrer.

En général, soit $\frac{a}{b}$ une fraction proprement dite, et d la quantité dont on augmente ou dont on diminue le dénominateur, suivant que d est positif ou négatif, $\frac{a}{b+d}$ sera la nouvelle fraction, et si l'on appelle x la différence entre ces deux fractions, on a

$$x=\frac{a}{b}-\frac{a}{b+d}=\frac{a(b+d)-ab}{b(b+d)}=\frac{ad}{b(b+d)}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{b+d}.$$

Et comme $\frac{a}{b}<1$, évidemment en valeur absolue $x<\frac{d}{b+d}$, que d soit positif ou négatif. Donc, etc.

10. Pour appliquer ce principe, soient d'abord proposés les deux nombres 758275 et 5634, dont on demande

	6
758275	5634
758300	1346
1949	
260	
36	
0	

le quotient, à moins d'une unité d'erreur. Le dividende peut être décomposé en 758300-25, et nous pouvons ne considérer que la première partie, en négligeant la fraction $\frac{25}{5634} < \ldots + \frac{1}{100}$ d'unité, dont le quotient se trouve augmenté.

La question étant ainsi ramenée à diviser 758300 par 5634, j'effectue, suivant la règle ordinaire, la division de 7583 centaines par 5634; je trouve pour quotient 1 et la fraction $\frac{1949}{5634}$ de centaine. En diminuant le dénominateur de cette fraction de 4, j'aurai $\frac{1949}{5630}$, avec une augmentation $< \frac{4}{5634}$, et à fortiori $< \frac{1}{1000}$ de centaine, ou $< \ldots + \frac{1}{10}$ d'unité.

En consentant à cette erreur, je n'aurai qu'à diviser 19490 par 5630, ou, ce qui revient au même, 1949 par 563, pour avoir les dizaines du quotient. J'aurai ainsi 3 et la fraction $\frac{260}{563}$ de dizaine. En diminuant le dénominateur de 3, j'aurai $\frac{260}{560}$, avec une augmentation $< \frac{3}{560}$, ou à fortiori $< \frac{1}{100}$ de dizaine, ou bien $< \ldots + \frac{1}{10}$ d'unité.

Pour avoir les unités, je divise 2600 par 560, ou 260 par 56, et je trouve 4 et la fraction $\frac{36}{56}$ d'unité. Cette fois j'augmente le dénominateur de 4, ce qui me donne $\frac{36}{60}$ avec une diminution $< \frac{4}{60}$, et, à fortiori, $< \ldots \frac{1}{10}$ d'unité.

Alors enfin je divise 360 par 60, ou 36 par 6, et j'obtiens un chiffre de dixièmes. On aura donc 134,6, ou plutôt 135 unités pour le quotient cherché à moins d'une unité d'erreur, puisque la somme de toutes les erreurs commises $\left(\text{plus petites respectivement que } +\frac{1}{100}, +\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\right)$ constitue à peine un ou deux dixièmes. On déduira aisément de ce raisonnement la règle générale suivante :

Pour obtenir le quotient de deux nombres entiers, à moins d'une unité simple d'erreur, effacez d'abord, sur la droite du dividende, autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviseur; divisez ensuite, d'après la règle ordinaire, la partie conservée du dividende, puis continuez l'opération en effaçant, à chaque division partielle, un chiffre sur la droite du diviseur. Vous aurez ainsi un chiffre de trop au quotient, que vous effacerez en ayant soin d'augmenter d'une unité le chiffre précédent, si celui qu'on efface égale ou surpasse 5. On aura toujours le même soin d'augmenter d'une unité le dernier chiffre restant à la droite, soit du dividende, soit du diviseur, lorsque le chiffre suivant, qu'on suppose effacé, égalera ou surpassera 5.

11. En appliquant cette règle à un exemple quelconque, on verra, par le raisonnement qui précède, que, même dans les cas les plus défavorables, ceux où les premiers chiffres du diviseur sont très-petits, jamais aucune des fractions dont on altère successivement le quotient ne peut surpasser une assez petite fraction de l'unité du premier ordre. D'ailleurs, en général, une partie de ces erreurs augmente le quotient, tandis que les autres le diminuent, de sorte qu'en définitive, l'altération totale restera au-dessous d'une unité simple. Cependant, si les nombres proposés renfermaient un grand nombre de chiffres, il pourrait arriver que la méthode abrégée donnât réellement une ou même plusieurs unités d'erreur au quotient. Ainsi, dans la division de 568987658964785637 par 1243242436, on trouve, en appliquant directement la méthode abrégée, 4576642858, ou plutôt 457664286, tandis que le quotient n'est réellement que 457664283 et une fraction. Mais de pareils cas sont fort rares, et, d'ailleurs, il suffirait alors de chercher le quotient avec deux chiffres de trop, en en conservant un de plus au premier dividende partiel, pour être bien sûr de ne pas commettre une unité d'erreur sur le premier ordre.

12. Passons maintenant au cas où l'on demande le quotient de deux nombres entiers ou décimaux, à moins d'une unité d'erreur, d'un ordre décimal donné. On commence alors par effacer la virgule du diviseur, et par reculer celle du dividende d'autant de rangs sur la droite qu'il y a de chiffres décimaux au diviseur, ce qui n'altère en rien le quotient; puis on réduit le dividende en unités décimales de l'ordre correspondant au degré d'approximation donné, et la question se trouve ramenée à déterminer le quotient de deux nombres entiers à moins d'une unité du premier ordre d'erreur. Soit proposé pour exemple de diviser 856,784 par 6,2785, à moins d'un millième d'erreur. Effaçant la virgule du diviseur et reculant celle du dividende de 4 rangs, j'ai 8567840 à diviser par 62785; je réduis le dividende en millièmes, en mettant 3 (o) à la droite, et j'effectue enfin la division de 8567840000 par 62785, ce qui me donne 1364631 pour quotient; effaçant le dernier chiffre, et

$$
\begin{array}{r|r}
 & \cancel{3}\cancel{8}\cancel{9} \\
8567840\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} & 6\cancel{2}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5} \\
\cline{2-2}
228934 & 1364631 \\
405790 & \\
29080 & \\
3964 & \\
196 & \\
7 & \\
1 &
\end{array}
$$

séparant trois chiffres décimaux pour avoir des millièmes, j'ai enfin 136,463 pour le quotient demandé.

13. Appliquons la même règle à trouver le quotient de 38,5674, par 48,565 à moins de 0,01 d'erreur. On ramènera d'abord la question à diviser 3856740 par 48565 à moins d'une unité d'erreur. Ce diviseur ayant 5 chiffres, j'en efface 3 sur la droite du dividende; mais alors la partie restante 3856 ne contenant plus le diviseur, j'efface, sur la droite de celui-ci, assez de chiffres pour qu'une première division partielle soit possible, de sorte qu'en définitive je divise 3857 par 486, et j'ai pour quotient 792, ou plutôt 0,79, en supprimant le dernier chiffre, et plaçant la virgule. On doit remarquer que chaque division partielle donnant un chiffre, tout se réduit en définitive à conserver au diviseur autant de chiffres plus un, que l'on veut en avoir au quotient et au dividende assez pour contenir ce diviseur par plus de neuf fois. Or il est aisé, dans chaque cas, de déterminer combien le quotient doit contenir de chiffres : d'abord, le degré d'approximation donné indique le nombre de chiffres décimaux, et il n'y a qu'à multiplier le diviseur par 0,01 — 0,1 — 1 — 10 — 100... pour trouver celui d'unités entières. Donc, règle générale :

Pour trouver le quotient à moins d'une unité d'erreur d'un ordre décimal donné, de deux nombres décimaux, composés de beaucoup de chiffres ou même illimités, commencez par déterminer le nombre des chiffres du quotient, puis conservez-en un de plus sur la gauche du diviseur, et effacez sur la droite du dividende tous ceux qui ne font pas partie du premier dividende partiel; il ne reste plus alors qu'à effectuer l'opération d'après la méthode connue (12). Soit, par exemple, proposé de diviser 756,85463485463... par 27,5648756487... à moins de 0,001 d'erreur. Le diviseur, multiplié par 10, donne un résultat plus petit que le dividende, tandis que, multiplié par 100, il en donne un plus grand. Le quotient aura donc 2 chiffres d'unités entières. On en veut 3 de décimales, c'est en tout 5. Je prends donc pour diviser les 6 premiers sur la gauche du diviseur proposé, et je divise 756855 par 275649. J'obtiens le quotient 274570, je supprime le dernier chiffre et j'en sépare 3 décimaux, ce qui me donne 27,457 pour le quotient cherché.

14. Passons, enfin, au cas où les nombres proposés sont eux-mêmes approximatifs chacun, à moins d'une *demi-unité* de son dernier ordre. Alors, on pourra les considérer comme étant chacun la partie qu'on aurait conservée de nombres décimaux illimités. Mais, pour plus de clarté, nous distinguerons deux cas :

1°. Si le dividende, abstraction faite des virgules, est plus grand que le diviseur, comme il résulte de la théorie de la division abrégée, qu'une erreur de quelques unités sur le dernier chiffre du diviseur ne peut avoir d'influence que sur le chiffre du quotient qu'on efface, on commencera par mettre un (o) à la droite du diviseur, puis on effacera, sur la droite du dividende, tous les chiffres qui ne feront pas partie du premier dividende partiel. On effectuera ensuite la division d'après la règle du n° **11**, et l'on placera la virgule, en déterminant, comme on l'a dit au numéro précédent, combien le quotient doit avoir de chiffres d'unités entières.

Toutefois, on observera que, si le diviseur commençait par un chiffre au-dessous de 5, et que le quotient contînt un assez grand nombre de chiffres, on devrait, pour être tout à fait sûr de l'exactitude des chiffres conservés, en effacer 2 sur la droite du quotient (11) ;

2°. Si, au contraire, le dividende est plus petit que le diviseur, toujours abstraction faite des virgules, on commencera par mettre un (o) à la droite du dividende, puis on effacera sur la droite du diviseur, assez de chiffres pour rendre possible la première division partielle, et l'on sera ainsi ramené au cas précédent.

Soit, par exemple, à diviser 356,37694 par 2,47936, ces nombres étant supposés approximatifs chacun à une unité de son dernier ordre. Je mets (o) à la droite du diviseur, puis je néglige le dernier chiffre du dividende, et je divise 3563769 par 2479360. J'obtiens 14373, et comme le diviseur, multiplié par 100, donne un résultat plus petit que le dividende, tandis qu'il en donne un plus grand si on le multiplie par 1000, le quotient cherché sera 133,73 à moins d'un centième d'erreur.

Pareillement, pour diviser les deux nombres approximatifs 3,5678 par 4,1256842, je commence par mettre un (o) à la droite du dividende, puis je supprime les deux derniers chiffres à la droite du diviseur, et je divise 3567850 par 412568. Le quotient 864795 étant évidemment compris entre 1 et 0,1, sera 0,86479, à moins d'un cent-millième d'erreur.

15. Dans le cas où un seul des deux nombres serait approximatif et l'autre exact, on opérerait exactement de la même manière en mettant toutefois à la droite du nombre exact assez de (o) pour rendre possible une première division partielle.

Soit, par exemple, le nombre exact 547 à diviser par le nombre approximatif 8769. Je mets d'abord un (o) à la droite du diviseur, puis trois (o) à la droite du dividende, et je divise 547000 par 87690, ce qui me donne 62378, ou plutôt 6238; et, comme le quotient ne doit contenir ni unités ni dixièmes, on a 0,0623.

16. Nous terminerons par observer que, si l'un des nombres étant approximatif, l'autre était illimité, ou bien devait être déterminé soit par un calcul, soit par une expérience, il serait inutile de chercher un nombre

de chiffres plus considérable que ceux qui sont nécessaires pour satisfaire à la règle du numéro précédent, tous les autres ne pouvant avoir d'influence sur l'exactitude du résultat.

17. Faisons-en l'application à quelques questions numériques :

1°. Quel est le volume d'un tonneau rempli d'eau de mer, dont le poids a été obtenu égal à $1524^{kil},37$?

Le poids spécifique de l'eau de mer étant 1,0263, à moins d'un demi-dix-millième, je divise le nombre donné par celui-ci, ou plutôt, suivant la règle du n° **14**, je divise 152437 par 102630, ce qui me donne 148521. Je dois effacer le dernier, ou même ici les deux derniers chiffres (**11**), et comme d'ailleurs le quotient est compris entre 1000 et 10000, j'ai enfin 1485 litres. On ne peut compter sur l'exactitude que des unités de litres, sans y pouvoir rien ajouter par une plus grande précision dans le poids donné.

2°. Quel est le volume de $846^{gr},34$ d'alcool pur?

La densité de ce liquide étant supposée 0,792, à moins d'un demi-millième d'erreur, je divise le premier de ces nombres par le deuxième, ou plutôt 8563 par 7920, et j'ai 108. Comme il faudrait séparer 4 chiffres non décimaux, et que, pour réduire en litres, il faut diviser par 1000, j'ai enfin $1^{lit},08$. Le dernier chiffre du poids a été inutile.

3°. Quel est le volume d'un ballon rempli d'un poids d'hydrogène égal à 525 grammes, dont le poids spécifique est 0,0688, ces deux nombres étant supposés approximatifs, à moins d'une demi-unité de leur dernier ordre?

Je divise 5250 par 688, et j'ai 762 pour quotient; supprimant le dernier chiffre, et plaçant la virgule, j'ai 7,6. Pour trouver le volume en litres, je multiplie ce nombre par 770, et j'ai un produit compris entre 5800 et 5900 ; ainsi, l'erreur peut bien être de près d'une centaine de litres.

Il est inutile de multiplier davantage les exemples pour montrer de quelle importance il peut être, dans certains cas, de trouver dans les Tables de poids spécifique, ou autres, les résultats écrits avec un grand nombre de chiffres décimaux.

18. On peut appliquer les mêmes principes à la détermination des racines carrées et cubiques des nombres approximatifs. Commençons par les racines carrées, et rappelons d'abord ce principe démontré dans tous les Traités d'Algèbre : *Quand on a obtenu la moitié plus un des chiffres d'une racine carrée, par la méthode générale, on obtiendra tous les autres en divisant le reste par le double de la partie trouvée de la racine.* En combinant ce principe avec celui de la division abrégée, on déterminera aisément, dans tous les cas, la partie exacte de la racine d'un nombre approximatif. Mais, pour plus de facilité, distinguons deux cas :

1°. *Si le nombre approximatif proposé contient un nombre pair de chiffres décimaux, extrayez la racine, comme si le nombre était exact; puis mettez un* (o) *à la droite du dernier reste, et effectuez la division abrégée de ce nombre par le double de la racine. Vous placerez la partie exacte de ce quotient à la droite de la racine déjà obtenue, et vous aurez la racine, à moins d'une unité d'erreur de son dernier ordre décimal.* Soit pour exemple le nombre approximatif 3,456783. Je trouve d'abord, par la méthode ordinaire, 1859 avec le reste 902. Je mets un (o) à la droite de ce nombre, et je divise 9020 par 3718, double de la racine, ce qui me donne 2435 ou 243, et, partant, j'ai, pour la racine cherchée, 1,859243.

2°. *Si le nombre proposé contient un nombre impair de chiffres décimaux, commencez par mettre un* (0) *à la droite, et vous serez ramené au cas précédent. Seulement, il ne sera plus permis de mettre un nouveau* (0) *à la droite du dernier reste, et, pour rendre la première division partielle possible, vous devrez commencer par effacer le premier chiffre à la droite du diviseur.* Soit pour exemple le nombre approximatif 5426,356; j'extrais la racine de 54263560, et j'ai 7366 avec le reste 5604. Je le divise par 14732, ou plutôt par 1473, et j'ai 381, de sorte que la racine cherchée égale 73,6381, à moins d'un cent-millième d'erreur.

19. Quant aux racines cubiques, on démontre pareillement que, *si l'on a obtenu par la méthode générale plus de la moitié plus deux, des chiffres d'une racine cubique quelconque, on peut obtenir tous les autres en divisant le reste par trois fois le carré de la partie connue de la racine.* De ce principe, combiné avec celui de la division abrégée, on a déduit la règle suivante, pour extraire la racine cubique d'un nombre approximatif:

1°. *Si le nombre proposé contient un nombre de chiffres décimaux multiple de* 3, *on en extraira la racine cubique comme s'il était exact, puis on divisera le dernier reste par trois fois le carré de la racine trouvée, en ne cherchant de ce quotient qu'autant de chiffres moins trois qu'on en a déjà obtenu à la racine.*

2°. *Si le nombre proposé ne contient pas un nombre de chiffres décimaux multiple de* 3, *on commencera par ramener ce cas au précédent, en plaçant un ou bien deux* (0) *à la droite du nombre.* Parce qu'en effet les deux derniers chiffres du nombre n'influent en rien ni sur la partie de la racine qu'on cherche par la méthode générale, ni sur celle qu'on obtient par la division abrégée, le quotient contenant toujours beaucoup plus de chiffres que l'on ne doit en conserver. Appliquons cette règle à un exemple; mais auparavant exposons, sur le procédé général de l'extraction des racines cubiques, une remarque qui n'a point encore été faite, du moins nous le pensons, et qui abrége considérablement les calculs de cette opération, surtout quand le nombre proposé contient beaucoup de chiffres.

20. On sait qu'à l'exception du premier, tous les chiffres d'une racine cubique s'obtiennent en divisant par trois fois le carré de la racine déjà obtenue, le reste correspondant suivi du premier chiffre de la tranche suivante. Pour vérifier ce chiffre, que l'on peut toujours considérer comme des unités, les autres étant des dizaines, et obtenir le nouveau reste, on peut former le cube de toute la racine, et le soustraire de toute la partie du nombre sur laquelle on a opéré; mais on peut aussi former directement les trois parties $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (a désignant les dizaines, et b les unités) contenues dans le reste, et les en retrancher. Pour cela, on écrit, l'un au-dessous de l'autre, les trois nombres $3a^2$, $3\,ab$, b^2 (en les réduisant, au moyen de deux (o) pour le premier, et de un (o) pour le deuxième, en unités du premier ordre), puis on additionne ces trois nombres, et l'on multiplie la somme par b.

Le premier procédé est beaucoup plus long, et, cependant, on le préfère ordinairement parce que, dit-on, en formant le cube de la racine on a le carré, et, partant, on obtient aisément trois fois ce même carré qui sert à trouver le chiffre suivant. Mais, dans la deuxième manière, on peut aussi obtenir très-aisément trois fois ce carré (et c'est en cela que consiste notre remarque), en observant que

$$3(a+b)^2 = 3a^2 + 3.2ab + 3b^2 = 3a^2 + 2.3ab + 3.b^2.$$

Or, les trois nombres qu'on a additionnés dans l'opération précédente, étant $3a^2$, $3ab$ et b^2, *il suffit de multiplier respectivement ces trois nombres par* 1, *par* 2 *et par* 3, *et d'ajouter les trois résultats pour avoir trois fois le carré de la racine*. Il en résulte une méthode d'opérer qui nous a paru remarquable, tant pour la symétrie des calculs et pour la facilité avec laquelle elle se démontre, que pour la simplification qu'elle introduit dans l'extraction des racines cubiques.

Pour en donner un exemple, ainsi que de la règle d'approximation, soit proposé d'extraire la racine cubique du nombre approximatif 57524,8567236. Je mets d'abord deux (0), et j'extrais la racine cubique de 57524856723600.

$$30 \times 3 \times 8 = 90 \times 8$$
$$380 \times 3 \times 6 = 1140 \times 6$$
$$38600 \times 3 \times 2 = 115800 \times 2$$

57524856723600 | 38602
30524
2652856
12400723600
3460500392

2700 1
720 2
64 3
3484

2700
1440
192
433200 1
6840 2
36 3
440076

433200
13680
108
4469880000 1
231600 2
4 3
4470111604

4469880000
463200
12
4470343212

3460 | 447
331 | 774
16

Racine = 38,60277.

Pour effectuer cette opération, j'ai d'abord pris la racine cubique du plus grand cube contenu dans 57, ce qui m'a donné 3 avec le reste 30; à côté de ce reste, j'ai abaissé les trois chiffres suivants; j'ai séparé les deux derniers et j'ai divisé la partie de gauche 305 par 27, égal à trois fois le carré de la racine trouvée 3.

Le quotient étant supposé 8, pour le vérifier, je mets deux (o) à la droite de 27; j'écris au-dessous le produit $30 \times 3 \times 8$ et encore le carré de 8; j'additionne ces trois nombres; je multiplie la somme 3484 par 8, et je soustrais le produit de 30524; à la suite du reste 2652, j'abaisse les trois chiffres suivants du nombre, je sépare les deux derniers, et je divise la partie de gauche 26528 par trois fois le carré de 38. Pour obtenir ce diviseur, je place 1, 2 et 3 respectivement à droite des nombres 2700, 720 et 64, que je multiplie les uns par les autres; j'additionne les produits, et la somme 4332 est le diviseur cherché; la division de 26528 par 4322 me donne le quotient 6 avec le reste 12400, à la droite duquel j'abaisse les trois chiffres suivants.... En continuant d'opérer toujours exactement de la même manière, j'obtiens les cinq chiffres 38602 avec le reste 3460500392.

Après avoir obtenu cinq chiffres, on en peut avoir deux en divisant le reste par trois fois le carré de la racine $= 4470343212$. Comme on n'a besoin, au quotient, que de deux chiffres, je divise simplement 3460 par 467 et j'ai 77. Mettant le quotient 77 à la droite de la racine déjà obtenue, j'ai, enfin, 38,60277 pour la racine cherchée, à moins d'un cent-millième d'erreur.

SUR UN CERTAIN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ;

D'APRÈS M. JACOBI (*).

(Journal de M. Crelle, t. XXX, p. 51-94; 1846.)

1. Soit le système suivant de n équations linéaires entre les n inconnues α, β, γ,..., π :

$$(1)\quad \begin{cases} a'_1\alpha + a'_2\beta + a'_3\gamma + \ldots + a'_n\pi = t\alpha, \\ a''_1\alpha + a''_2\beta + \ldots\ldots\ldots + a''_n\pi = t\beta, \\ \vdots \\ a^{(n)}_1\alpha + a^{(n)}_2\beta + \ldots\ldots\ldots + a^{(n)}_n\pi = t\pi. \end{cases}$$

On suppose qu'on a la relation

$$(2)\qquad a^{(p)}_q = a^{(q)}_p,$$

p et q étant des nombres de la suite 1, 2, 3,..., n.

On a n équations entre les $n-1$ rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$,..., $\frac{\pi}{\alpha}$; éliminant ces rapports, on obtient, comme on sait, une équation en t, de degré n.

Soient t_1, t_2,..., t_n, les n racines de cette équation. Substituant successivement ces racines dans $n-1$ quelconques des équations du système (1), on aura n systèmes de valeurs, pour les $n-1$ rapports. Si l'on pose, de plus,

$$(3)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \pi^2 = 1,$$

$\frac{1}{\alpha^2}$ sera une quantité connue; donc α sera connu, de même β, etc. Ainsi, à l'aide de l'équation (3), les n

(*) On lit l'extrait d'un beau Mémoire de M. Sturm, sur le même sujet, dans le Bulletin de Férussac (*Mathématiques*, t. XII, p. 316; 1829).

systèmes de valeurs des inconnues seront complétement déterminés.

2. Désignons par $\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$,..., $\pi^{(p)}$, les valeurs des inconnues qui correspondent à la racine t_p; (p) désigne un nombre d'accents.

Les équations (1) donnent donc

$$\begin{aligned} a'_1\alpha' + a'_2\beta' + \ldots + a'_n\pi' &= t_1\alpha', \\ a''_1\alpha' + a''_2\beta' + \ldots + a''_n\pi' &= t_1\beta', \\ &\vdots \\ a_1^{(n)}\alpha' + a_2^{(n)}\beta' + \ldots + a_n^{(n)}\pi' &= t_1\pi'. \end{aligned}$$

Si l'on additionne ces équations après avoir multiplié la première par α'', la seconde par β'',..., la dernière par π'', le coefficient de α', dans le membre à gauche, sera $a'_1\alpha'' + a''_1\beta'' + \ldots a_1^{(n)}\pi''$; et, d'après la relation (2), cette expression est la même que

$$a'_1\alpha'' + a'_2\beta'' + a'_3\gamma'' + \ldots + a'_n\pi'';$$

mais c'est ce que devient le membre à gauche de la première des équations (1), pour la racine t_2 : donc le coefficient de α' est $t_2\alpha''$. On prouve de même que le coefficient de β' devient $t_2\beta''$, et ainsi des autres; donc on a

$$\begin{aligned} & t_2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' + \ldots + \pi'\pi'') \\ = & t_1(\alpha'\alpha + \beta'\beta'' + \ldots \pi'\pi''). \end{aligned}$$

Et lorsque t_1 n'est pas égal à t_2, on a

$$(4) \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \ldots + \pi'\pi'' = 0.$$

Cette relation montre, selon l'observation de M. Cauchy (*), que toutes les racines de l'équation en t sont réelles.

En effet, soient t_1, t_2, deux racines imaginaires *conju-*

(*) Ce mode de démonstration a déjà été employé par Lagrange (*Méc. anal.*, t. II, p. 248; 2e édit.)

guées, les rapports $\frac{\beta'}{\alpha'}$ et $\frac{\beta''}{\alpha''}$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}$, $\frac{\gamma''}{\alpha''}$, etc., qui sont des fonctions rationnelles de t, auront aussi des valeurs imaginaires conjuguées. Ainsi les produits $\frac{\beta'\beta''}{\alpha'\alpha''}$, $\frac{\gamma'\gamma''}{\alpha'\alpha''}$, seront chacun la somme de deux carrés, ce qui rendrait impossible la relation (4); donc, etc.

3. Considérons les n équations linéaires suivantes :

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} p_1 = \alpha' q_1 + \alpha'' q_2 + \ldots + \alpha^{(n)} q_n, \\ p_2 = \beta' q_1 + \beta'' q_2 + \ldots + \beta^{(n)} q_n, \\ \vdots \\ p_n = \pi' q_1 + \pi'' q_2 + \ldots + \pi^{(n)} q_n; \end{array}\right.$$

α', α'', etc., ayant la même signification que ci-dessus.

Si l'on additionne les carrés de ces expressions, et que l'on ait égard aux relations (3) et (4), on obtient

$$(6)\quad p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \ldots + q_n^2.$$

Additionnant ces équations, après avoir multiplié la première par α', la deuxième par β',..., et la dernière par π', on trouve

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{l} q_1 = p_1\alpha' + p_2\beta' + \ldots + p_n\pi', \\ \quad\text{et, de même,} \\ q_2 = p_1\alpha'' + p_2\beta'' + \ldots + p_n\pi'', \\ \vdots \\ q_n = p_1\alpha^{(n)} + p_2\beta^{(n)} + \ldots + p_n\pi^{(n)}. \end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs dans la première des équations (5), on trouve

$$\begin{array}{l} p_1 = [(\alpha')^2 + (\alpha'')^2 + \ldots + (\alpha^{(n)})^2]p_1, \\ \qquad [\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)}]p_2, \\ \qquad \vdots \\ \qquad [\alpha'\pi' + \alpha''\pi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\pi^{(n)}]p_n; \end{array}$$

et, à cause de l'indépendance de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on a

$$(8) \qquad (\alpha')^2 + (\alpha'')^2 + \ldots + (\alpha^{(n)})^2 = 1,$$

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)} = 0, \\ \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \ldots + \alpha^{(n)}\gamma^{(n)} = 0, \\ \vdots \\ \alpha'\pi' + \alpha''\pi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\pi^{(n)} = 0. \end{array} \right.$$

On trouve des équations analogues pour β', γ', etc.

4. La première des équations (1) donne

$$t_1\alpha' = a'_1\alpha' + a'_2\beta' + \ldots + a'_n\pi',$$
$$t_2\alpha'' = a'_1\alpha'' + a'_2\beta'' + \ldots + a'_n\pi'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on additionne ces n équations, après avoir multiplié la première par α', la deuxième par α'', etc., en ayant égard aux équations (8) et (9), on obtient

$$t_1\alpha'^2 + t_2\alpha''^2 + \ldots + t_n\alpha^{(n)2} = a'_1,$$

et, de même,

$$t'_1\alpha'\beta' + t_2\alpha''\beta'' + \ldots + t_n\alpha^{(n)}\beta^{(n)} = a'_2;$$

et encore $n - 2$ relations semblables pour γ, δ, ..., π. Faisant usage de ces n relations, on déduit des équations (7),

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t_1 q_1^2 + t_2 q_2^2 + \ldots + t_n q_n^2 \\ = a'_1 p_1^2 + 2a''_1 p_1 p_2 + 2a'''_1 p_1 p_3 + \ldots \\ \qquad\qquad a''_2 p_2^2 + 2a'''_2 p_2 p_3 \\ \qquad\qquad\qquad + a'''_3 p_3^2 \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots. \end{array} \right.$$

La loi est évidente. On forme le carré de

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n;$$

à chaque terme $p_r\, p_s$ on donne pour coefficient $2a_r^{(s)}$, et au terme $(p_r)^2$ le coefficient $a_r^{(r)}$.

Formules générales de correction pour les valeurs des inconnues.

5. Supposons que les coefficients a_1, a'_2, etc., des inconnues varient de quantités finies, mais assez petites pour qu'on puisse négliger les puissances des variations supérieures à la première puissance. Il s'agit de déterminer les variations correspondantes des inconnues.

Soient $\Delta a^{(s)}_r$ la variation du coefficient $a^{(s)}_r$, et Δt_1, $\Delta\alpha'$ les variations correspondantes de t_1 et α'. Les équations (1) donnent :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha'\Delta t_1 - (\alpha'\Delta a'_1 + \beta'\Delta a''_1 + \gamma'\Delta a'''_1 + \ldots) \\
&= [(a'_1 - t_1)\Delta\alpha' + a'_1\Delta\beta' + a''_1\Delta\gamma' + \ldots]; \\
&\beta'\Delta t_1 - [a'\Delta(a''_1) + \beta'\Delta a''_2 + \gamma'\Delta a''_3 + \ldots] \\
&= a''_1\Delta\alpha' + (a''_2 - t_1)\Delta\beta' + a''_3\Delta\gamma' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Ajoutant ces équations, multipliées la première par α', la deuxième par β', la troisième par γ', etc., on obtient, d'après les relations données ci-dessus,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta t_1 = \alpha'^2\Delta\alpha'_1 + 2\alpha'\beta'\Delta a'_2 + 2\alpha'\gamma'\Delta a'_3 + 2\alpha'\delta'\Delta a'_4 + \ldots \\
\beta'^2\Delta a''_2 + 2\beta'\gamma'\Delta a''_3 + 2\beta'\delta'\Delta a''_4 + \ldots \\
\gamma^2\Delta a'''_3 + 2\gamma\delta'\Delta a'''_4 + \ldots \\
\delta'^2\Delta a^{\text{IV}}_4 + \ldots \\
\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

La loi est évidente. On a donc Δt_1 en fonction des augmentations des coefficients. Ajoutant aux deux membres des équations (11) $(t_1 - t_2)\,\Delta\alpha'$ à la première, $(t_1 - t_2)\,\Delta\beta'$ à la seconde, $(t_1 - t_2)\,\Delta\gamma'$ à la troisième, et ainsi de suite, et puis additionnant ces équations, après avoir multiplié la première par α'', la deuxième par β'', et la troisième par γ'', etc., on obtient

$$\begin{aligned}
&(t_1 - t_2)(\alpha''\Delta\alpha' + \beta''\Delta\beta' + \gamma''\Delta\gamma' + \ldots) \\
&= \alpha''\alpha'\Delta a'_1 + (\alpha''\beta' + \alpha'\beta'')\Delta a'_2 + \beta''\beta'\Delta a''_2 + \ldots;
\end{aligned}$$

et, de même,

$$(t_1 - t_3)(\alpha'''\Delta\alpha' + \beta'''\Delta\beta' + \gamma'''\Delta\gamma' + \ldots)$$
$$= \alpha'''\alpha'\Delta a'_1 + (\alpha'''\beta' + \alpha'\beta''')\Delta a'_2 + \beta'''\beta'\Delta a'_2 + \ldots$$

On a ainsi $n - 1$ équations entre les n variations $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$, etc.; à quoi il faut ajouter la $n^{ième}$ équation déduite de l'équation (3),

$$\alpha'\Delta\alpha' + \beta'\Delta\beta' + \gamma'\Delta\gamma' + \ldots = 0.$$

Multipliant les $n - 1$ équations respectivement, la première par $\frac{\alpha''}{t_1 - t_2}$, la deuxième par $\frac{\alpha'''}{t_1 - t_3}$, etc., et la $n^{ième}$ équation par α', et les ajoutant, les grandeurs $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$, etc., seront, en vertu des relations (9), simultanément éliminées, et l'on obtient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha' = {} & \alpha'\left(\frac{\alpha''^2}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''^2}{t_1 - t_3} + \ldots\right)\Delta a'_1 \\ & + \left[\beta'\left(\frac{\alpha''^2}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''^2}{t_1 - t_3} + \ldots\right) + \alpha'\left(\frac{\alpha''\beta''}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''\beta'''}{t_1 - t_3} + \ldots\right)\right]\Delta a'_2 \\ & + \beta'\left(\frac{\alpha''\beta''}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''\beta'''}{t_1 - t_3} + \ldots\right)\Delta a''_2 + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Les équations (12) et (13) donnent donc les coefficients différentiels exacts,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{dt_1}{da'_1} = \alpha'^2; \qquad \frac{dt_1}{da'_2} = 2\alpha'\beta'; \ldots; \\ & \frac{d\alpha'}{da'_1} = \alpha'\left(\frac{\alpha''^2}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''^2}{t_1 - t_3} + \ldots\right); \\ & \frac{d\alpha'}{da'_1} = \beta'\left(\frac{\alpha''\beta''}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''\beta'''}{t_1 - t_3} + \ldots\right); \\ & \frac{d\alpha'}{da'_2} = \frac{\beta'}{\alpha'}\frac{d\alpha'}{da'_1} + \frac{\alpha'}{\beta'}\frac{d\alpha'}{da''_2}; \\ & \frac{d\alpha'}{da'''_2} = \frac{\gamma'}{\beta'}\frac{d\alpha'}{da''_2} + \frac{\beta'}{\gamma'}\frac{d\alpha'}{da'''_3}; \\ & \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Par des mutations convenables, ces élégantes formules donnent les premiers coefficients différentiels de toutes les inconnues des n systèmes pris par rapport aux coefficients du système donné (1). On voit que les premiers coefficients différentiels des n racines t_1, $t_2, \ldots, t_n$ sont donnés immédiatement par les valeurs des inconnues, et que les coefficients différentiels des inconnues $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, pris d'après les coefficients du système (1), peuvent se calculer aisément, seulement à l'aide des coefficients différentiels pris d'après a'_1, a''_2, a'''_3, et entre lesquels existe même la relation $\alpha' \frac{d\alpha'}{da''_2} = \beta' \frac{d\beta'}{da'_1}$; les premiers coefficients différentiels de α', β', etc., donnent les seconds coefficients différentiels des racines t_1, t_2, etc. Si les incréments $\Delta a'_2$ et $\Delta a''_1$ ne sont pas égaux, alors il faut remplacer dans l'équation (12) $\Delta a'_2$ par $\frac{1}{2}(\Delta a'_2 + \Delta a''_1)$, et, dans l'équation (13), il faut dans ce qui multiplie $\Delta a'_2$, multiplier la première partie par $\Delta a'_2$ et la seconde par $\Delta a''_1$.

Application astronomique.

6. Le but du présent Mémoire n'est pas purement analytique; mais l'illustre auteur s'est proposé de fournir un procédé simple de résoudre *numériquement* les équations qui se présentent dans la théorie des perturbations séculaires (Laplace, *Mécanique céleste,* liv. II, § 55). On lit en cet endroit du Mémoire de Jacobi sept équations différentielles du premier degré, relatives aux sept orbites de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus. L'intégration fournit sept équations du premier degré, à huit inconnues, ayant la forme des équations du système (1). A l'aide d'ingénieuses transformations, on obtient des équations dont les coefficients satisfont à la relation (2); les données numériques sont empruntées au

beau travail de M. Le Verrier sur le même sujet (*Additions à la Connaissance des Temps* pour l'année 1843). Les calculs, très-nombreux, ont été exécutés par M. Louis Seidel, de Munich, élève de Jacobi. Les résultats comparés montrent que le procédé de Jacobi est beaucoup plus exact que celui dont M. Le Verrier a fait usage (*voyez* pages 90, 91 et 92 du Mémoire allemand). Dans l'absence si regrettable d'un journal d'Astronomie, M. Liouville, Membre du Bureau des Longitudes, suppléerait, autant que faire se peut, à une lacune si honteuse pour le pays, en insérant *in extenso* le Mémoire de l'illustre Prussien, et d'autres travaux analogues, dans son précieux Recueil destiné aussi aux mathématiques appliquées (*).

SUR LES SURFACES ORTHOGONALES;

PAR M. LEBESGUE.

Définition. Si deux surfaces, ayant pour équations $u = 0$, $v = 0$, se coupent suivant certaines lignes c, c', etc.; et lorsque, pour tous les points d'une de ces courbes, c par exemple, les plans tangents aux surfaces

(*) Pourquoi la nation ne fait-elle pas construire dans les environs de Paris un *observatoire-modèle,* à l'instar de celui de Pulkova? L'argent ne nous fait pas défaut pour atteindre le niveau astronomique de la Russie. Car nous consacrons bien des centaines de mille francs à publier des vignettes, des dessins de catacombes, etc. Les sites ne manquent pas non plus. On pourrait approprier à cette destination le château de Meudon, ou bien la tour dite *des Anglais* près Clamart. L'exactitude moderne exige que les murs du bâtiment soient abrités contre les commotions de la ville; et même ses habitants, les observateurs. Uranie est une déesse jalouse, imposant à ses fidèles un culte assidu, exclusif, une adoration perpétuelle.

sont perpendiculaires entre eux, les surfaces elles-mêmes sont dites *orthogonales*.

Remarque. Il peut se faire que l'orthogonalité ait lieu pour une courbe et non pour l'autre. Ainsi, il est aisé de former des équations de courbes qui se coupent perpendiculairement en un point, obliquement en un autre; telles seraient, par exemple, les courbes d'équations $y^2 = 2px$, $x^2 = 2qy$, toujours perpendiculaires à l'origine, et jamais au second point de rencontre. Si maintenant on les fait tourner autour d'une droite de leur plan, on aura deux surfaces de révolution, qui se couperont perpendiculairement sur le parallèle décrit par l'origine, et obliquement sur le parallèle décrit par le deuxième point d'intersection.

THÉORÈME I. *Pour que les surfaces* $u = 0$, $v = 0$ *soient orthogonales, il faut que les valeurs réelles* $x = \varphi z$, $y = \psi z$, *tirées de ces deux équations, rendent identiques l'équation*

$$(uv) = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dv}{dz} = 0.$$

Démonstration. Si l'équation $(uv) = 0$ se réduisait à $\theta(z) = 0$, la perpendicularité aurait lieu aux points seuls de l'intersection déterminés par l'équation $\theta(z) = 0$; il faut donc que z disparaisse pour que la perpendicularité ait lieu sans discontinuité.

Exemples. Pour les surfaces

$$u = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0, \quad v = \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} - 1 = 0,$$

l'équation $(uv) = 0$ ne deviendra identique que moyennant les conditions $a - a' = b - b' = c - c'$, qui expriment que les sections principales ont les mêmes foyers.

Pour les surfaces

$$u = 2z - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0, \quad v = 2z - \frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} - c' = 0,$$

l'équation $(uv)=0$ ne devient identique que par les conditions $a-a'=b-b'=c'$, qui expriment encore que les sections principales ont les mêmes foyers.

Théorème II. *Si les surfaces $u=0$, $v=0$ sont orthogonales, l'équation $(uv)=0$ entraîne cette autre $d(uv)=0$, qui doit aussi devenir identique par l'élimination de x, y, au moyen des équations $u=0$, $v=0$.*

Démonstration. Cela résulte de ce que l'équation $(uv)=0$ doit être aussi satisfaite par $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, en supposant les rapports de dx, dy, dz déterminés par les équations

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,\quad \frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz=0;$$

mais, comme cela doit avoir lieu, quel que soit z, z doit disparaître du résultat.

Remarque. Si les équations $u=0$, $v=0$, $(uv)=0$, $d(uv)=0$ s'accordaient sans que les deux dernières devinssent identiques par l'élimination de z, il faudrait en conclure seulement que la perpendicularité des plans tangents aurait lieu pour deux points consécutifs de l'intersection.

Théorème III. *Si les deux surfaces $u=0$, $v=0$ sont orthogonales, et que la condition $d(uv)=0$ se partage en ces deux autres,*

$$\frac{dv}{dx}d\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{dv}{dy}d\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{dv}{dz}d\left(\frac{du}{dz}\right)=0,$$
$$\frac{du}{dx}d\left(\frac{dv}{dx}\right)+\frac{du}{dy}d\left(\frac{dv}{dy}\right)+\frac{du}{dz}d\left(\frac{dv}{dz}\right)=0,$$

qui, ainsi que $(uv)=0$, deviennent identiques par l'élimination de x, y, les deux surfaces se couperont suivant une ligne qui sera, pour chaque surface, une ligne de courbure.

Démonstration. J'ignore si ce théorème remarquable a déjà été donné, mais il se démontre en quelques mots : on a les équations

$$\frac{dv}{dx} \cdot dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy} d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz} d\left(\frac{du}{dz}\right) = 0.$$

L'élimination de $\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$ donne immédiatement

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} & d\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy} dz - \frac{du}{dz} dy\right) \\ & + d\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{du}{dz} dx - \frac{du}{dx} dz\right) \\ & + d\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

qui n'est autre que l'équation des lignes de courbure sous la forme que lui a donnée M. Joachimsthal.

Remarque. Pour les surfaces orthogonales du second degré données plus haut, on reconnaît de suite que l'équation de condition $d(uv) = 0$ se partage comme il est indiqué plus haut ; ainsi ces surfaces se coupent suivant des lignes de courbure. Je reviendrai plus loin sur cette remarque.

THÉORÈME IV. *Si deux surfaces orthogonales* $u = 0$, $v = 0$, *se coupent suivant une ligne de courbure de la surface* $u = 0$, *l'intersection sera aussi une ligne de courbure de la surface* $v = 0$.

Démonstration. On a ici l'équation (A) du théorème précédent ; puis les équations

$$\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz = 0,$$

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dv}{dz} = 0,$$

donnent

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dy}dz - \frac{du}{dz}dy} = \frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{du}{dz}dx - \frac{du}{dx}dz} = \frac{\frac{dv}{dz}}{\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx};$$

ce qui réduit l'équation (A) à

$$\frac{dv}{dx}\,d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy}\,d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz}\,d\left(\frac{du}{dz}\right) = 0;$$

par suite, on aura

$$\frac{du}{dx}\,d\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy}\,d\left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{du}{dz}\,d\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0.$$

De sorte que le théorème III mentionne que l'intersection est une ligne de courbure pour chaque surface.

Théorème V. *Si trois surfaces, $u=0$, $v=0$, $w=0$, sont orthogonales deux à deux, les équations $d(uv)=0$, $d(vw)=0$, $d(wu)=0$ se partagent, comme il est dit plus haut, et les trois courbes d'intersection passant par le point m sont tangentes aux lignes de courbure relatives à ce point.*

Démonstration. La comparaison des équations

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0, \quad \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz = 0,$$

à celles-ci :

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dw}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dw}{dz} = 0,$$
$$\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\cdot\frac{dw}{dz} = 0,$$

montre que les dx, dy, dz relatifs à l'intersection des surfaces $u=0$, $v=0$ sont proportionnels à $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$.

De même, pour l'intersection des surfaces $v=0$, $w=0$, les dx, dy, dz seront proportionnels à $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$; et, pour l'intersection des surfaces $w=0$, $u=0$, les dx, dy, dz seront proportionnels à $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$. Cela posé, dans le développement des équations

$$d(uv)=0,\quad d(vw)=0,\quad d(wu)=0,$$

ou bien dans les équations

$$\left[\frac{dv}{dx}\cdot d\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{dv}{dy}\cdot d\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{dv}{dz}\cdot d\left(\frac{du}{dz}\right)\right]$$
$$+\left[\frac{du}{dx}\cdot d\left(\frac{dv}{dx}\right)+\frac{du}{dy}\cdot d\left(\frac{dv}{dy}\right)+\frac{du}{dz}\cdot d\left(\frac{dv}{dz}\right)\right]=P+Q=0,$$

$$\left[\frac{dv}{dx}\cdot d\left(\frac{dw}{dx}\right)+\frac{dv}{dy}\cdot d\left(\frac{dw}{dy}\right)+\frac{dv}{dz}\cdot d\left(\frac{dw}{dz}\right)\right]$$
$$+\left[\frac{dw}{dx}\cdot d\left(\frac{dv}{dx}\right)+\frac{dw}{dy}\cdot d\left(\frac{dv}{dy}\right)+\frac{dw}{dz}\cdot d\left(\frac{dv}{dz}\right)\right]=R+Q'=0,$$

$$\left[\frac{dw}{dx}\cdot d\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{dw}{dy}\cdot d\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{dw}{dz}\cdot d\left(\frac{du}{dz}\right)\right]$$
$$+\left[\frac{du}{dx}\cdot d\left(\frac{dw}{dx}\right)+\frac{du}{dy}\cdot d\left(\frac{dw}{dy}\right)+\frac{du}{dz}\cdot d\left(\frac{dw}{dz}\right)\right]=P'+R'=0,$$

on reconnaît de suite que l'on a

$$P=P',\quad Q=Q',\quad R=R';$$

par suite

$$P+Q+R=0,$$

d'où

$$R=0,\quad P=0,\quad Q=0$$

On trouve, en effet, pour P,

$$\frac{dv}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dw}{dx}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}$$
$$+\frac{d^2u}{dx\,dy}\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}\right)+\frac{d^2u}{dx\,dz}\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dz}+\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx}\right)$$
$$+\frac{d^2u}{dy\,dz}\left(\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}+\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}\right)=0;$$

quant à P′, il ne diffère de P que par le changement de v en w, et réciproquement, d'où il résulte que $P = P'$.

Puisque le partage des équations

$$d(uv) = 0,\quad d(vw) = 0,\quad d(wu) = 0,$$

a lieu au point m, on en conclura, par le théorème III, qu'en ce point les intersections sont tangentes aux lignes de courbure. Il n'est pas même nécessaire que les trois surfaces soient complétement orthogonales, il suffit que les équations $(uv) = 0$, $d(uv) = 0$, etc., aient lieu pour deux points consécutifs.

Théorème VI. *Si l'on a trois séries continues de surfaces* S_1, S_2, S_3, *qui soient orthogonales deux à deux, les intersections d'une surface déterminée* s_1, *du premier groupe, par deux surfaces déterminées* s_2, s_3, *des deux autres groupes, seront précisément les lignes de courbure de* S_1.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent; car, si l'on nomme m, m', m'',..., les points de rencontre des surfaces S_3 avec l'intersection de s_1, s_2, on reconnaîtra que les points m, m', m'',..., appartiennent à une ligne de courbure des surfaces s_1, s_2 (*).

Ce théorème est de M. Dupin (*Dév. de Géom.*, t. I, p. 239). Pour l'appliquer à la détermination des lignes de courbure, il faudrait, en prenant une série continue S_1, contenant une surface donnée s_1, déterminer les deux séries continues S_2, S_3, orthogonales à S_1, et, de plus, orthogonales entre elles. C'est une question difficile sur laquelle l'auteur se proposait de revenir (*Dév. de Géom.*, t. I, p. 330). Il me semble que le théorème III doit être

---

(*) Dans une Note du tome VIII, p. 382 de ces *Annales*, j'ai mal énoncé et mal démontré cette proposition; les théorèmes V et VI serviront de rectification.

d'une application plus facile. M. Dupin a donné, pour les surfaces du second degré, les trois séries continues S_1, S_2, S_3; on lui doit aussi un théorème particulier pour déterminer les lignes de courbure des surfaces du second degré : *L'intersection de deux surfaces du second degré, trajectoires réciproques orthogonales, est précisément, pour l'une et pour l'autre, une des lignes de leur courbure.* (*Dév. de Géom.*, t. I, p. 303.)

Or ce théorème est un cas particulier du théorème III.

Si l'on prend les deux systèmes

$$u = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0, \quad v = \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} - 1 = 0,$$

$$u = 2z - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}, \quad v = 2z - \frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} - c' = 0,$$

on reconnaît de suite que les équations

$$d\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{du}{dx}\cdot d\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy}\cdot d\left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{du}{dz}\cdot d\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{dv}{dx}\cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dy}\cdot d\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dv}{dz}\cdot d\left(\frac{du}{dz}\right) = 0,$$

sont les mêmes en supprimant un facteur numérique constant. La même chose aurait encore lieu si, dans les équations, l'exposant 2 était remplacé par l'exposant m; mais il est probable qu'alors les conditions qui servent à rendre $(uv) = 0$ identique, par l'élimination de x, y, seraient généralement trop nombreuses pour s'accorder.

Voici les équations au moyen desquelles il sera facile de discuter les lignes de courbure des surfaces du second degré, en supposant que ces lignes doivent passer par un point (α, β, γ).

Pour la surface $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, et, par conséquent,

$\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c}=1$, on prendra la surface orthogonale $\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}=1$, il en résultera

$$\frac{x^2}{a(a-u)}+\frac{y^2}{b(b-u)}+\frac{z^2}{c(c-u)}=0,$$

qui revient à $(u\nu)=0$; de là,

$$\frac{\alpha^2}{a(a-u)}+\frac{\beta^2}{b(b-u)}+\frac{\gamma^2}{c(c-u)}=0,$$

et, par suite, en posant

$$2\rho=a+b+c-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2,$$

on aura

$$u^2-2\rho u+bc\frac{\alpha^2}{a}+ca\frac{\beta^2}{b}+ab\frac{\gamma^2}{c}=0,$$

d'où

$$u=\rho\pm\sqrt{\mathrm{R}};$$

mais, comme on a

$$\begin{aligned}\mathrm{R}&=\rho^2-\left(bc\frac{\alpha^2}{a}+ca\frac{\beta^2}{b}+ab\frac{\gamma^2}{c}\right)\\&=(a-\rho)^2-(b-a)(c-a)\frac{\alpha^2}{a}\\&=(b-\rho)^2-(c-b)(a-b)\frac{\beta^2}{b}\\&=(c-\rho)^2-(a-c)(b-c)\frac{\gamma^2}{c},\end{aligned}$$

on reconnaîtra que R n'est jamais négatif; et si l'on représente par $\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2=\mathrm{R}_3$, les trois dernières formes de R, on aura

$$\begin{aligned}a-u&=a-\rho\mp\sqrt{\mathrm{R}_1},\\b-u&=b-\rho\mp\sqrt{\mathrm{R}_2},\\c-u&=c-\rho\mp\sqrt{\mathrm{R}_3}.\end{aligned}$$

J'omets le reste de la discussion; il sera bon de considérer à part chaque espèce de surface. Comme les deux surfaces orthogonales à la surface donnée sont orthogonales entre elles, on voit que les lignes de courbure se coupent à angle droit.

Pour la surface $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ et $2\gamma = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}$, en prenant la surface orthogonale

$$2z = \frac{x^2}{a-u} + \frac{y^2}{b-u} + u,$$

d'où

$$\frac{\alpha^2}{a(a-u)} + \frac{\beta^2}{b.(b-u)} + 1 = 0,$$

et posant

$$2\rho = a + b + 2\gamma,$$

on aura

$$u^2 - 2\rho u + ab + b\frac{\alpha^2}{a} + a\frac{\beta^2}{b} = 0;$$

de là

$$u = \rho + \sqrt{R},$$

puis

$$\begin{aligned} R &= \rho^2 - \left(ab + b\frac{\alpha^2}{a} + a\frac{\beta^2}{b}\right) \\ &= (a-\rho)^2 + (a-b)\frac{\alpha^2}{a} \\ &= (b-\rho)^2 + (b-a)\frac{\beta^2}{b}, \end{aligned}$$

ou

$$R = R_1 = R_2,$$

et, par suite,

$$a - u = a - \rho \mp \sqrt{R_1}, \quad b - u = b - \rho \mp \sqrt{R_2}.$$

Dans la discussion, qui ne présente pas de difficulté, il sera bon de considérer à part chaque espèce de paraboloïde.

NOTE SUR UNE CERTAINE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SIXIÈME DEGRÉ;

PAR M. A.-J.-H. V.

A la page 89 du tome X (mars 1851) des *Nouvelles Annales*, M. Prouhet démontre la non-réalité des racines de deux équations empruntées au Mémoire d'un illustre astronome.

Je vais appliquer au second des deux exemples (celui du sixième degré) la méthode Budan-Fourier, telle qu'elle a été modifiée dans le Journal de M. Liouville et dans les Mémoires de la Société des Sciences, etc., de Lille. (L'exemple du quatrième degré est trop facile pour nous arrêter.)

Toute la démonstration résulte de l'inspection du tableau suivant, dont je vais expliquer la formation et les conséquences.

A	B	C	D	E	F	G
+5602 +8659 +	−11596 + 6821 +	+29193 − 7693 +	−25857 −12797 +	+22430 + 1335 +	−14560 + 6122 +	+3447 +3447 +
+3447 +	−14560 +	+22430 +	−25857 +	+29193 +	−11596 +	+5602 +
+3447 +	+ 6122 +	+ 1335 +	−12797 +	− 7693 +	+ 6821 +	+8659 +

La ligne première contient les coefficients de l'équation proposée pris à rebours, et changés de signe de deux en deux, parce qu'il n'y a lieu de chercher que des racines négatives.

La ligne deuxième est formée par l'algorithme suivant.

Si l'on nomme A, B, C, D, etc., les nombres de la première ligne, et A′, B′, C′, etc., ceux de la seconde, on a

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A' = & A + & B + & C + & D + & E + & F + & G \\
B' = & & B + & 2C + & 3D + & 4E + & 5F + & 6G \\
C' = & & & C + & 3D + & 6E + & 10F + & 15G \\
D' = & & & & D + & 4E + & 10F + & 20G \\
E' = & & & & & E + & 5F + & 15G \\
F' = & & & & & & F + & 6G. \\
G' = & & & & & & & G
\end{array}
$$

tous calculs de la plus grande simplicité, de la dernière facilité, d'une absolue généralité.

Les nombres de la troisième ligne, sous-entendus parce que l'on n'a besoin que de leurs signes, et que ces signes sont tous des +, seraient formés des nombres de la deuxième ligne, par le même algorithme qui a servi à tirer ceux-ci des nombres de la première ligne.

Cette première partie du calcul achevée, j'en conclus que les racines cherchées, supposées réelles, sont nécessairement comprises, quatre au plus entre o et — 1, et deux au plus entre — 1 et — 2, autant que de variations perdues en passant de chaque ligne à la suivante.

Je passe à la seconde partie du calcul. La quatrième ligne se compose des nombres de la première ligne pris à rebours. (Ce sont donc les coefficients de l'équation.)

La cinquième ligne se tirerait de la quatrième au moyen de l'algorithme; mais un coup d'œil suffit pour reconnaître qu'il n'y aurait que des signes +.

Donc, 1° les quatre racines supposées entre o et — 1, sont toutes les quatre imaginaires.

La sixième ligne se compose des nombres de la deuxième ligne pris à rebours; la septième se tirerait de la sixième par l'algorithme; mais on aperçoit sur-le-champ que l'on n'aurait que des $+$.

Donc, 2° les deux racines supposées entre -1 et -2, sont imaginaires.

Donc, enfin, les six racines sont imaginaires.

N'est-il pas surprenant qu'une méthode de séparation des racines aussi simple, aussi facile, aussi générale, n'ait pas obtenu la moindre mention des savants auteurs qui se sont occupés, dans ces derniers temps, de la théorie des équations (*).

EXERCICES NUMÉRIQUES SUR LA VIS A FILET CARRÉ, AVEC FROTTEMENT.

1. *Notation :*

$P =$ puissance,

$Q =$ travail résistant $= 6000^k$,

$f =$ coefficient du frottement,

$R =$ bras du levier à l'extrémité duquel agit la force $P = 1^m,5$,

$r =$ rayon du filet moyen de la vis $= 0^m,04$,

$h =$ pas de la vis $= 0,016$,

$\pi = 3,1416$,

$T_m =$ travail moteur développé par la force P,

$T_f =$ travail consommé par le frottement $= T_m - Q = T_m - 6000$.

(*) On profite de l'occasion pour prier le lecteur de biffer une Note qui se trouve dans le Journal de M. Liouville, tome III, page 239, et *Mémoires de la Société de Lille*, année 1838, 3e partie, page 9.

2. *Formules :*

$$P = \frac{r}{R} Q \frac{h + 2\pi r f}{2\pi r - h f},$$

$$T_m = P \cdot \frac{2\pi r}{h}.$$

Voir SONNET, *Notions de mécanique*, page 191. Dans la formule $F = \frac{1}{2} P \frac{r}{b} \text{tang } (i + \varphi)$, il faut remplacer F, P, b, tang i, tang φ par P, 2 Q, R, $\frac{h}{2\pi r}$, f, et l'on trouve la formule donnée ci-dessus.

3. *Tableau des valeurs de* P *et* T_m *correspondant à des valeurs données de* f :

f......	0,04	0,06	0,7	0,08
P.....	16^k,62823584	18,2439648	21,48162176	23,10355776
T_m....	9794,86232	10746,60746	12653,741297	13613,26
f......	0,10	0,12	0,14	0,15
P.....	26,3536648	29,61211184	32,8789312	34,5154904
T_m....	15523,62615	17443,01448	19367,33442	20331,34961

REPRÉSENTATION DES ANGLES POLYÈDRES (*).

Représenter :

1°. Un angle dièdre convexe par rapport au plan horizontal et compris entre deux faces triangulaires ;

(*) Ces questions sont tirées de l'excellent ouvrage intitulé : *Notes et Croquis de Géométrie descriptive*, par M. Bardin, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur à l'École d'artillerie de Metz ; 2^e édition, 1837. Nous parlerons plus amplement de cette production, *vade-mecum* des professeurs de géométrie graphique.

2°. Un angle dièdre concave par rapport au plan horizontal et compris entre une face triangulaire et une face quadrangulaire;

3°. Un angle trièdre droit;

4°. Un angle trièdre, ayant un angle dièdre droit.

5°. Un angle trièdre, ayant un angle dièdre birectangle;

6°. Un angle trièdre, ayant un angle dièdre trirectangle;

7°. Développer un angle trièdre et mesurer l'inclinaison des faces;

8°. Un tétraèdre; construire les intersections des arêtes avec les plans de projection;

9°. Construire une pyramide, connaissant : 1° sa hauteur; 2° sa base (a, b, c, d); 3° le plan de cette base; 4° la projection du sommet sur ce plan;

10°. Un prisme hexagonal, la base étant située sur le plan vertical.

SOLUTIONS DES QUESTIONS 236 ET 234

(voir t. X, p. 183);

PAR M. A. THIOLLIER,
Élève du lycée Charlemagne; classe de M. Orcel.

Question 236.

Si $x^2 + 2ay^2$ est un carré, $x^2 + ay^2$ est la somme de deux carrés.

En effet, soit $x^2 + 2ay^2 = z^2$,

$$y^2 = \frac{z^2 - x^2}{2a} = \frac{(z+x)(z-x)}{2a}.$$

Or on peut toujours supposer $z + x = 2am$, m étant quelconque; alors on a

$$y^2 = 2am^2 - 2mx,$$

par suite,

$$x^2 + ay^2 = x^2 + 2a^2m^2 - 2amx = (x^2 - 2amx + a^2m^2) + a^2m^2,$$

ou

$$x^2 + ay^2 = (x - am)^2 + (am)^2.$$

Donc $x^2 + ay^2$ est la somme de deux carrés. C. Q. F. D.

Question 234.

Soit l'équation

$$\begin{aligned}&(x - a_1)(x - a_3)(x - a_5)\ldots(x - a_{2n-1})\\ +\ &b^m(x - a_2)(x - a_4)(x - a_6)\ldots(x - a_{2n}) = 0,\end{aligned}$$

b est un nombre positif; m est un nombre entier positif; les $2n - 1$ différences

$$a_1 - a_2,\ a_2 - a_3,\ a_3 - a_4,\ a_4 - a_5, \ldots, a_{2n-1} - a_{2n}$$

sont positives; les n racines de l'équation seront réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, a_5 et $a_6, \ldots, a_{2n-1}$ et a_{2n}. (RICHELOT.)

D'après la condition

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 \ldots < a_{2n-1} < a_{2n},$$

si l'on donne à x les valeurs

$$a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7, \ldots, a_{2n-1},$$

la première partie de l'équation sera nulle, et si nous supposons que *n soit pair,* la fonction prendra d'abord le signe + pour $x = a_1$, puis le signe — pour $x = a_3$, et ainsi de suite alternativement. La fonction prendra les signes

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \therefore \quad -$$

correspondant à

$$x = a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9, \ldots, a_{2n-1};$$

il n'y a donc qu'une seule racine comprise entre chacun de ces n nombres.

Si, maintenant, on donne à x les valeurs a_2, a_4, a_6, a_8, ..., a_{2n}, ce sera, au contraire, la seconde partie de l'équation qui deviendra nulle, et le premier terme sera négatif pour $x = a_2$, positif pour $x = a_4$, et ainsi de suite alternativement. La fonction prendra les signes

$$- \; + \; - \; + \; - \; + \; - \; + \ldots +$$

correspondant à

$$x = a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ a_{10}, \ldots,\ a_{2n};$$

on peut donc écrire ainsi le tableau des variations de la fonction

$$\begin{array}{lcccccccccc} x = & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, \ldots, & a_{2n-1}, & a_{2n}, \\ f(x) & +, & -, & -, & +, & +, & -, & -, & +, \ldots, & -, & +. \end{array}$$

La fonction change $n-1$ fois de signe; par suite, puisqu'il doit y avoir au moins une racine entre deux nombres donnant des résultats de signes contraires lorsqu'on les substitue dans la fonction, il y aura *une racine et une seule* entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, a_5 et a_6, ..., a_{2n-1} et a_{2n}. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on supposait n impair, on tomberait identiquement sur le même résultat; le raisonnement est absolument le même : il suffit d'observer que si, pour $x = a_p$ (p étant compris entre 1 et $2n$), la fonction prend le signe + dans le premier cas, elle prendra le signe — dans le deuxième, et réciproquement.

Le même élève énonce et démontre ces deux théorèmes de géométrie, dont le second est un corollaire du premier :

Soient une première sphère donnée et une seconde sphère passant par le centre de la première sphère; la zone de cette seconde sphère, interceptée par la première, a une aire constante, quel que soit le rayon de la seconde sphère.

Soient deux sphères données de même centre, et une troisième sphère passant par ce centre; la zone à deux bases, interceptée sur cette troisième sphère par les deux premières, a une aire indépendante du rayon de la troisième sphère.

Note. **M. Ed. Terré, élève de la même classe, adresse le lieu géométrique d'une tangente commune à deux cercles dont les centres sont fixes, et dont les rayons sont liés par une équation linéaire. Le lieu est un système de quatre cercles. Nous donnerons prochainement ce beau travail, que son étendue nous oblige d'ajourner.**

BIBLIOGRAPHIE.

COMPLÉMENT D'ALGÈBRE, contenant les matières exigées, suivant le programme officiel, pour l'admission à l'École Polytechnique, et qui ne se trouvent pas dans la cinquième édition du *Traité élémentaire d'Algèbre*, de MM. *Choquet* et *Mayer;* par *M. Choquet,* docteur ès sciences, professeur de mathématiques. In-8°, de 50 pages. Paris, 1851. Bachelier, libraire. 1 fr. 50 c.

Nous avons un budget *ordinaire, extraordinaire, supplémentaire, complémentaire;* et le Ministre des Finances nous a dit récemment que les quatre adjectifs se réduisent à un seul impératif : *Payez.* Cette règle de grammaire est d'un usage assez fréquent, même hors finance. Ainsi, nous jouissons d'une certaine géométrie descriptive, *ordinaire, extraordinaire* (*), *supplémentaire, complémentaire,* et les quatre adjectifs équivalent à un seul impératif : *Achetez.* Nous pouvons même espérer,

(*) Et très-extraordinaire. On y voir surgir des *points-points,* des *points-surfaces,* des *points-volumes;* des coniques planes du quatrième degré; des théorèmes quasi vrais, même nullement vrais et pourtant rigoureusement démontrés; enfin, une géométrie tératologique.

si le règne du programme dure (et quel règne peut se flatter de durer), de voir toutes les sciences sujettes à examen revêtir les quatre formes réductibles à une seule. Dans cette prévision, nous croyons *utile* (mot sacramentel) d'établir d'avance la distinction entre le *supplément* et le *complément*. Lorsqu'à un ouvrage achevé on ajoute de *nouvelles théories*, non contenues dans l'ouvrage, et pourtant nécessaires, on fait un *supplément*. Si l'on se borne à développer, à mieux expliquer des théories déjà exposées dans l'ouvrage, on fait un *complément*.

Cette distinction admise, nous croyons que le Complément actuel est un *supplément*, car on y trouve les *principes du calcul aux différences*, une méthode de *résolution des équations transcendantes*, *une méthode d'interpolation*, etc.; théories qui ne se trouvent pas dans le *Traité élémentaire*. Peu importe le titre, l'essentiel est que l'auteur, vétéran dans l'enseignement *examinatoire*, montre ici les qualités que vous savez : clarté, méthode, rédaction, objections prévues et résolues, exercices numériques bien choisis, nettement calculés et bien discutés. Pour résoudre les équations, on a recours à la méthode Budan, qu'un travail remarquable de M. Vincent a rendue rigoureuse. Sans ce travail, la méthode est incomplète. Il est vrai qu'aujourd'hui la rigueur est décriée; on soumet les mathématiques à l'empire des *à peu près*. Excellente logique! Voici d'ailleurs une de ces équations :

$$x^5 - 0,00009594\,\frac{4Q}{H}\,x^2 - 0,0826\,\frac{Q^2}{H}\,x - 0,00222\,\frac{4Q^2}{H} = 0,$$

L = longueur d'une conduite rectiligne de diamètre uniforme $= 757^{m}$,

Q = volume d'eau qui s'écoule en une seconde $= 0^{mm},089$,

H = hauteur de colonne d'eau équivalente à la pression à l'orifice $= 1^{m}$,

x = le diamètre inconnu.

Substituant ces valeurs, l'équation devient

$$x^5 - 0,006464\, x^2 - 0,000654\, x - 0,01331 = 0.$$

L'auteur emploie une méthode d'approximation qui serait très-abrégée en faisant emploi des logarithmes de Gauss; on trouve finalement $0,4306 > x > 0,4305$.

Comment, avec tous ces expédients, calculer les racines imaginaires, qui occupent de plus en plus une place *réelle* dans la science? *Ils* n'en savent rien et ne s'en inquiètent pas. Les équations du cinquième degré sont spécialement signalées par le programme, parce qu'elles servent à supputer le diamètre d'une conduite. Application *utile!* ce mot décide tout, ferme la bouche à tout : c'est le *sans dot* de M. Harpagon.

Le programme donne l'excellent conseil de s'occuper de la résolution numérique des équations transcendantes; ce sont, en effet, les équations qu'on rencontre le plus fréquemment. Ces racines ne peuvent généralement s'obtenir que par le théorème de Fourier; aussi ce théorème sert de base au Mémoire *couronné* de M. Stern, sur la résolution numérique de ce genre d'équations : Mémoire dont nous présenterons l'analyse à nos lecteurs. Ce théorème n'étant pas mentionné dans le programme, M. Choquet a recours à des procédés, à des expédients : il choisit, pour exemple, le problème dit *de Kepler,* renfermé dans l'équation

$u - e \sin u = \zeta$,
u = anomalie vraie, inconnue,
e = excentricité $= 0,5$; ce qui se rapporte à une comète.
ζ = anomalie moyenne $= 38^\circ 27' 18'',7$.

Encore une application *utile,* recommandée.

Dans un Avertissement, l'auteur préconise les procédés *rapides,* et considère les *règles générales* comme une gêne pour le calculateur; considération très-désintéressée, car elle rend superflu et très-gênant le *Traité élémentaire d'Algèbre,* de l'auteur, presque entièrement consacré aux *règles générales;* que, pour cette raison, j'ai toujours considéré et considère encore comme un de nos meilleurs ouvrages en ce genre. Il est le premier qui nous ait fait connaître le théorème de Sturm et la véritable règle de Descartes, avec toutes ses importantes conséquences, qui n'ont pas échappé à l'ostracisme de 1850.

On sait avec quel enthousiasme, tenant de l'époque, le moyen âge a accueilli l'apparition de l'algèbre, de la science *cossique,* du divin *algorisme.* Les écrivains n'en parlent qu'avec les transports de la plus vive admiration. Pourtant, dans un *memorandum* officiel, qui occupe cent quinze colonnes du *Moniteur,* on exprime le regret de ne pouvoir faire disparaître l'algèbre de l'enseignement (*). En plein dix-neuvième siècle! où allons-nous?

A Table of anti-logarithms; containing to seven places of decimals, natural nombers, auswering to all logarithms from .00001 *to* .99999, *and an improved Table of Gauss's logarithms, by wich may be found the logarithms to the sum or difference of two quantities whose*

(*) « L'algèbre n'est pas, comme l'arithmétique et la géométrie, indispensable à tous les hommes. Ce n'est qu'avec une grande réserve qu'on doit l'introduire dans l'enseignement général de la jeunesse, et nous l'en verrions même disparaître sans regret, les *logarithmes* exceptés, si cette simplification devait profiter à l'étude de l'arithmétique et de la géomètrie. » (*Moniteur,* 12 janvier 1851; supplément C, page 11, première colonne, § IV.)

C'est au contraire l'algèbre qui simplifie tout, tellement qu'il y aurait avantage d'en introduire l'*écriture* dans les institutions des demoiselles: rien n'est facile comme l'algèbre, disait Lagrange. On n'excepte que les *logarithmes.* Décidément, parmi les maladies en *ite,* telles que la gastrite, la cardite, la bronchite, etc., il faut aussi classer la *logarithmite.* Elle est endémique dans la contrée des programmes.

logarithms are given; preceded by an Introduction, containing also the history of logarithms, their construction, and the various improvements make thereon since their invention. Table d'anti-logarithmes; contenant les nombres naturels avec sept chiffres, correspondant à tous les logarithmes, depuis .00001 jusqu'à .99999, et une Table perfectionnée des logarithmes de Gauss, au moyen desquelles on peut trouver les logarithmes de la somme ou de la différence de deux quantités dont les logarithmes sont donnés; précédée d'une Introduction contenant l'histoire des logarithmes, leur construction et les divers perfectionnements, depuis leur invention; par M. *Herschell E. Filipowski.* Londres, 1849; in-8°, de XVI-220 pages.

Le but final de tout calcul par logarithmes n'est pas de trouver des *logarithmes* de nombres, mais des *nombres mêmes.* S'il est donc important d'avoir les logarithmes des nombres, il est non moins important et même davantage d'avoir avec exactitude les nombres correspondant aux logarithmes. Les Tables ordinaires ne satisfont qu'imparfaitement et laborieusement à ce besoin à l'aide des parties proportionnelles. Le célèbre Wallis (J.) écrivait déjà en 1685 : *Cui ut obvietur incommodo, desiderandus videtur Canon anti-logarithmicus; in quo, positis logarithmis continuo ordine sequentibus, ab* 0 *ad* 10000, *adscribantur numeri naturales his respondentes. Eo fine ut qua facilitate ex canone quem habemus pro dato numero habetur logarithmus; eadem ex canone sic condendo, pro dato logarithmo habeatur numerus* (*Algebra*, page 63). Il ajoute qu'il ignore si Thomas Harriot a commencé une telle Table, mais que les papiers de Harriot ont été remis à Walter Warner qui a commencé ou achevé le travail, aidé par le célèbre J. Pell, de 1621 à 1630; celui-ci annonça à Wallis que le travail était entre les mains de Richard Busbey, docteur en théologie et directeur de l'École de Westminster, et ce dernier promit à Wallis de publier, à condition que Wallis s'engageât à remplacer Pell en cas de mort. Wallis accepta, et Pell étant mort en 1685, l'édition n'étant pas même commencée, tout en resta là. Un spécimen de Table anti-logarithmique a été inséré par Long dans les *Transactions philosophiques*, année 1714. Cette petite Table ne contient que soixante-douze logarithmes. C'est James Dodson (*) qui, le premier, a publié, en 1742, en un volume in-folio, une Table de logarithmes se succédant suivant l'ordre naturel, avec cinq figures décimales, depuis .00001 jusqu'à .99999 et en regard les nombres correspondants avec onze chiffres. Ces Tables très-rares sont incommodes à manier et remplies de beaucoup de fautes dont une partie a été indiquée par l'auteur même. M. Filipowski, jeune Polonais résidant à Londres, a eu l'heureuse idée de donner une nouvelle édition de ces Tables, corrigée et sous un format portatif in-8°; les logarithmes sont avec cinq chiffres et les nombres correspondants avec sept chiffres, et les logarithmes vont de .00001 à .99999. Une Table de différences qui procède par centièmes permet de trouver les nombres correspondant à des logarithmes ayant sept chiffres, ce qui est suffisant pour la pratique. Chaque page contient cinq cents résultats distribués en dix colonnes, chacune de cinquante lignes. De sorte que les cinquante premiers nombres de chaque centaine sont sur la page *b*, et les cinquante derniers sur la page en regard *a*; l'argument contient

(*) Le même a publié *the Calculator*, in-4°, 1747, pour abréger les calculs d'arithmétique; et le *Mathematical Repository;* en 1756 il a donné, dans des leçons publiques, la première idée d'une Société d'assurances pour la vie et la survie; cette Société a été établie vers 1765.

quatre chiffres, et le cinquième est en tête de la colonne; quelquefois, le septième et dernier chiffre à droite d'un nombre est remplacé par la lettre italique ν; cela indique que ce chiffre est 5, mais douteux, parce qu'il n'est devenu 5 qu'à raison de ce que le huitième chiffre est 5 ou supérieur à 5. On évite ainsi le *point* que M. Babbage place sur les *chiffres forcés*.

On comprend que les Tables peuvent aussi servir, mais moins commodément que les Tables ordinaires, à trouver le logarithme d'un nombre donné. Les calculateurs font donc bien de se munir des deux Tables.

Logarithmes de Gauss. L'Algèbre de M. Finck (*) est, à ma connaissance, le seul ouvrage français où l'on explique ces logarithmes, qui commencent à se répandre en Allemagne et en Angleterre. On peut s'en servir nonseulement pour abréger les calculs trigonométriques, mais même pour chercher les racines numériques des équations par de rapides approximations. Au moyen de cette Table, connaissant les logarithmes de deux nombres, on peut trouver immédiatement, soit le logarithme de la somme des deux nombres, soit le logarithme de leur différence, sans avoir besoin de connaître ces nombres euxmêmes. C'est en 1812, dans la *Correspondance* de Zach (part. XXVI) que l'illustre astronome a publié cette Table pour la première fois avec cinq décimales; il dit : « L'objet de cette Table est de faciliter les procédés de calcul » qu'on rencontre fréquemment en astronomie. Car au » lieu d'une triple, ou, au moins, d'une double entrée » dans les Tables ordinaires de logarithmes, le même ré» sultat peut être obtenu au moyen de notre Table ou par

(*) *Éléments d'Algèbre*, 2e édition, 1846, page 518; c'est le Traité le plus complet sur cette matière.

» une seule inspection. Autant que je sache, cette idée
» appartient à Leonelli ; son dessein était de calculer une
» telle Table avec quatorze décimales, ce qui me paraît
» inapplicable. Il est à désirer qu'on construise une telle
» Table d'une étendue dix fois ou cent fois plus grande,
» et avec sept décimales ; ce serait un supplément important à joindre aux Tables ordinaires. » Cette Table consiste en trois colonnes désignées respectivement par A, B, C. La Table A va de 0,0 à 2,0 avec trois décimales, de 2,0 à 3,4 avec deux décimales, et de 3,4 à 5 avec une décimale. Soit a un nombre de cette colonne A, logarithme de a'. Alors le nombre correspondant dans la colonne B est $\log\left(1+\frac{1}{a'}\right)$, et le nombre de la colonne C est $\log(1+a')$, de sorte qu'on a toujours $C = A + B$; supposons maintenant qu'on ait les deux logarithmes $\log m$, $\log n$, sans connaître ni m ni n, et qu'on veuille trouver $\log(m+n)$ au moyen de la Table. On cherche, dans la colonne A, le nombre a égal à $\log m - \log n$, donc $a' = \frac{m}{n}$; la seconde colonne B donne $\log\left(1+\frac{n}{m}\right)$; ajoutant ce nombre à $\log m$, on obtient $\log(m+n)$, ou bien encore, prenant le nombre correspondant dans la colonne C, on a $\log\left(1+\frac{m}{n}\right)$; ajoutant ce nombre à $\log n$, on obtient encore $\log(m+n)$. On voit comment il faudrait procéder pour obtenir $\log(m-n)$, ce qui fournit quatre solutions. Si $\log\frac{m}{n}$ surpasse 0,301030, il faut le chercher dans la colonne C ; si $\log\frac{m}{n}$ est moindre que 0,30103, il faut chercher dans la colonne B. On a joint aux Tables ce qui est nécessaire pour les interpolations.

En 1817, M. F.-A. Matthiesen a publié, à Altona, une semblable Table avec sept décimales; une autre a été publiée à Londres, en 1849, par Peter Gray avec six décimales. Dans une nouvelle édition des Tables de Véga, on a inséré les Tables de Matthiesen, mais encore perfectionnées. Enfin M. Filipowski a donné à ces Tables une nouvelle forme qui donne aux deux opérations $\log(a+b)$ et $\log(a-b)$ plus d'uniformité et plus de facilité. Il nous serait difficile de faire comprendre la disposition imaginée par l'ingénieux auteur sans qu'on eût ses Tables sous les yeux.

L'ouvrage est terminé par un Appendice publié en 1850, et contenant une Table d'annuités à 3 pour 100 pour trois *têtes*, avec toutes les combinaisons d'âge de cinq à cent années, d'après les Tables de mortalité de Carlisle. M. de Morgan, célèbre professeur à l'Université de Londres, a donné son approbation à l'ouvrage de M. Filipowski. Une telle autorité dispense de tout autre éloge. Le mérite essentiel de Tables consiste dans l'exactitude; qualité que le long usage, par beaucoup de calculateurs, peut seul constater. L'habileté de M. Filipowski permet d'espérer que son œuvre si utile soutiendra cette épreuve.

Traité de Trigonométrie; par M. *J.-A. Serret*, examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique. Paris, 1851; in-8° de 215 pages et deux planches. *Bachelier*, libraire. Prix : 3 fr. 50 c.

Cette *Trigonométrie* est destinée à trois classes de lecteurs : 1° aux candidats pour l'École Navale et l'École de Saint-Cyr; 2° aux candidats pour l'École Polytechnique; 3° à ceux qui veulent apprendre les Mathématiques. C'est surtout à cette dernière catégorie que nous recommandons l'ouvrage, comme le meilleur qu'ils puissent étudier sur cette matière. Le célèbre géomètre a mis dans l'examen des fonctions circulaires, le même esprit de sagacité qu'il a porté naguère dans ses travaux sur les fonctions elliptiques. Ainsi le livre I[er] (1-28) traite des fonctions de lignes qui se rattachent au mouvement d'un point sur une circonférence, dans un sens et dans le sens opposé. L'auteur fait ressortir avec soin l'*amplitude* et la *périodicité* de ces fonctions, propriétés qui occupent aujourd'hui une place si importante dans les transcendantes d'un ordre *intégral* plus élevé; car on sait que toutes les *transcendantes* ont pour origine des intégrales *possibles*, mais non *algébriquement* possibles. Rattacher les sinus, cosinus, etc., à un mouvement de va-et-vient est une idée newtonienne. Le grand homme est le premier qui ait indiqué la vraie naissance de la quantité, en la considérant comme le résultat d'un *flux* continuel avec des *vitesses variées*, variation de conception innée et qui contient la véritable métaphysique du calcul infinitésimal auquel Leibnitz a assigné son vrai algorithme. Le point initial des espaces est d'un choix *arbitraire*; mais le choix étant fixé, les *signes* donnent aux quantités une valeur de position *forcée* et non pas *conventionnelle*, comme on le dit quelquefois. Dans l'échelle génétique de la quantité, la place du zéro est arbitraire; mais les quantités en *deçà* et *au delà* sont *nécessairement* de signes opposés. D'ailleurs, la méthode cartésienne consiste essentiellement dans l'application des théories équationnelles aux affections géométriques; dans une équation, les grandeurs relatives des racines ne changent pas en remplaçant l'inconnue par une autre inconnue quelconque augmentée d'un nombre quelconque; de même la position respective des points ne change pas par un déplacement d'origine, et c'est ce qui fait de l'interprétation des signes une proposition apodictique, indépendante de notre volonté, nullement conventionnelle.

Le livre II (29-68) renferme l'addition, la multiplication et la division des fonctions circulaires. La discussion des racines, leur raison d'*être* est faite avec beaucoup de soin et avec une extrême clarté; bonne préparation pour des études semblables sur les fonctions elliptiques. On distingue le rapport de l'arc à la circonférence et le rapport de l'arc au rayon, distinction utile pour établir l'homogénéité des formules. Il est à regretter que l'on ait omis le calcul et l'algorithme des *différences* et des *différentielles* des fonctions circulaires; ce calcul appartient aux éléments, il est même *tacitement* employé dans le livre suivant, où les coefficients différentiels (quotients différentiels des Allemands) portent pour masque le mot *limite*.

Le livre III (69-96) est consacré à la construction des Tables des lignes trigonométriques et de leurs logarithmes. Les applications numériques et bien choisies familiarisent promptement avec l'usage des Tables *dites* de Callet. La Trigonométrie rectiligne est enseignée, théorie et pratique, dans le livre IV (97-138). Nous signalerons la question suivante (page 131) assez intéressante: *Quel doit être le rayon d'un cercle pour que la différence entre un arc de* 10 *mètres et sa corde soit plus petite que* 1 *millimètre?* Le rayon doit être égal ou supérieur à 250 mètres ou $\frac{1}{16}$ de lieue. La propriété segmentaire anharmonique est le sujet d'un problème.

Le livre V (139-176) contient la Trigonométrie sphérique : on démontre la généralité des trois formules fondamentales. Nous préférons la démonstration si simple qu'on doit à M. Foucaut, aujourd'hui élève à l'École Polytechnique (tome VIII, page 58). Le théorème de Legendre, relatif à la réduction du triangle sphérique au triangle rectiligne, est clairement développé, mais pas avec la rigueur que lui a donnée Gauss. Une application numérique de ce beau théorème est ici à désirer.

Le livre VI et dernier (177-215) est intitulé : *Complément de la Théorie des fonctions circulaires*. On y lit une belle exposition des théorèmes de Cotes et de Moivre, fondée sur les propriétés des expressions complexes $a + bi$, que MM. Gauss et Cauchy ont rendu d'un emploi si universel. Peut-être qu'on aurait dû donner la résolution trigonométrique de l'équation $x^{17} - 1 = 0$, et indiquer quelques propriétés qui lient les fonctions circulaires à l'arithmologie; liaison qu'on rencontre aussi dans les fonctions elliptiques, et qui existe probablement aussi pour les fonctions abéliennes.

Les séries principales relatives aux fonctions circulaires terminent cet ouvrage, digne de l'auteur de l'*Algèbre supérieure* (*), qui occupe un rang si haut dans l'enseignement. Le plus bel éloge que nous puissions en faire est de dire que la marche suivie par M. Serret est au niveau de l'état actuel et aux antipodes de la marche prescrite par certain document officiel que nous ne voulons pas nommer.

La science est un édifice à plusieurs étages. Chacun doit présenter des degrés pour monter à l'étage supérieur; conditions que doit remplir tout ouvrage légitimement classique. C'est une qualité qui distingue éminemment cette Trigonométrie ou plus exactement cette Théorie élémentaire des fonctions circulaires.

(*) Prix : 7 fr. 50 c. Bachelier, libraire.

Méthode nouvelle pour calculer rapidement les logarithmes des nombres et pour trouver les nombres correspondant aux logarithmes; précédée d'un Rapport fait à l'Académie des Sciences, au nom d'une Commission composée de MM. Liouville, Binet, Cauchy rapporteur. Par M. *Philippe Koralek*, ancien élève de l'École Polytechnique de Vienne en Autriche. Paris, 1851; in-8° de 59 pages. Bachelier, imprimeur-libraire. Prix : 2 francs.

Dans cet opuscule, on apprend à calculer avec sept chiffres décimaux exacts le logarithme d'un nombre entier compris entre *un* et *dix millions*, et à faire l'opération inverse, en moins de minutes qu'on ne met ordinairement de quarts d'heure. C'est une sorte de locomotive attachée à la construction des *Tables*. Est-ce au moyen d'une nouvelle théorie? Non. L'auteur a-t-il découvert quelque nouvelle formule? Non. Fait-il emploi de quelque formule connue, mais peu répandue? Non. Il se sert de la formule la plus vulgaire, savoir :

$$\log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Il fait sur cette formule une *observation* tellement simple, que chacun peut se croire légitimement capable de faire cette *observation*. Et cette observation si simple vous permet pourtant, à l'aide de ces cinq valeurs : log 2, log 3, log 7, log 11, log 13, de calculer en moins de six minutes le logarithme d'un nombre quelconque pris dans l'intervalle ci-dessus indiqué. Quelle est cette observation? Je vous engage à la lire dans l'ouvrage même. Les professeurs y trouveront une méthode qu'ils voudront enseigner à leurs élèves; et ceux-ci y trouveront des exemples de calcul logarithmique.

Le programme exige le calcul de vingt logarithmes.

D'après la méthode usitée, il faut cinq heures de travail; deux heures suffisent d'après la nouvelle méthode. Mais l'utilité de la seconde partie de l'ouvrage nous semble encore plus grande : une Table, placée à la fin, permet de trouver les logarithmes avec *vingt-sept* chiffres décimaux ; ce qui est d'un immense avantage en beaucoup d'occasions. Car on sait que nos Tables à sept figures décimales sont loin de satisfaire à tous les besoins du calculateur.

Il est à espérer que la méthode de M. Koralek se répandra promptement. La modicité du prix et la simplicité des raisonnements mettent l'ouvrage à la portée intellectuelle et financière de tout le monde.

Puisse l'auteur nous gratifier bientôt de sa méthode expéditive pour calculer les logarithmes des lignes trigonométriques.

Les Tables de Callet sont toujours *stéréotypées ;* mais la science ne se prête pas à un trop long stéréotypage. Voici des améliorations très-désirables.

1°. Indiquer, par un signe de convention, si les logarithmes sont par *excès* ou par *défaut*, à l'instar des Tables de Babbage.

2°. Mettre les lignes trigonométriques naturelles sur le verso et les logarithmes correspondants sur le recto de la page suivante, comme dans les Tables de Hutton.

3°. Ajouter les sinus-verses, lignes qu'on rencontre si souvent dans les machines dynamométriques.

4°. Ajouter les logarithmes de Gauss, d'une application si commode dans la résolution des équations numériques. On les trouve dans les Tables stéréotypées de Vega, éditées en 1849, par M. le Dr Hulse, à Leipzig (*).

5°. Ajouter les renseignements nombreux qu'on trouve

(*) Ces Tables ne coûtent que 15 francs. Une règle à calcul coûte 7 francs.

dans ces dernières Tables, sur les nombres premiers, sur les puissances des nombres, etc.

6°. Ajouter au texte le procédé Koralek et l'instruction sur la règle à calculer, d'après M. Lalanne, dont nous parlerons prochainement. Nous aurions ainsi le *Manuel* du calculateur.

A cette occasion, nous recommandons des Tables d'un autre genre qui viennent de paraître à Berlin. M. le Dr Minding a publié une collection de toutes les intégrales indéfinies et définies connues, y compris les fonctions elliptiques (*). L'ouvrage a été publié sous les auspices du *Ministre du Commerce et des Travaux publics* à l'usage des *Écoles industrielles* (gewerbschule) ! Qu'en disent ceux qui regrettent de ne pouvoir faucher sur notre sol la simple algèbre?

CORRESPONDANCE.

1. M. Dupuy (Léon) adresse une seconde et bonne solution détaillée et discutée de la question 66. (*Voyez* tome IX, page 188; Marqfoy.)

2. M. Mannheim, sous-lieutenant élève d'artillerie (*voyez* tome IX, page 419), a publié à Metz, en janvier 1851, une Note lithographiée sur la théorie des polaires réciproques (Mémoire in-4° de 13 pages). L'auteur fait usage de cette méthode pour transformer une propriété géométrique donnée en d'autres propriétés. A cet effet, il transforme une propriété, par le principe de *dualité* et à l'aide d'un cercle directeur, dans la propriété *polaire* cor-

(*) Le prix est de 4 francs. Une règle à calcul coûte 7 francs.

respondante, et ensuite il transforme cette seconde propriété en une troisième à l'aide d'un second cercle directeur, etc.; c'est un moyen *euristique* assez fécond. L'auteur, s'adressant aux géomètres, s'exprime avec une extrême concision, peut-être aux dépens de la clarté.

3. M. E. de Sécillon, élève au lycée de Nantes, adresse ce théorème : *Un octogone étant inscrit dans une conique, on peut considérer les côtés pairs comme côtés d'un quadrilatère et de même les côtés impairs; or, deux quadrilatères se coupent en seize points; huit de ces points sont évidemment sur la conique donnée et les huit autres points sont sur une seconde conique.* Le moyen de démonstration est celui que M. Gergonne a donné le premier pour démontrer l'hexagramme de Pascal, moyen qui peut se généraliser ainsi : Étant données deux courbes planes de degré n chacune, elles se coupent en n^2 points; si np de ces points sont sur une ligne de degré $p < n$, les $n(n-p)$ points restants sont sur une ligne de degré $n-p$. Dans le théorème énoncé ci-dessus, $n=4$, $p=2$. Lorsque le polygone inscrit est d'un nombre impair de côtés, on remplace le côté manquant par une tangente (*).

4. M. Joseph-Edmond Wagner, aujourd'hui élève à l'École Polytechnique, dans un Mémoire accompagné d'épures très-bien exécutées, s'occupe de la division des angles au moyen de ce lieu géométrique : sur une corde donnée de position et de longueur, on fait passer des arcs de cercles que l'on divise chacun dans le même rapport donné de $1:n$. Les points de division forment une ligne dont il est facile de trouver l'équation; cette ligne étant construite, elle peut servir à diviser un arc et aussi un angle donné. On sait que pour la trisection on obtient une hyperbole; l'auteur trace cette hyperbole ainsi que

(*) Nous donnerons une Note instructive de M. Abel Transon sur ce théorème.

la courbe relative à la quintisection. Le Mémoire est terminé par la construction et la discussion du *folium* suivant qui peut servir à diviser un angle dans un rapport donné $m:n$. Soient AFC un triangle donné rectangle en F, et AFM un triangle dont le sommet est mobile. Soit H le point d'intersection de la droite mobile AM avec la droite fixe FC; supposons qu'on ait la relation, angle $\frac{1^q - \text{MFC}}{1^q} = \frac{\text{FH}}{\text{FC}}$, de là on déduit l'équation polaire du lieu du point M. Ce travail remonte au temps où l'auteur était encore élève au collége de Saverne et annonce de l'application et de l'intelligence.

5. M. Bugnat, élève de Mathématiques supérieures au lycée de Versailles (classe de M. Vannson), énonce et démontre ce théorème :

Dans une conique, si l'on mène la normale en un point quelconque P *et par le foyer* f *une droite* fK *parallèle à cette normale, rencontrant la directrice voisine en* K; *la droite* PK *est un diamètre de la conique.*

A l'aide de ce théorème, M. Bugnat résout le problème suivant :

Connaissant les sommets et les foyers d'une conique, trouver le point de contact d'une tangente donnée de direction, sans que la conique soit tracée.

La démonstration synthétique est facile.

6. M. Bories (Alphonse), élève au lycée de Montpellier, énonce et démontre les théorèmes suivants :

1°. *Soient le triangle rectiligne* ABC; *abc une transversale coupant respectivement* BC, AC, AB en a, b, c; *menons les droites* Aa, Bb, Cc. *Soient* a_1, b_1, c_1, *les intersections respectives des droites* Bb *et* Cc, Aa *et* Cc, Aa *et* Bb; *les droites* Cc_1, Bb_1, Aa_1 *convergent vers le même point.*

Démonstration par les propriétés segmentaires. Le théorème est évident lorsqu'on suppose la transversale parallèle à un des côtés du triangle, et de cette position particulière, on passe par la perspective à la position générale et aussi au triangle sphérique.

2°. *Mêmes données et mêmes constructions; en outre, circonscrivons une circonférence au triangle* ABC; *supposons que cette circonférence coupe* Aa *en* α, Bb *en* β, Cc *en* γ; *les trois droites* αa_1, βb_1, γc_1 *se coupent en un même point.*

Les propriétés des sécantes donnent

$$(1)\qquad \begin{cases} c_1\beta . c_1B = c_1\gamma . c_1C, \\ a_1\gamma . a_1C = a_1\alpha . a_1A, \\ b_1\alpha . b_1A = b_1\beta . b_1B; \end{cases}$$

d'où

$$c_1\beta . \alpha_1\gamma . b_1\alpha \;\; c_1B . a_1C . b_1A = c_1\gamma \;\; a_1\alpha . b_1\beta . c_1C . a_1A . b_1B.$$

D'après le théorème précédent, les droites c_1C, b_1B, a_1A passent par le même point. Donc, par une propriété segmentaire, on a

$$c_1C . a_1A . b_1B = c_1B . a_1C . b_1A,$$

puis,

$$c_1\beta . a_1\gamma . b_1\alpha = c_1\gamma . a_1\alpha . b_1\beta;$$

donc les trois droites $c_1\gamma$, $a_1\alpha$, $b_1\beta$ convergent vers le même point. C. Q. F. D.

Cette solution ne diffère que très-peu de celle qui a été donnée tome VI, pages 376 et 377.

3°. *Étant donnés un cercle et un triangle circonscrit* ABC; *prenant respectivement les points* a, b, c, *sur les côtés* BC, AC, AB, *tels que les droites* Aa, Bb, Cc, *convergent vers le même point.*

Soient α *le point d'intersection de la seconde tangente menée par* a *avec le côté* bc, β *le point d'intersection de la tangente menée par* b *avec le côté* ac, *et de même* γ

sur le côté ab; les trois points α, β, γ sont en ligne droite.

En effet, désignons par α_1, β_1, γ_1, les points de contact des côtés BC, AC, AB avec le cercle, et par M_2 le point de contact de la seconde tangente menée par b; il suffit de démontrer que les trois polaires de α, β, γ sont convergentes, et rappelons que la polaire d'un point s'obtient en joignant par une droite les pôles de deux droites passant par ce point; que le pôle d'une droite s'obtient par l'intersection des polaires de deux points pris sur cette droite. Le pôle de Bb est un point β_2 de la droite $\alpha_1\beta_1$ polaire de b; le pôle de Aa est un point α_2 de la droite $\beta_1\gamma_1$, et le pôle de Cc est un point γ_2 de la droite $\alpha_1\beta_1$; mais les trois droites Aa, Bb, Cc étant convergentes, leurs pôles α_2, β_2, γ_2 sont en ligne droite transversale par rapport au triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Cherchons le pôle de ac; $\alpha_1\alpha_2$ est évidemment la polaire de a, $\gamma_1\gamma_2$ la polaire de c; donc le pôle de ac est I_2 intersection des droites $\alpha_1\alpha_2$, $\gamma_1\gamma_2$; $M_2 I_2$ est donc la polaire de γ, et les trois points β_1, M_1, β_2 sont en ligne droite, car $\beta_1 M \beta_2$ est la polaire du point b; donc la circonférence coupe la droite $\beta_1\beta_2$ menée du point β_1 à la transversale $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ au point M_1. Si nous désignons par M_2, M_3 les points où les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\gamma_1\gamma_2$ sont coupées par la circonférence, et par I_2, I_3 les points analogues à I_1, on voit, d'après le théorème II, que les droites $I_1 M_1$, $I_2 M_2$, $I_3 M_3$ sont convergentes et sont les trois polaires de α, β, γ.

Corollaire. Par les points a, b, c on peut faire passer une conique touchant le triangle en ces points. Projetant coniquement la figure sur un plan, on obtient une propriété de collinéation entre deux coniques inscrites au même triangle, et projetant la figure sur une surface quelconque, on parvient à une propriété entre certaines courbes tracées sur ces surfaces.

Observation. C'est une généralisation d'un théorème de M. Chasles, question du grand concours de 1847 (tome VII, pages 294 et 301).

Nous félicitons M. Bories de manier si bien les propriétés segmentaires et polaires ; qu'il persévère et se rappelle ce vers du fabuliste :

Laissez dire les sots, le savoir a son prix.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE, EXPOSÉS SANS LE SECOURS DE L'ALGÈBRE,

PAR M. E.-A. TARNIER, docteur ès sciences
(voir t. IX, p. 439) ;
PAR M. H. HARANT,
Professeur, licencié ès sciences.

L'Arithmétique de M. Tarnier a sa place marquée dans les bons livres élémentaires qui ont paru depuis quelques années. L'auteur a su, même après la publication des excellents traités de MM. Reynaud, Cirodde, Guilmin, Bertrand, Briot, faire un ouvrage utile, et utile surtout à un grand nombre de lecteurs.

La plupart des Traités qui ont paru dans ces derniers temps s'adressent principalement à des élèves qui ont déjà certaines notions élémentaires sur l'arithmétique, ou qui se sont familiarisés avec les méthodes de calcul ; M. Tarnier a voulu que son livre pût être mis entre les mains du commençant, et qu'il pût lui suffire pour continuer ses études jusqu'aux parties les plus élevées de l'arithmétique.

Ce livre se divise en deux parties : dans la première, que l'auteur appelle l'*arithmétique* proprement dite, il expose, en adoptant la méthode appelée *synthétique,* les premiers éléments, comprenant l'exigé du baccalauréat ès lettres et ès sciences physiques, les quatre premières opérations sur les nombres entiers, les fractions ordinaires et décimales, les caractères de divisibilité les plus simples, le système de numération décimale, le plus grand commun diviseur à deux nombres, l'extraction de la racine carrée, les proportions, et l'exposé du système métrique ; enfin un très-grand nombre de questions sur les intérêts, les partages proportionnels, les fonds publics, les alliages, etc.; complément indispensable pour faire connaître à l'élève toutes les ressources que les méthodes purement arithmétiques peuvent apporter à la résolution des problèmes. Nous approuvons fort l'importance que M. Tarnier a donnée à cette partie de son livre, et sa préoccupation d'y éviter l'emploi de la résolution d'équations et de notations algébriques; bien convaincu que, malgré la simplicité qu'introduisent dans la résolution de ces mêmes questions les notations et le calcul algébrique, on ne peut pas offrir aux jeunes intelligences d'exercice plus utile et plus propre à leur développement; mais c'est surtout, nous le répétons, en évitant tout moyen de solution qui ne serait qu'une traduction de la mise en équation du problème, que ces exercices acquièrent toute leur importance.

Dans la seconde partie se trouvent les propriétés générales des nombres, l'extraction de la racine cubique, la théorie des progressions et des logarithmes, le complément de la théorie des fractions décimales périodiques, et quelques notes sur les approximations décimales. Cette partie est traitée d'une manière assez complète pour que ce livre puisse, comme nous le disions en commençant, conduire l'élève jusqu'à la fin de ses études arithmétiques.

Les détails abondent assez dans ce Traité et y sont choisis avec assez de variété pour que le lecteur ne soit pas obligé d'aller chercher ailleurs des applications et des exercices ; les démonstrations y sont exposées avec netteté et rigueur ; nous ajouterons cependant que la méthode synthétique ou plutôt dogmatique que M. Tarnier a employée dans son livre, ne doit pas, à notre avis, être exclusivement adoptée : si cette méthode est utile pour éviter aux commençants des tâtonnements trop nombreux, nous croyons, d'autre part, que l'état intellectuel de l'individu passe par les mêmes phases que celui de l'espèce, et il n'est peut-être pas sans utilité, pour bien faire connaître une science, de l'exposer dans son ordre naturel, qui est le plus souvent l'ordre historique ; il faut que l'élève abordant une nouvelle opération, le procédé spontané lui soit d'abord indiqué, puis successivement toutes les simplifications introduites pour arriver à l'état final.

Quant au plan de tout l'ouvrage, en tant qu'exposition d'un système complet d'arithmétique, nous ne saurions y donner notre approbation, et nous sommes certain que l'auteur lui-même est de cet avis ; car, d'après le but qu'il se proposait, il a été obligé, pour tracer le plan de son arithmétique et pour en délimiter les parties, de s'assujettir à l'ordre arbitraire et irrationnel du programme du baccalauréat, où la racine carrée se trouve dans une partie et la racine cubique dans l'autre, etc.

Enfin, l'ouvrage de M. Tarnier a pour caractère principal de se mettre, comme nous le disions, à la portée des élèves les moins avancés, et de pouvoir servir aux intelligences les plus rebelles, tout en restant suffisant pour les élèves qui ont à faire des études complètes ; l'auteur a voulu consciencieusement faire un livre utile, et il a réussi.

NOTE SUR LES SECTIONS CIRCULAIRES DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. TILLOL, professeur à Castres.

Cette Note a pour but de rendre la recherche des sections circulaires indépendante de la transformation d'axes dans le plan de la section.

Soient $F = 0$ l'équation de la surface; $f = 0$, $f_1 = 0$ les équations de deux plans qui la coupent. L'équation

$$F + \lambda f f_1 = 0$$

représente une surface passant par les points d'intersection de la surface $F = 0$ avec chacun des plans $f = 0$, $f_1 = 0$; dès lors, si l'équation

$$F + \lambda f f_1 = 0$$

peut devenir celle d'une sphère, il sera établi que la surface admet des sections circulaires, et les équations $f = 0$, $f_1 = 0$ en détermineront la direction.

Soient

$$F = Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + Qx + Q'y + Q''z + E = 0,$$

l'équation de la surface dans laquelle P, P', P'', Q,... peuvent admettre des valeurs numériques et des signes quelconques, et

$$f = ax + by + cz + d = 0, \quad f_1 = a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

les équations des deux plans; l'équation de la surface auxiliaire sera

$$\begin{gathered} Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + Qx + Q'y + Q''z + E \\ + \lambda(ax + by + cz + d)(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \end{gathered}$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}(P+\lambda aa')x^2+(P'+\lambda bb')y^2+(P''+\lambda cc')z^2\\+\lambda[(ab'+ba')xy+(ac'+ca')xz+(bc'+cb')yz]\\+[Q+\lambda(ad'+da')]x+[Q'+\lambda(bd'+db')]y\\+[Q''+\lambda(cd'+dc')]z+E+\lambda dd'=0.\end{aligned}$$

Pour que cette équation représente une sphère, en supposant les axes rectangulaires, il suffit de poser

$$P+\lambda aa'=P'+\lambda bb'=P''+\lambda cc',$$
$$ab'+ba'=0,\quad ac'+ca'=0,\quad bc'+cb'=0.$$

Ce dernier système peut être vérifié de plusieurs manières. Posons d'abord

$$a=a'=0;$$

les équations de condition deviendront, dans cette hypothèse,

$$P=P'+\lambda bb'=P''+\lambda cc',\quad bc'+cb'=0;$$

d'où

$$\frac{cc'}{bb'}=\frac{P-P''}{P-P'},$$

et, à cause de $\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$,

$$\frac{c^2}{b^2}=-\frac{cc'}{bb'}=\frac{P''-P}{P-P'},$$

d'où enfin

$$\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{P''-P}{P-P'}},\qquad \frac{c'}{b'}=-\sqrt{\frac{P''-P}{P-P'}}.$$

Les équations

$$f=0,\quad f_1=0,$$

deviendront, dans ce cas,

$$(1)\quad \begin{cases} y + z\sqrt{\dfrac{P''-P}{P-P'}} + \dfrac{d}{b} = o, \\ y - z\sqrt{\dfrac{P''-P}{P-P'}} + \dfrac{d'}{b'} = o; \end{cases}$$

de même, les conditions $b = b' = o$, $c = c' = o$, donnent

$$(2)\quad \begin{cases} x + y\sqrt{\dfrac{P'-P''}{P''-P}} + \dfrac{d}{a} = o, \\ x - y\sqrt{\dfrac{P'-P''}{P''-P}} + \dfrac{d'}{a'} = o, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} z + x\sqrt{\dfrac{P-P'}{P'-P''}} + \dfrac{d}{c} = o, \\ z - x\sqrt{\dfrac{P-P'}{P'-P''}} + \dfrac{d'}{c'} = o. \end{cases}$$

Il résulte de ces six équations que les surfaces du second degré admettent, dans six directions différentes, des sections circulaires (réelles ou imaginaires) et parallèles à l'un des axes principaux de la surface; de là aussi un théorème remarquable de Hachette, savoir que *deux cercles quelconques appartenant à des séries différentes sont toujours situés sur une même sphère.*

Si l'on part de l'équation plus simple

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = +H,$$

dans laquelle on a les relations

$$H > o, \quad \text{et} \quad P > P' > P'',$$

on voit que dans le cas de l'ellipsoïde, le système (3) est seul réel, ce qui indique que les sections circulaires sont parallèles à l'axe moyen.

Dans l'hyperboloïde à une nappe, $P'' < 0$, le système (3) est seul réel, et les sections sont parallèles au plus grand des axes réels.

Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, P' et P'' sont négatifs, le système (3) est seul réel, et les sections sont parallèles au plus grand des axes imaginaires.

Les équations de condition étant indépendantes des coefficients $Q, Q', Q'', \ldots, E$, les plans qui déterminent les sections circulaires dans les hyperboloïdes les déterminent aussi dans le cône asymptote. Une section d'une série peut être regardée comme la base du cône, l'autre comme une section anti-parallèle.

Dans le cas des paraboloïdes, l'équation en coordonnées rectangles peut toujours prendre la forme

$$P'y^2 + P''z^2 - Qx = 0,$$

P' et P'' étant de mêmes signes dans le paraboloïde elliptique, et de signe contraire dans le paraboloïde hyperbolique. Dans le premier cas, on peut avoir

$$P' > P'', \quad \text{ou} \quad P' < P'',$$

d'où

$$x + y\sqrt{\frac{P' - P''}{P''}} + \frac{d}{a} = 0, \quad x - y\sqrt{\frac{P' - P''}{P''}} + \frac{d'}{a'} = 0,$$

et

$$z + x\sqrt{\frac{P'}{P'' - P'}} + \frac{d}{c} = 0, \quad z - x\sqrt{\frac{P'}{P'' - P'}} + \frac{d'}{c'} = 0;$$

dans ce cas il y aura deux séries de plans perpendiculaires à celui des xy et des xz. Si $P' = P''$, il n'y aura plus qu'une série de plans perpendiculaires à l'axe du paraboloïde.

Dans le paraboloïde hyperbolique, on a

$$P' > 0 \quad \text{et} \quad P'' < 0;$$

les équations des plans deviennent alors

$$y + z\sqrt{\frac{P''}{P'}} + \frac{d}{b} = 0, \quad y - z\sqrt{\frac{P''}{P'}} + \frac{d'}{b'} = 0;$$

elles paraissent indiquer deux séries de sections circulaires. Mais l'élimination successive de y et de z entre ces équations et l'équation

$$P'y^2 - P''z^2 - Qx = 0,$$

conduisant à deux équations du premier degré, il s'ensuit que les projections de l'intersection sur les plans des xz et des yz sont du premier degré, et que par suite les intersections sont des lignes droites.

(*Extrait d'un ouvrage inédit.*)

DE LA SUITE MÉDIANE ET DES SUITES CONSTANTES QUI TENDENT A SE FORMER DANS LES SUITES DIATOMIQUES

(voir t. VIII, p. 423);

PAR M. DE POLIGNAC,
Élève de l'École Polytechnique.

A cause de la symétrie des suites diatomiques, si, au lieu de partir de zéro pour former une période d'une suite diatomique, on part de $\frac{\mu . P_n}{2}$, on formera la moitié d'une période en allant jusqu'à μP_n. Désignons par a le nombre $\frac{\mu . P_n}{2}$, et considérons la suite des nombres naturels

$$\ldots a-6,\ a-5,\ a-4,\ a-3,\ a-2,\ a-1,\ a$$
$$a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6,\ldots .$$

Il est clair d'abord que tous les termes de la forme

$a \pm 2n + 1$ seront effacés comme nombres pairs, puisque a est impair ; maintenant si j'efface (en partant de a), de 3 en 3, de 5 en 5, de 7 en 7,..., de P_n en P_n, il est clair qu'en prenant n assez grand, on effacera tous les termes de la suite précédente (jusqu'à un terme choisi arbitrairement), excepté les puissances de 2 diminuées d'une unité. On voit donc qu'il tend à se former, au milieu des suites diatomiques, une suite constante que j'appellerai *suite médiane* et qui n'est autre que les puissances successives de 2 diminuées d'une unité. On voit de plus que la suite médiane s'étend au delà de toute limite. *Les termes milieux des suites diatomiques tendent donc vers un état définitif, les puissances successives de* 2. Ils présentent le tableau suivant :

$$\ldots 255,\ 127,\ 63,\ 31,\ 15,\ 7,\ 3,\ 1,\ \underline{\overline{3}},\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ 255,\ldots.$$

En particulier, on remarquera que le terme milieu est 3, résultat déjà énoncé précédemment.

On peut se proposer, étant donnée une suite diatomique, de déterminer le nombre des termes de la suite médiane qui appartiennent à cette suite diatomique. Je n'ai pu jusqu'à présent résoudre cette question ; toutefois il est facile d'avoir une limite inférieure du nombre cherché. En effet, ce nombre sera au moins égal à deux fois le nombre des puissances de 2 inférieures à P_n augmenté d'une unité.

Si maintenant, au lieu de $\frac{\mu P_n}{2}$ on prend le nombre $\frac{\mu P_n}{2.3}$, on trouve qu'à partir de ce terme il se forme à droite et à gauche une suite qui n'est pas symétrique et dont le terme milieu est $\underline{5}$; désignons $\frac{\mu P_n}{2.3}$ par b, et prenons la suite des nombres naturels :

$$\ldots b-3,\ b-2,\ b-1,\ b,\ b+1,\ b+2,\ b+3,\ldots,$$

tous les nombres de la forme $b+2n+1$ seront effacés comme nombres pairs. Maintenant il y a deux hypothèses à faire :

1°. $$b-1\equiv 0 \pmod{3}.$$

Dans ce cas, en effaçant de 3 en 3 à partir de $b-1$, puis de 5 en 5, de 7 en 7,..., de P_n en P_n à partir de b, on voit que dans la portion de droite tous les nombres seront effacés, excepté ceux de la forme $b+2^{2n}$ ou de la forme $b+2^\alpha.3^\beta$, et dans la portion de gauche il n'y aura de conservés que les nombres de la forme $b-2^{2n+1}$ ou $b-2^\alpha.3^\beta$. En sorte que les termes de la suite considérée sont, pour la partie droite,

$$2^\alpha.3^\beta-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1,\ \text{ou}\ 2^\alpha.3^\beta-2^{2n}-1,\ \text{ou}\ 2^{2n}-2^\alpha.3^\beta-1,$$

et, pour la partie gauche,

$$2^\alpha.3^\beta-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1,\quad 2^\alpha.3^\beta-2^{2n+1}-1,$$

ou

$$2^{2n+1}-2^\alpha\,3^\beta-1.$$

On peut réunir ces différentes formes dans une seule formule, sauf à la discuter dans les deux cas où l'on prendrait la portion de droite ou la portion de gauche de la série; cette formule est

$$2^\alpha.3^{\beta'}(\pm 2^{\alpha-\alpha'}.3^{\beta-\beta'}\mp 1)\,1.$$

Si l'on se donne α et β, α' et β' sont déterminés. Supposons d'abord que β ne soit pas nul; alors, si la valeur de β' n'est pas nulle non plus, le terme trouvé pour la portion de droite se trouvera aussi dans la portion de gauche de la série. Admettons encore que $\beta>0$; alors, si $\beta'=0$, la formule pour représenter un terme de droite devra être telle que $\alpha'=2k$, et pour un terme de gauche $\alpha'=2k'+1$. Enfin, si $\beta=0$, pour un terme de droite on aura $\alpha=2k$, et pour un terme de gauche $\alpha=2k+1$.

β et β' ne peuvent être nuls à la fois; quant aux exposants α et α', aucun d'eux ne peut être nul.

2°. $$(b+1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Il est aisé de voir dans ce cas que la partie gauche devient la partie droite, et *vice versâ*; c'est là le seul changement qui ait lieu.

La suite qui se forme autour de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ ne change pas indéfiniment avec P_n; comme la suite médiane, elle tend vers un état constant, seulement elle peut changer de sens, c'est-à-dire que les termes qui se trouvaient à gauche de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peuvent se trouver à droite de $\frac{\mu P_{n'}}{2.3}$, et *vice versâ*. Ainsi la suite est constante, par rapport à la valeur des termes, et elle n'admet que deux états en considérant leur disposition. Dans tous les cas, l'inspection seule de la forme $\frac{\mu P_n}{2.3}$, par rapport à 3, suffira pour marquer si l'on a un de ces états ou l'autre.

On peut observer que si l'on écrit les deux états de la suite l'un au-dessous de l'autre, de manière que les deux termes milieux $\underline{5}$ se trouvent sur une même colonne verticale, et si l'on additionne terme à terme, on obtiendra évidemment une suite symétrique.

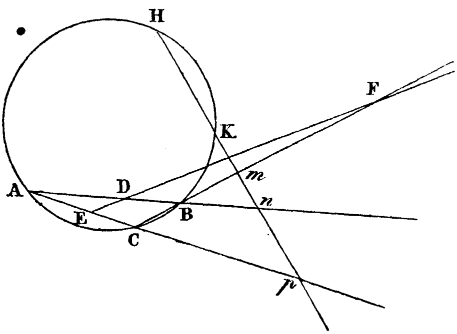
Généralisons ces considérations. Dans toute suite diatomique il se forme, autour de $\frac{\mu P_n}{1.2.3.\ldots.P_k}$, une suite de termes dont les valeurs ne dépendent pas de la grandeur de P_n (on suppose que P_k reste constant, et qu'on fasse croître P_n), mais de la forme de μP_n, par rapport à P_k, $P_{k-1}, \ldots$, 5, 3. On voit donc que le nombre des séries fixes qui se forment autour de $\frac{\mu P_n}{2.3,\ldots, P_n}$ est limité; de plus on voit qu'à chaque série il en correspond une autre telle, qu'en les ajoutant terme à terme, on a une série symétrique. Par conséquent, la somme de toutes les séries sera aussi symétrique.

Je me propose, dans un autre article, de parler des propriétés de ces suites constantes qui, on le voit, tendent à se former dans les suites diatomiques, et nous permettent de découvrir de loin en loin, dans ces suites, des groupes de termes connus, sans qu'il soit besoin de former les suites diatomiques elles-mêmes.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. A. NÉVROUZIAN (Arménien),
Élève, en spéciales, du lycée Louis-le-Grand, institution Sainte-Barbe.

Un triangle ABC *étant inscrit dans un cercle, si, par deux points* H, K *de la circonférence, on fait passer trois cercles tangents, respectivement, aux trois côtés du triangle, de manière que les points de contact des deux premiers soient sur les côtés* AB, AC, *et le point de contact du troisième, sur le prolongement du troisième côté* BC; *les trois points de contact* D, E, F *seront en ligne droite.*



Démonstration. Appelons m, n, p les points où la corde HK rencontre les trois côtés du triangle ABC.

On a, à l'égard du point D,

$$\overline{nD}^2 = nA.nB, \quad \text{ou} \quad \frac{nA}{nD} = \frac{nD}{nB};$$

d'où je tire

$$\frac{nA - nD}{nA} = \frac{nD - nB}{nD},$$

c'est-à-dire

$$\frac{DA}{nA} = \frac{BD}{nD}, \quad \text{ou} \quad \frac{DA}{DB} = -\frac{nA}{nD}.$$

On a de même, sur le côté AC,

$$\frac{EC}{EA} = -\frac{pC}{pA},$$

et, sur le côté CB,

$$\frac{FB}{FC} = -\frac{mF}{mC}.$$

Multipliant ces trois équations membre à membre, on a

$$\frac{DA.EC.FB}{DB.EA.FC} = -\frac{nA}{nD}\cdot\frac{pE}{pA}\cdot\frac{mF}{mC}.$$

Il faut prouver que le second membre est égal à $+1$.

Or

$$\overline{nD}^2 = nA.nb; \quad \overline{pE}^2 = pA.pC; \quad \overline{mF}^2 = mB.mC;$$

d'où

$$\frac{\overline{nD}^2}{\overline{nA}^2} = \frac{nB}{nA}; \qquad \frac{\overline{pE}^2}{\overline{pA}^2} = \frac{pC}{pA}; \qquad \frac{\overline{mF}^2}{\overline{mC}^2} = \frac{mB}{mC};$$

donc

$$\frac{nA}{nD}\cdot\frac{pE}{pA}\cdot\frac{mF}{mC} = \pm\sqrt{\frac{nA}{nB}\cdot\frac{pC}{pA}\cdot\frac{mB}{mC}}.$$

Or, le produit sous le radical est égal à $+1$, parce que les trois points m, n, p sont en ligne droite; il vient donc

$$\frac{nA}{nD} \cdot \frac{pE}{pA} \cdot \frac{mF}{mC} = \pm 1.$$

L'inspection de la figure montre que le signe du second membre doit être —, parce que les deux rapports $\frac{nA}{nD}$, $\frac{pE}{pA}$ sont positifs, et le troisième $\frac{mF}{mC}$ négatif. Il en résulte l'équation

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FB}{FC} = +1;$$

ce qui prouve que les points E, D, F sont en ligne droite. C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 198

(voir t. VII, p. 448);

PAR M. A. VACHETTE,

Licencié ès sciences physiques et licencié ès sciences mathématiques.

PROBLÈME. *Des hyperboles équilatères concentriques sont coupées orthogonalement par une même droite : quelle est leur courbe enveloppe?* (STREBOR.)

Solution. Prenons pour origine le centre commun des hyperboles équilatères, et pour axe des y une parallèle à la droite qui les coupe orthogonalement. L'équation générale des hyperboles équilatères sera de la forme

$$(1) \qquad y^2 + Axy - x^2 + B = 0.$$

La droite orthogonale aura pour équation

$$x = a,$$

et si b est l'ordonnée qui répond sur la courbe à l'abscisse a, la tangente à l'une des courbes au point dont les coordonnées sont a et b aura pour équation

$$y = b,$$

qu'il faut identifier avec l'équation de la tangente à la courbe (1),

$$by + \frac{A}{2}bx + \frac{A}{2}ay - ax + B = 0.$$

Cette identification donne les relations

$$Ab - 2a = 0, \qquad b = -\frac{2B}{Aa + 2b};$$

d'où l'on déduit

$$A = \frac{2a}{b}, \qquad B = (a^2 + b^2),$$

et, en substituant dans l'équation (1), elle devient

$$(2) \qquad y^2 + \frac{2a}{b}xy - x^2 - (a^2 + b^2) = 0,$$

où b est le seul paramètre variable. Il faut donc éliminer b entre l'équation (2) et la dérivée prise par rapport à b, c'est-à-dire entre les deux équations

$$b(y^2 - x^2 - a^2) - b^3 + 2axy = 0,$$
$$y^2 - x^2 - a^2 - 3b^2 = 0;$$

ce qui donne enfin, pour la courbe enveloppe,

$$(3) \qquad y^2 - x^2 - a^2 + 3(axy)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

SOLUTION DES QUESTIONS 230 ET 231

(voir t. X, p. 181 et 182);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Du séminaire de Vals.

Question 230. Deux polygones quelconques de $2n$ côtés sont équivalents quand leurs côtés ont les mêmes milieux.

(PROUHET.)

Solution. Soient P et P′ deux polygones de $2n$ côtés dont les côtés ont les mêmes milieux. Joignons par des droites les sommets de P aux sommets correspondants de P′; ces droites sont égales et parallèles, car elles forment avec les demi-côtés des polygones $4n$ triangles, ayant deux à deux un angle opposé au sommet compris entre côtés égaux. Prolongeons ces lignes de jonction jusqu'à la rencontre d'une droite A menée arbitrairement dans le plan; la droite A, les lignes de jonction et les côtés des polygones forment des trapèzes, et chaque trapèze terminé au polygone P est équivalent au trapèze terminé au côté correspondant du polygone P′.

Les surfaces de P et de P′ s'exprimant par celles des trapèzes correspondants, il en résulte que les polygones sont équivalents.

Question 231. La surface d'un polygone de $2n$ côtés ne change pas lorsque tous les sommets de rang pair ou tous les sommets de rang impair décrivent (dans la même direction) des droites égales et parallèles.

(PROUHET.)

Solution. Soit d la longueur des droites parcourues par les sommets de rang pair, ou par ceux de rang impair.

Dans le mouvement des sommets, les milieux des côtés ont avancé de $\frac{d}{2}$ dans la même direction. Conservant au polygone sa seconde forme, nous pouvons, par un mouvement de direction contraire, ramener les milieux des côtés en leurs premières positions; dès lors l'équivalence des polygones est établie (*question* 230).

Remarque. On reconnaît très-facilement les deux propriétés précédentes en considérant la formule qui donne l'aire du polygone en fonction des coordonnées des sommets (*voir* tome IX, page 65).

SOLUTION DE LA QUESTION 209

(voir t. VIII, p. 236);

PAR M. JUBÉ,
Professeur à Saint-Omer.

On peut réduire un système de forces à trois forces dont deux forment un couple agissant dans un plan perpendiculaire à la troisième force; on peut aussi réduire le système à deux forces. La plus courte distance de ces deux forces rencontre à angle droit la troisième force de la première réduction. (CHASLES.)

La question peut être présentée de cette manière en la renversant :

Étant données deux forces non situées dans un même plan, on peut les réduire à un système de trois forces dont deux forment un couple agissant dans un plan perpendiculaire à la troisième. Cette troisième force est perpendiculaire à la plus courte distance des deux forces données.

Soient Q et R les deux forces données, AB leur plus courte distance. En transportant au point B la force Q parallèlement à elle-même, on obtient un couple (Q, —Q) et une force S résultante de Q et R, et perpendiculaire à BA.

L'axe du couple (Q, —Q) est aussi dans le plan de R et S, perpendiculaire à BA. De sorte qu'en transportant la force S parallèlement à elle-même en un point quelconque C de BA, on formera un nouveau couple dont l'axe sera aussi dans ce même plan perpendiculaire à BA, et le point C pourra être choisi de telle sorte que le couple résultant de (Q, — Q) et de (S, — S) ait son axe dirigé suivant BS ou son prolongement. Il suffit pour cela que

$$BC = \frac{Q}{S} \cos QBS \times BA.$$

Le plan de ce couple résultant sera bien alors perpendiculaire à la troisième force S appliquée en C, et celle-ci d'ailleurs sera perpendiculaire à BA.

GRAND CONCOURS DE 1851

(voir t. IX, p. 282).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques supérieures.

Étant donnée une droite L, on mène de chacun de ses points M deux droites à deux points fixes P, P'. Deux autres points fixes O, O' sont les sommets de deux angles AOB, A'O'B', de grandeurs données et constants, que l'on fait tourner autour de leurs sommets respectifs, de manière que leurs côtés OA, O'A' soient respectivement perpendiculaires aux deux droites MP, M'P'.

On demande quelle est la courbe décrite par le point d'intersection N des deux droites OA, O′A′, et la courbe qui est décrite par le point d'intersection N′ des deux autres côtés OB, O′B′, quand le point M glisse sur la droite fixe L.

Mathématiques élémentaires.

Etant donnés deux cercles O et O′, qui ne se touchent pas, mais qui peuvent se couper ou ne pas se couper indifféremment, de chaque point M, de l'un O on mène deux droites aux centres de similitude S et S′ des deux cercles; ces droites rencontrent l'autre cercle O′ en quatre points m, n, m', n'.

On demande de prouver que deux de ces points sont sur un diamètre du cercle O′ et les deux autres sur une droite qui passe par un point fixe, quel que soit le point M pris sur le cercle O.

Note. Très-bonnes questions. Par le temps qui court, elles font honneur à l'Université. Puisse-t-elle persévérer !

SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 78

(voir t. II, p. 454) ;

PAR M. P. TARDY,
Professeur de Mathématiques à Gênes.

Soit

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

et désignons par

$$\sum A_n^r [1, 2, 3, \ldots, m]$$

la somme des quantités qu'on déduit de A_n^r en changeant les signes à un nombre m des lettres a_1, a_2,..., a_n, et en faisant toutes les combinaisons possibles : le nombre de ces quantités sera évidemment égal à $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$, que nous représenterons, pour abréger, par le symbole $\binom{n}{m}$.

Posons

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} S_n = A_n^n - \sum A_n^n[1] + \sum A_n^n[1,\ 2] - \ldots \\ \quad + (-1)^n \sum A_n^n[1,\ 2,\ldots,\ n]; \end{array}\right.$$

il est clair qu'en développant, suivant les puissances de a_n, $\sum A_n^n[1,\ 2,\ldots,\ m]$, nous aurons pour terme général

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left\{\begin{array}{l} \sum A_{n-1}^{p_1}[1,\ 2,\ldots,\ m] \\ + (-1)^{n-p_1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1,\ 2,\ldots,\ (m-1)] \end{array}\right\},$$

excepté le cas de $m=n$, dans lequel nous obtiendrons seulement

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} (-1)^{n-p_1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1,\ 2,\ldots,\ (n-1)].$$

Cela posé, le terme général, dans le développement de S_n, sera

$$\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left[1-(-1)^{n-p_1}\right] \left\{\begin{array}{l} A_{n-1}^{p_1} - \sum A_{n-1}^{p_1}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1, 2,\ldots,(n-1 \end{array}\right.$$

lequel deviendra évidemment égal à zéro toutes les fois que $n-p_1$ est un nombre pair, et si $n-p_1$ est impair, il se réduira à

$$2\binom{n}{p_1} a_n^{n-p_1} \left\{ \begin{array}{l} A_{n-1}^{p_1} - \sum A_{n-1}^{p_1}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-1} \sum A_{n-1}^{p_1}[1, 2, \ldots, (n-1)] \end{array} \right\}.$$

Considérant la série entre parenthèses, nous aurons de même, pour terme général de son développement,

$$2\binom{p_1}{p_2} a_{n-1}^{p_1-p_2} \left\{ \begin{array}{l} A_{n-2}^{p_2} - \sum A_{n-2}^{p_2}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-2} \sum A_{n-2}^{p_2}[1, 2, \ldots, (n-2)] \end{array} \right\},$$

ou zéro, selon que $p_1 - p_2$ est impair ou pair.

Si nous continuons ainsi, et dans l'hypothèse que $n - p_1, p_1 - p_2, \ldots, p_{\mu-1} - p_\mu$ soient tous des nombres impairs, il est clair que nous parviendrons à un terme général

$$2\binom{p_{\mu-1}}{p_\mu} a_{n-\mu+1}^{p_{\mu-1}-p_\mu} \left\{ \begin{array}{l} A_{n-\mu}^{p_\mu} - \sum A_{n-\mu}^{p_\mu}[1] + \ldots \\ + (-1)^{n-\mu} \sum A_{n-\mu}^{p_\mu}[1, 2, \ldots, (n-\mu)] \end{array} \right\},$$

dans lequel on aura $p_\mu = 1$.

Maintenant la quantité

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n-\mu} - \sum A_{n-\mu}[1] + \ldots \\ + (1-)^{n-\mu} \sum A_{n-\mu}[1, 2, \ldots, (n-\mu)], \end{array} \right.$$

sera nulle, excepté dans le seul cas où $A_{n-\mu} = a_1$, c'est-à-dire $\mu = n - 1$. En effet, prenons une quelconque des lettres qui entrent dans $A_{n-\mu}$; elle se trouvera dans

$$\sum A_{n-\mu}[1, 2, \ldots, m],$$

avec le signe positif un nombre de fois égal à celui des combinaisons qu'on peut faire avec $n-\mu-1$ objets pris m à m, et avec le signe négatif un nombre de fois égal au nombre des combinaisons qu'on peut faire avec $n-\mu-1$ objets pris $m-1$ à $m-1$, c'est-à-dire qu'elle sera multipliée par $\binom{n-\mu-1}{m}-\binom{n-\mu-1}{m-1}$, et, par conséquent, dans l'expression (2), elle aura pour coefficient la série

$$\left.\begin{array}{l} 1-\binom{n-\mu-1}{1}+\binom{n-\mu-1}{2}-\ldots+(-1)^{n-\mu-1} \\ \quad +1-\binom{n-\mu-1}{1}+\ldots-\binom{n-\mu-1}{1}-(-1)^{n-\mu} \end{array}\right\}=2(1-1)^{n-\mu-1}=$$

Mais si $\mu=n-1$, la valeur de l'expression (2) devient $2a_1$. Or, pour arriver jusqu'à la quantité (2) avec $\mu=n-1$, sans qu'aucun des termes généraux des développements précédents se soit évanoui, il faut que toutes les différences

$$p_{\mu-1}-p_\mu,\quad p_{\mu-2}-p_{\mu-1},\ldots,\quad p_2-p_1,\quad n-p_1$$

soient égales à l'unité, c'est-à-dire qu'on ait $p_1=n-1$. De là nous pouvons conclure que dans le développement du second membre de l'équation (1), tous les termes qui contiennent des puissances de a_n supérieures à la première se détruisent, et il restera

$$S_n=2n.a_n.S_{n-1}.$$

Par la même raison

$$\begin{aligned} S_{n-1}&=2(n-1).a_{n-1}.S_{n-2},\\ S_{n-2}&=2(n-2).a_{n-2}.S_{n-3},\\ &\vdots\\ S_2&=2.2a_2.S_1,\\ S_1&=2a_1. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations membre à membre, et ôtant le facteur commun $S_{n-1}.S_{n-2}\ldots S_2.S_1$, il viendra

$$S_n = 2^n.1.2.3\ldots n.a_1.a_2.a_3\ldots a_n;$$

puisqu'en général on a

$$\sum A_n^n[1, 2,\ldots, m] = (-1)^n \sum A_n^n[1, 2,\ldots, (n-m)],$$

l'équation (1) pourra s'écrire ainsi :

$$S_n = 2\left\{A_n^n - \sum A_n^n[1] + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n-1}{2}\right]\right\},$$

pour n impair, et

$$S_n = 2\left\{\begin{array}{l} A_n^n - \sum A_n^n[1] + \ldots \\ + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n-2}{2}\right] \end{array}\right\} + (-1)^{\frac{n}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right]$$

pour n pair.

La quantité $\sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right]$ contient un nombre pair de termes, lesquels sont deux à deux égaux, et si nous indiquons par $\sum A_n^n\left[\bar{1}, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right]$ la somme de ces termes où parmi les $\frac{n}{2}$ lettres a prises négativement se trouve a_1, nous aurons

$$\sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right] = 2\sum A_n^n\left[\bar{1}, 2,\ldots, \frac{n}{2}\right],$$

et, par conséquent, on obtiendra les formules (*)

$$2^{n-1}.1.2\ldots n.a_1.a_2\ldots a_n = A_n^n - \sum A_n^n[1] + \sum A_n^n[1, 2] - \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum A_n^n\left[1, 2,\ldots, \frac{n-1}{2}\right]$$

(*) M. Cauchy a indiqué une démonstration de cette formule, *Comptes rendus*, 1840, 1er semestre, page 569, et d'une manière plus développée dans le tome II des *Exercices*, page 141.

si n est impair, et

$$2^{n-1}.1.2\ldots n.a_1.a_2\ldots a_n = A_n^n - \sum A_n^n[1] + \sum A_n^n[1,2] - \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sum A_n^n \left[1, 2, \ldots, \frac{n-2}{2}\right]$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \sum A_n^n \left[\bar{1}, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right]$$

si n est pair.

Ainsi pour $n = 3$, on a

$$24.a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3 - (a_1 + a_3 - a_2)^3 - (a_2 + a_3 - a_1)^3;$$

et, pour $n = 4$,

$$\begin{aligned}192.a_1 a_2 a_3 a_4 = {} & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^4 \\ & - (a_1 + a_2 + a_4 - a_3)^4 - (a_1 + a_3 + a_4 - a_2)^4 \\ & - (a_2 + a_3 + a_4 - a_1)^4 + (a_2 + a_3 - a_4 - a_1)^4 \\ & + (a_2 + a_4 - a_3 - a_1)^4 - (a_3 + a_4 - a_2 - a_1)^4.\end{aligned}$$

SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LA SOMMATION D'UNE SOMME DE PUISSANCES (*);

D'après M. A. THACKER.

(Journal de M. Crelle, tome XL, page 89; 1850.)

---

1. Problème. *Soient m et n deux nombres entiers positifs, trouver la somme des puissances d'exposant n, de tous les nombres premiers à m et plus petits que m.*

Solution. Soit $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; $a, b, c, \ldots$ étant des

(*) M. Binet vient de traiter le même sujet. (*Compte rendu*, t. XXXII, p. 918.)

nombres premiers; posons

$\varphi(p) = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + p^n$, p étant un nombre entier.

Les nombres compris entre 1 et m et divisibles par a sont

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots, \frac{m}{a} \cdot a;$$

par conséquent, d'après l'énoncé du problème, il faut rejeter la somme

$$a^n + (2a)^n + (3a)^n + \ldots + \left(\frac{m}{a}a\right)^n = a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right).$$

Posons

$$R = \varphi(m) - a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right).$$

Dans R rejetons les puissances n des nombres divisibles par b; raisonnant comme ci-dessus, il faudra rejeter de φm la somme

$$b^n \varphi\left(\frac{m}{b}\right), \quad \text{et dans} \quad a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right),$$

il faut rejeter

$$a^n \left[b^n + (2b)^n + (3b)^n + \ldots + \left(\frac{m}{ab}\right) b\right]^n = a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right);$$

il faut donc rejeter

$$b^n \varphi\left(\frac{m}{b}\right) - a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right).$$

Représentant le reste par R′, on obtient

$$R' = \varphi(m) - a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right) - b^n \varphi\left(\frac{m}{b}\right) + a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right);$$

effaçant dans chacun des quatre termes ceux qui se rapportent au diviseur c, et désignant ce qui reste par R″, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} R'' = \varphi(m) - a^n\varphi\left(\frac{m}{a}\right) - b^n\varphi\left(\frac{m}{b}\right) - c^n\varphi\left(\frac{m}{c}\right) \\ + a^n b^n\varphi\left(\frac{m}{ab}\right) + a^n c^n\varphi\left(\frac{m}{ac}\right) + b^n c^n\varphi\left(\frac{m}{bc}\right) \\ - a^n b^n c^n\varphi\left(\frac{m}{abc}\right), \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

Pour fixer les idées, supposons qu'il n'y ait que trois facteurs a, b, c; alors R'' sera la somme cherchée. Désignons cette somme par S_n. On sait que l'on a

$$\varphi(m) = \frac{m^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}m^n + \frac{1}{2}n_1 B_1 m^{n-1} - \frac{1}{4}n_3 B_3 m^{n-3} + \frac{1}{6}n_5 B_5 m^{n-5} - \ldots,$$

où n_1, n_2, n_3,... sont des coefficients binomiaux, et B_1, B_2, B_3 sont les nombres Bernoulliens.

Si nous remplaçons dans l'équation (1) $\varphi(m)$, $\varphi\left(\frac{m}{a}\right)$,... par leurs développements, si nous ordonnons par rapport à m, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} S_n = \frac{m^{n+1}}{n+1}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) \\ + \frac{1}{2}n_1 B_1 m^{n-1}(1-a)(1-b)(1-c) \\ - \frac{1}{4}n_2 B_3 m^{n-3}(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3) \\ + \frac{1}{6}n_5 B_5 m^{n-5}(1-a^5)(1-b^5)(1-c^5) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si n est pair, le dernier terme est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+2)}\frac{1}{n}n_{n-1}B_{n-1}m(1-a^{n-1})(1-b^{n-1})(1-c^{n-1}),$$

et le nombre des termes est

$$\frac{1}{2}(n+2);$$

si n est impair, le dernier terme est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \frac{1}{n-1} n_{n-2} B_{n-2} m^2 (1-a^{n-2})(1-b^{n-2})(1-c^{n-2}),$$

et le nombre des termes est

$$\frac{1}{2}(n+1).$$

2. *Applications.* 1°. $n=0$; on a

$$S_0 = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right),$$

formule connue, trouvée par Euler, et qui indique combien il y a de nombres inférieurs et premiers à m (tome IV, page 75).

2°. $n=1$;

$$S_1 = \frac{1}{2} m^2 \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right).\left(1-\frac{1}{c}\right).$$

3°. $n=2$;

$$S_2 = \frac{1}{2} m^3 \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{6} m (1-a)(1-b)(1-c),$$

ou

$$S_2 = \frac{1}{3} m \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(m^2-\frac{1}{2}abc\right),$$

attendu que

$$B_1 = \frac{1}{6}.$$

4°. $n = 3$;

$$S_3 = \frac{1}{4} m^2 \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)(m^2 - abc).$$

Soit $m = 60 = 2^2.3.5$; on a

$$S_0 = 16, \quad S_1 = 480, \quad S_2 = 19120, \quad S_3 = 856800.$$

NOTE SUR LA SOLUTION PRÉCÉDENTE;

PAR M. E. PROUHET.

Ainsi, en résumé, si l'on suppose $\varphi(m)$ développé suivant les puissances descendantes de m, il suffira, pour obtenir S_n, de multiplier respectivement tous les termes de $\varphi(m)$ par P_{-1}, P_0, P_1, P_2, etc., en posant, pour abréger,

$$P_i = (1 - a^i)(1 - b^i)\ldots(1 - l^i);$$

mais on peut parvenir à ce résultat d'une autre manière, qui nous fera connaître en même temps une relation entre S_n et S_{n-1}.

Posons

$$\psi(p) = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \ldots + p^{n-1},$$

on aura

$$S_{n-1} = \psi(m) - \sum a^{n-1}\psi\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^{n-1} b^{n-1} \psi\left(\frac{m}{ab}\right) - \ldots,$$

$$S_n = \varphi(m) - \sum a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right) - \ldots,$$

où les signes sommatoires se rapportent aux nombres premiers qui entrent dans m.

Si l'on prend la dérivée de S_n par rapport à m, en traitant a, b, etc., comme des constantes, on aura

$$\frac{dS_n}{dm} = \varphi'(m) - \sum a^{n-1}\varphi'\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^{n-1} b^{n-1}\varphi'\left(\frac{m}{ab}\right) - \dots$$

Mais on a (page 188)

$$\varphi'(p) = n\psi(p) + B_{n-1};$$

donc

$$\frac{dS_n}{dm} = n\left[\psi(m) - \sum a^{n-1}\psi\left(\frac{m}{a}\right) + \dots\right] + B_{n-1}\left(1 - \sum a^{n-1} + \sum a^{n-1} b^{n-1} - \dots\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dS_n}{dm} = nS_{n-1} + B_{n-1} P_{n-1};$$

d'où

$$(2) \qquad S_n = n\int_0^m S_{n-1}\,dm + B_{n-1} P_{n-1}\, m,$$

et il n'y a pas de constante à ajouter, puisque la formule (1) montre que S_n ne doit pas avoir de terme indépendant de m.

Mais, d'un autre côté, en posant $s_n = \varphi(m)$, on a

$$(3) \qquad s_n = n\int_0^m s_{n-1}\,dm + B_{n-1}\, m;$$

par où l'on voit que si l'on se sert de l'équation (2) pour calculer S_0, S_1, S_2, etc., ou de l'équation (3) pour calculer s_0, s_1, etc., le premier résultat ne différera du second que par le changement de B_0 en $B_0 P_0$, de B_1 en $B_1 P_1$, etc.; ce qui s'accorde avec la règle énoncée plus haut.

Nous avons donné, dans un autre article, les valeurs de $s_0, s_1, \dots, s_n$ (p. 189); on pourra donc en déduire, sans nouveau calcul, les valeurs de S_0, S_1, ..., S_n : on aura ainsi

$$S_4 = P_{-1}\frac{m^5}{5} + P_1\frac{m^3}{3} - P_3\frac{m}{30},$$

$$S_5 = P_{-1}\frac{m^6}{6} + 5P_1\frac{m^4}{12} - P_3\frac{m^2}{12},$$

$$S_6 = P_{-1}\frac{m^7}{7} + P_1\frac{m^5}{2} - P_3\frac{m^3}{6} + P_5\frac{m}{42},$$

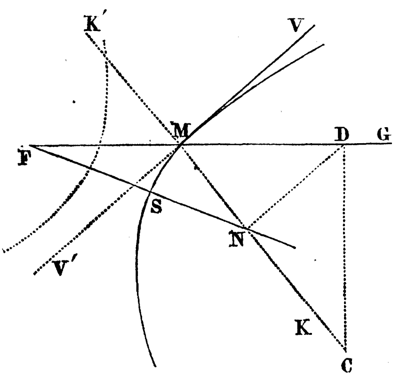
etc.

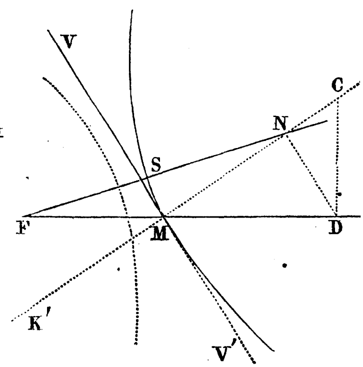
CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1841;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer le mouvement d'un point matériel repoussé par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.





F étant le point d'où émane la force répulsive, M la position du mobile, et MV la direction de sa vitesse à l'époque à partir de laquelle on compte le temps, il est évident qu'il ne sortira pas du plan FMV.

Nous prendrons F pour pôle, FM pour axe polaire, et nous désignerons par ω, ρ et ν les coordonnées et la vitesse du mobile à la fin du temps t, par ρ_0 et ν_0 les valeurs initiales de ρ et ν, par α l'angle FMV, compris entre o et π, enfin par μ la force répulsive rapportée aux unités de masse et de distance.

Le principe des forces vives donne

$$(1) \qquad \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}{dt^2} = a - \frac{2\mu}{\rho},$$

en posant $\nu_0^2 + \frac{2\mu}{\rho_0} = a$ pour abréger, et celui des aires,

$$(2) \qquad \rho^2 d\omega = c\,dt,$$

c étant déterminée en fonction des données ρ_0, ν_0 et α par l'équation

$$c = \rho_0 \nu_0 \sin\alpha.$$

L'élimination de dt, entre les équations (1) et (2), conduit à

$$c^2 . \left(\frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\omega}\right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2} = a - \frac{2\mu}{\rho};$$

en résolvant cette équation par rapport à $d\omega$, puis en intégrant, on trouve

$$\omega - \beta = \pm \text{arc.}\cos\left(\frac{\frac{\mu}{c} + \frac{c}{\rho}}{\sqrt{a + \frac{\mu^2}{c^2}}}\right),$$

— β étant la constante amenée par cette dernière opération ; et l'on tire de là

$$(3) \qquad \rho = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{\frac{ac^2}{\mu^2}+1}\,.\cos(\omega-\beta)-1}.$$

Afin que $\omega = 0$ donne $\rho = \rho_0$, il faut qu'on ait

$$\cos\beta = \frac{c^2+\rho_0\mu}{\rho_0\sqrt{ac^2+\mu^2}},$$

et nous prendrons pour β le plus petit arc positif qui satisfasse à cette équation.

L'équation (3) représente une hyperbole dont le point F est un des foyers ; le mouvement s'effectue sur la branche opposée à ce foyer, puisque ρ a initialement la valeur positive ρ_0 qui répond à un point de cette branche ; et l'on voit facilement que la droite qui va du foyer F à l'autre fait avec FM, dans le sens de ω, un angle égal à $2\pi-\beta$ ou à β, suivant que $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ou $< \frac{\pi}{2}$.

A et B désignant les demi-axes de cette hyperbole, on a

$$\frac{B^2}{A} = \frac{c^2}{\mu}, \quad \frac{A^2+B^2}{A^2} = \frac{ac^2}{\mu^2}+1,$$

d'où

$$A = \frac{\mu}{a}, \quad B = \frac{c}{\sqrt{a}},$$

et l'on pourrait la construire d'après ces formules ; mais il est préférable d'employer le théorème de Newton, par lequel on a $N = R\cos^2\varphi$, N étant la normale, R le rayon de courbure, et φ l'angle compris entre la normale et le rayon vecteur. Pour cela, on décompose la force répulsive $\frac{\mu}{\rho_0^2}$, qui répond à la position initiale M du mobile, et qui est dirigée suivant le prolongement de FM, en deux autres forces dirigées l'une suivant MV ou son prolongement MV′, et l'autre suivant la perpendiculaire KK′ à VV′ ; cette dernière composante, qui est représentée par $\frac{\mu}{\rho_0^2} \cdot \sin\alpha$, est égale à la force centripète correspondant à la position initiale, de sorte qu'on a

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{\mu}{\rho_0^2} \sin\alpha,$$

d'où

$$R = \frac{v_0^2 \rho_2^2}{\mu \sin\alpha},$$

R désignant maintenant le rayon de courbure relatif au point M; on prend, d'après cette équation, MC = R sur la partie de KK′ où tombe la composante $\frac{\mu}{\rho_0^2} \cdot \sin\alpha$, on mène CD perpendiculaire à FG, DN perpendiculaire à KK′, ce qui donne, en vertu du théorème précité, le pied N de la normale au point M; enfin FN est conséquemment la direction de l'axe focal, et la construction de l'hyperbole s'achève par des procédés qu'il est inutile de rappeler.

On tire des équations (1) et (2)

$$\pm dt = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2}},$$

et, en intégrant cette équation, on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\pm t = \frac{1}{a}\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2} \\ &+ \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log\left(\frac{\rho}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2}}{a} \right) - C, \end{aligned} \right.$$

C étant une constante.

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ρ augmente continuellement avec t; on doit donc prendre $+$ devant dt et t, et faire

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} &C = \frac{1}{a}\sqrt{a\rho_0^2 - 2\mu\rho_0 - c^2} \\ &+ \frac{\mu}{a\sqrt{a}}\cdot\log\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a\rho_0^2 - 2\mu\rho_0 - c^2}}{a}\right), \end{aligned}\right.$$

afin que $\rho = \rho_0$ donne $t = 0$.

Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, ρ diminue d'abord, puis ensuite augmente avec t, et son minimum, qui répond à $\omega = \beta$, est

$$\frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{\frac{ac^2}{\mu^2} + 1} - 1} = A + \sqrt{A^2 + B^2} = \rho_1;$$

on doit donc prendre premièrement le signe $-$ devant dt et t, ainsi que la valeur précédente de C; puis, lorsque ρ atteint ρ_1 et dépasse ce minimum, ce qui arrive quand

$$t = C - \frac{\mu}{a\sqrt{a}}\cdot\log\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}}\right) = t',$$

prendre $+$ devant dt et t, et faire

$$(\gamma')\qquad C = \frac{\mu}{a\sqrt{a}}\cdot\log\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}}\right) - t',$$

afin que $\rho = \rho_1$ donne $t = t'$.

Les équations (3) et (4) fournissent directement l'époque du passage du mobile en un point de l'hyperbole donné seulement par la valeur correspondante de ω. Si l'on voulait sa position à un instant donné, il faudrait résoudre l'équation (4) par rapport à ρ, mettre la valeur obtenue dans l'équation (3), puis la résoudre par rapport à ω.

La vitesse est toujours dirigée tangentiellement à l'hyperbole, et sa grandeur est donnée par l'équation (1) de laquelle on déduit

$$v = \sqrt{a - \frac{2\mu}{\rho}}.$$

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, elle augmente continuellement, tandis que si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, elle diminue d'abord jusqu'à $\sqrt{a - \frac{2\mu}{\rho_1}}$, et augmente ensuite; dans les deux cas elle tend à devenir uniforme et égale à $\sqrt{a}$. On peut remarquer que v ne dépend pas de α, de sorte que la vitesse aura la même grandeur à des distances égales de F, quel que soit cet angle. Il n'en est pas ainsi de t dont l'expression contient c qui dépend de α; c a bien la même valeur pour des angles (α) supplémentaires l'un de l'autre, mais la constante C doit recevoir la valeur (γ) pour un de ces angles, et la valeur (γ') pour l'autre quand on considère des rayons vecteurs égaux.

Si l'on suppose que le mouvement a commencé avant l'instant à partir duquel on compte le temps, on peut demander de le déterminer à une époque quelconque antérieure à celle-là. Il suffit pour cela de considérer des valeurs négatives de t et de ω; si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, on prendra $+$ devant dt et t, avec la valeur (γ) de C, jusqu'à $\rho = \rho_1$, qui répond à $\omega = -\beta$, et $t = -t'$, puis antérieurement on prendra $-$ devant dt et t, avec la valeur (γ') de C; et si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, on prendra toujours $-$ avec la valeur (γ'). On peut remarquer que des arcs de même longueur et symétriques par rapport à l'axe focal de l'hyperbole seront décrits par le mobile dans des temps égaux.

Enfin, si l'on avait $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 0$, la trajectoire serait évidemment la droite FM. Dans ces deux cas particuliers, on a

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = a - \frac{2\mu}{\rho},$$

d'où

$$\pm dt = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho}};$$

donc la formule (4) s'y applique en faisant $c = 0$, et la discussion en serait semblable à celle qui précède.

QUESTIONS.

I. *Déterminer le mouvement d'un point matériel repoussé par un centre fixe, en raison inverse du cube de la distance.*

II. *Déterminer le mouvement de deux points matériels qui se repoussent ou qui s'attirent, en raison directe de leurs masses et en raison inverse des carrés des distances; ces deux points ayant des vitesses initiales inversement proportionnelles à leurs masses, et dirigées en sens contraires, suivant deux droites parallèles entre elles.*

DE LA COURBE BALISTIQUE, PAR JACOBI (*);

TRADUIT DU LATIN, PAR M. A.,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Le grand géomètre Jean Bernoulli, dans les *Actes de Leipsick* pour l'année 1719, ramena aux quadratures le mouvement d'un point pesant dans un milieu résistant uniformément, chaque fois que la résistance est proportionnelle *à une puissance quelconque de la vitesse*. Provoqué à déterminer le mouvement pour une résistance

(*) Extrait d'un Mémoire sur le mouvement d'un point. (Crelle, t. XXIV, p. 25; 1842.)

proportionnelle au carré de la vitesse, il résolut aussitôt la question plus générale. L'illustre Legendre apprit à ramener le problème balistique aux quadratures, quand la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse plus une constante. Comme aucune de ces deux questions ne se trouve dans les Traités de Mécanique, j'examinerai en peu de mots le cas où la résistance du milieu est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse plus une constante. Cette supposition embrasse l'une et l'autre question.

Soit $a + bv^n$ la résistance, a et b désignant des constantes, les équations dynamiques deviennent

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = -(a + bv^n)\frac{x'}{v'},$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = -(a + bv^n)\frac{y'}{v} - g.$$

Il suit de là

$$(a + bv^n)(x'\,dy' - y'\,dx') = gv\,dx',$$

d'où, en posant

$$x' = v\cos\eta,\quad y' = v\sin\eta,$$

on tire

$$v(a + bv^n)\,d\eta = g\,dx' = g(\cos\eta\,dv - v\sin\eta\,d\eta),$$

ou

$$g.\cos\eta\;v^{-(n+1)}\,dv - (a + g\sin\eta)\,v^{-n}\,d\eta = b\,d\eta.$$

Supposons que la partie à gauche de l'équation qui précède, multipliée par un facteur convenable, devienne égale à la différentielle $d.\mathrm{M}v^{-n}$, on aura

$$\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{n(a + g\sin\eta)\,d\eta}{g\cos\eta},$$

d'où

$$(1)\qquad \mathrm{M} = \cos\eta^{-n}.\mathrm{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)^{\frac{na}{g}},$$

et le multiplicateur devient

$$-\frac{n\mathrm{M}}{g\cos\eta}.$$

De là, l'intégrale

$$(2)\qquad \mathrm{M}v^{-n} = -\frac{n}{g}\int\frac{b\mathrm{M}'d\eta}{\cos\eta}.$$

Cette formule continue à avoir lieu si b est une fonction quelconque de η; elle aura encore lieu en supposant a fonction de η, pourvu que dans l'expression (1) on change le second facteur M.

Posons

$$r = \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right),$$

d'où

$$\cos\eta = \frac{2r}{1+r^2},\quad \sin\eta = \frac{x^2-1}{1+r^2},\quad \frac{d\eta}{\cos\eta} = \frac{dr}{r}.$$

De là, en posant

$$\frac{a}{g} = c,$$

on tire

$$(3)\qquad \mathrm{M} = 2^{-n}r^{n(c-1)}(1+r^2)^n;$$

d'où

$$(4)\qquad 2^n\mathrm{M}v^{-n} = -\frac{nb}{g}\int r^{n(c-1)}(1+r^2)^n.\frac{dr}{r}.$$

Cette formule devient finie toutes les fois que n est un nombre entier positif. L'expression de v en r devient surtout très-simple si l'on suppose

$$\frac{a}{g} = c = \frac{n+2}{n};$$

car alors on a, par la formule qui précède,

$$r^2(1+r^2)^n v^{-n} = \frac{nb}{2(n+1)}(1+r^2)^{n+1} + \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire.

Ayant déterminé v en fonction de r, les formules générales donneront les expressions de x, y, t en fonction de la même quantité, au moyen des seules quadratures; car, w désignant la résistance, on a les équations

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{x'}{v}w,$$

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{y'}{v}w - g,$$

d'où

$$w(x'\,dy' - y'\,dx') = gv\,dx',$$

ou

$$(5) \qquad vw\,d\eta = g\,dx'.$$

Il suit de ces formules,

$$(6) \quad \begin{cases} dt = -\dfrac{v\,dx'}{x'w} = -\dfrac{v\,d\eta}{g\cos\eta} = -\dfrac{v\,dr}{gr}, \\ dx = x'\,dt = -\dfrac{v^2\,d\eta}{g} = -\dfrac{2v^2\,dr}{g(1+r^2)}, \\ dy = y'\,dt = -\dfrac{v^2\tan\!g\,\eta\,d\eta}{g} = -\dfrac{v^2(r^2-1)\,dr}{gr(1+r^2)}. \end{cases}$$

En substituant dans ces formules générales l'expression de la vitesse v en η ou en r, et intégrant, on obtient les valeurs de t, x, y. Si dans les formules (3) et (4) on pose $a = c = 0$, $n = 2$, on a les formules qu'on donne ordinairement.

La réduction aux quadratures réussit aussi lorsque la résistance est exprimée par la formule $a + b\log v$. Je ne poursuis pas plus loin cette hypothèse, parce qu'elle n'a pas lieu dans la nature et qu'elle est comprise dans les formules précédentes, en écrivant $a - \frac{b}{n}$ et $\frac{b}{n}$ au lieu de a et b, et posant ensuite $n = 0$.

Pour obtenir des approximations, Newton et les auteurs venus après lui mettaient, au lieu de la constante b, des fonctions de η ne variant pas beaucoup et donnant pour v, x, y, t des quadratures faciles. On en voit divers exemples dans le Mémoire de l'illustre Legendre; mais les méthodes d'approximation de ce genre paraissent trop vagues.

ENVELOPPE D'UNE TANGENTE A DEUX CERCLES VARIABLES;

PAR M. ED. TERRÉ,
Élève de M. Orcel, lycée Charlemagne.

PROBLÈME. *On donne deux cercles dont les centres sont fixes, et dont les rayons* U *et* V *doivent satisfaire à la relation*

$$mU + nV = p^2,$$

m, n, p représentant des lignes.

On demande l'enveloppe des tangentes communes à ces deux cercles.

Solution. Soient ces deux cercles U et V dans une position particulière (*). Soient TT′, tt' les tangentes communes à ces deux cercles. Soit $2d$ la distance des centres. Je prends pour axe des x la ligne des centres, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite élevée par le point O, milieu de la distance des centres.

L'équation de la droite TT′, dans une position particulière, est

$$y = ax + b;$$

on aura

$$U = \frac{ad - b}{\pm\sqrt{a^2 + 1}}, \qquad V = \frac{-ad - b}{\pm\sqrt{a^2 + 1}}.$$

(*) On est prié de faire la figure.

La relation

$$mU + nV = p^2$$

va me servir à déterminer b en fonction de a.

L'équation de la tangente TT′ peut se mettre sous la forme

$$y = ax + \varphi(a).$$

Si, alors, on fait croître a d'une manière insensible, on aura les équations successives des différentes tangentes qui, par leurs intersections, donneront le lieu cherché. La méthode générale consisterait à prendre la dérivée par rapport à a de l'équation

$$y = ax + \varphi(a),$$

et ensuite à éliminer a entre ces deux équations. Mais si l'on essaye le calcul, on verra facilement que l'équation finale serait du huitième degré. Il faut donc, pour arriver à un résultat simple, avoir recours à quelques artifices.

Je vais, à cet effet, déterminer d'abord l'enveloppe des tangentes extérieures TT′. Je reprends l'équation

$$y = ax + b,$$

en y supposant a positif.

Les valeurs de U et de V seront, dans ce cas,

$$U = \frac{ad - b}{\sqrt{a^2 + 1}}, \qquad V = \frac{-ad - b}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

ou bien

$$U = \frac{ad - b}{-\sqrt{a^2 + 1}}, \qquad V = \frac{-ad - b}{-\sqrt{a^2 + 1}}.$$

La relation

$$mU + nV = p^2$$

donne pour b, si l'on prend les premières valeurs de U et de V,

$$b = +\frac{m - n}{m + n} \cdot ad - \sqrt{\frac{p^4(a^2 + 1)}{(m + n)^2}},$$

les secondes valeurs de U et de V donnent

$$b = + \frac{m - n}{m - u} \cdot ad + \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m + n)^2}};$$

l'équation de la tangente devient

$$y = ax + \frac{m - n}{m + n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m + n)^2}}.$$

Si l'on cherche l'équation de la tangente intérieure tt', en supposant toujours a positif, on trouve

$$y = ax + \frac{m + n}{m - n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m - n)^2}};$$

si l'on suppose a négatif, les équations de ces tangentes sont

$$y = - ax - \frac{m - n}{m + n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m + n)^2}},$$

$$y = - ax - \frac{m + n}{m - n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m - n)^2}}.$$

Les équations générales des tangentes communes aux deux cercles sont donc

$$y = \pm ax \pm \frac{m - n}{m + n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m + n)^2}},$$

$$y = \pm ax \pm \frac{m + n}{m - n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m - n)^2}}.$$

Je dis maintenant que si l'on cherche l'enveloppe de l'une de ces droites, on aura une courbe du second degré.

La manière dont s'engendre le lieu fait voir évidemment que l'axe des x est un axe de symétrie.

Par conséquent, si cette enveloppe est une courbe du second degré, elle sera de la forme

$$y^2 + Cx^2 + 2Ex + F = 0;$$

or on sait que l'équation de la tangente à cette courbe est

$$(1)\quad y = \alpha x + \alpha \cdot \frac{E}{C} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 (E^2 - FC) + E^2C - C^2F}{C^2}}.$$

On voit, à l'inspection de cette équation, qu'on peut l'identifier avec une quelconque des droites précédemment trouvées. Donc le lieu se compose d'un système de courbes du second ordre.

L'équation (1) conduit au radical affecté du double signe $\pm$; ce qui indique que le lieu se composera de quatre courbes du second ordre.

Je vais démontrer maintenant que ces courbes du second degré sont des cercles. Je compare à cet effet l'équation (1) avec une des équations précédentes, avec l'équation suivante par exemple,

$$y = ax + \frac{m-n}{m+n} \cdot ad \mp \sqrt{\frac{p^4 (a^2 + 1)}{(m+n)^2}};$$

on aura les équations de condition,

$$\frac{E^2 - FC}{C^2} = \frac{p^4}{(m+n)^2}, \qquad \frac{E^2C - C^2F}{C^2} = \frac{p^4}{(m+n)^2},$$

d'où

$$\frac{E^2 - FC}{C^2} = \frac{E^2 - FC}{C},$$

ou enfin $C = 1$.

On obtient donc un cercle.

On a immédiatement

$$E = \frac{m-n}{m+n} \cdot d; \qquad F = \frac{(m-n)^2 d^2 - p^4}{(m+n)^2}.$$

L'équation du cercle est donc

$$y^2 + \left(x + d\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = \frac{p^4}{(m+n)^2}.$$

Par un calcul analogue, on trouvera pour équation des autres cercles :

$$y^2 + \left(x + d.\frac{m+n}{m-n}\right)^2 = \frac{p^4}{(m-n)^2},$$

$$y^2 + \left(x - d.\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = \frac{p^4}{(m+n)^2},$$

$$y^2 + \left(x - d.\frac{m+n}{m-n}\right)^2 = \frac{p^4}{(m-n)^2}.$$

Ces quatre cercles sont donc renfermés dans les deux équations suivantes :

$$y^2 + \left(x \pm \frac{m-n}{m+n}d\right)^2 = \frac{p^4}{(m+n)^2},$$

$$y^2 + \left(x \pm \frac{m+n}{m-n}d\right)^2 = \frac{p^4}{(m-n)^2};$$

on trouve donc en général quatre cercles placés symétriquement par rapport à l'origine, et égaux deux à deux.

Ce problème est susceptible de discussions.

Note. L'auteur donne ces discussions intéressantes, mais sans difficultés.

NOTE SUR LE PROBLÈME PRÉCÉDENT;

PAR E. C.

Si l'on partage la distance des centres en deux parties inversement proportionnelles à m, n; puis que, du point ainsi obtenu, on abaisse une perpendiculaire δ sur la tangente commune, on aura, par un théorème connu,

$$(m+n)\delta = m\mathrm{U} + n\mathrm{V};$$

donc

$$\delta = \frac{p^2}{m+n}.$$

La distance δ étant constante, il s'ensuit que le lieu cherché est une circonférence.

GÉNÉRATION MODULAIRE ET OMBILICALE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

1. Étant donnés : 1° un point fixe (foyer) ; 2° une droite fixe (directrice) ; 3° un plan fixe ou seulement donné de direction ; 4° un point de l'espace déterminé de telle sorte que la distance de ce point au foyer, divisée par la distance du même point à la directrice, distance mesurée parallèlement au plan, soit égale à un nombre donné. Le lieu de ce point peut devenir une surface quelconque du second degré, excepté les surfaces engendrées par la révolution d'une conique autour d'un axe focal.

C'est ce que les Anglais nomment la génération *modulaire ;* le nombre donné s'appelle *module.*

2. Il est évident que le plan passant par le foyer, perpendiculairement à la directrice, est un plan principal.

3. Si l'on prend, par rapport à ce plan principal, un plan symétrique au plan fixe, en prenant le plan symétrique pour plan directeur, on obtient la même surface.

4. Un plan parallèle au plan directeur coupe la surface suivant un cercle ou suivant une droite.

En effet, soient F le foyer, I le point où le plan parallèle rencontre la directrice ; M étant un point de la surface, le rapport $\frac{MF}{MI}$ est donné : le lieu du point M est donc ou sur une sphère, si ce rapport n'est pas égal à l'unité, ou sur un plan, si ce rapport est égal à l'unité ; donc, etc.

5. Conservant le même module et le même plan directeur, la même surface peut être engendrée par une infinité de foyers et de directrices ; tous ces foyers sont

sur une conique (la conique focale de M. Chasles) située dans le plan principal perpendiculaire à la directrice, et toutes les directrices sont sur un cylindre droit. Chaque directrice a pour polaire réciproque, par rapport à la surface, une tangente à la focale conique, et le point de contact est le foyer correspondant. La base du cylindre a été nommée *conique directrice modulaire*.

6. Dans l'hyperboloïde à une nappe et dans le paraboloïde hyperbolique, les deux coniques focales réelles (3) sont modulaires, pouvant servir à engendrer la surface; mais dans l'ellipsoïde, dans le paraboloïde elliptique et dans l'hyperbole à deux nappes, il n'y a qu'une des deux focales coniques qui soit *modulaire*: c'est celle qui ne rencontre pas. L'autre n'est pas *modulaire*, elle rencontre la surface aux *ombilics*; on la nomme *conique focale ombilicaire*.

7. Lorsque la même surface peut être engendrée par deux coniques focales, les modules ne sont pas les mêmes, ni les plans directeurs.

Soient m et n les deux modules, φ et φ' les angles correspondants que font les plans directeurs avec les plans principaux respectifs; on a la relation

$$\frac{\cos^2\varphi}{m^2}+\frac{\cos^2\varphi'}{n^2}=1.$$

8. Soit m le module, et faisons varier m^2 de ∞ à 0:

1°. $m=\infty$ à $m=1$; la surface est un hyperboloïde à une nappe, et le foyer est sur une ellipse focale;

2°. $m=1$; la surface est un paraboloïde hyperbolique et l'on a une parabole focale;

3°. De $m=1$ à $m=\cos\varphi$; jusqu'à une certaine valeur intermédiaire entre $m=1$ et $m=\cos\varphi$, la surface est un hyperboloïde à une nappe, mais ayant une position différente de celle qu'il a pour de $m=\infty$ à $m=1$; les axes directifs réels et imaginaires échangent leurs positions respectives, et la parabole focale devient une hyperbole. Lorsque m atteint cette valeur intermédiaire, la surface devient un cône, et l'hyperbole focale se change en deux droites; depuis cette valeur intermédiaire jusqu'à $m = \cos\varphi$, on a un hyperboloïde à deux nappes et la focale devient une hyperbole, mais dans une position *conjuguée* à la première; pour $m = \cos\varphi$, la surface devient un paraboloïde elliptique et la focale une parabole, et de $m = \cos\varphi$ à $m = 0$, la surface devient et reste un ellipsoïde et la focale une ellipse.

Génération ombilicale.

9. On donne 1° un point fixe (foyer); 2° deux plans fixes; 3° un nombre fixe. On cherche un point dans l'espace tel, que le carré de sa distance au foyer, divisé par le produit de ses deux distances aux plans fixes, soit égal au nombre fixe; le lieu de ce point est une surface du second ordre.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Leçons sur les applications pratiques de la géométrie et de la trigonométrie; par MM. *J.-A. Serret* et *Ch. Bourgeois*; ouvrage servant de complément au Traité de Trigonométrie de M. *J.-A. Serret*, examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique, et renfermant les matières exigées pour l'admission à cette École, d'après le Programme arrêté par la Commission nommée en exécution de la loi du 5 juin 1850, et approuvé par M. le Ministre de la Guerre. Paris, 1851; in-8° de 82 pages, avec planches. Prix, 2 francs; chez Bachelier, libraire.

Toute pratique renferme trois parties : 1° la description des instruments; 2° l'emploi de ces instruments; 3° la théorie des procédés. Lors même que la construction des instruments est détaillée avec beaucoup de clarté, texte et dessin, et c'est le cas du présent ouvrage, il y aura toujours des difficultés de compréhension pour ceux qui manquent d'habitude. Prenons pour exemple *l'équerre d'arpenteur,* instrument très-simple et bien décrit (p. 14). Les élèves en auront-ils une idée bien nette? C'est douteux. Il n'y a pas même lieu au doute pour des descriptions plus compliquées, celles du cercle répétiteur, de la stadia, etc. Il semble qu'on aurait même pu se dispenser, dans un ouvrage si élémentaire, d'insister tant sur les *règles* de Clerc (page 27). Nous engageons donc les élèves d'abord à *voir* et à *manier* les instruments; ensuite ils liront ces *six Leçons* non-seulement avec une extrême facilité, mais encore avec plaisir. Du reste, comme c'est le premier ouvrage de ce genre publié à l'approche des examens, il y a nécessairement quelques légères traces de hâte dans l'exécution. Les développements ne sont peut-être pas convenablement gradués sous le point de vue pédagogique. Il y aurait même à examiner s'il ne serait pas avantageux de mêler la pratique avec la théorie à l'instar de Bezout, qui reste toujours un modèle, non encore égalé, de bon sens, de clarté et de rédaction. N'oublions pas que nos élèves doivent sortir des colléges munis d'un grand fonds de théorie avec quelques notions de pratique, et ensuite sortir des écoles d'application avec beaucoup de pratique et quelques notions de théorie; distinction que le *Programme* a constamment oubliée. Il est à regretter aussi que ce Programme n'ait pas admis la théorie des transversales, si utile dans la géométrie pratique, comme l'ont fait voir deux géomètres éminents, Servois que nous avons perdu, et M. Brianchon que nous avons le bonheur de posséder encore.

Nous avons en France un savant qui s'est illustré par les progrès qu'il a fait faire à la *nouvelle géométrie*; un autre savant est parvenu subitement à une haute réputation presque populaire, en réduisant en nombre, en temps opportun, avec un bonheur inouï, des formules de la *Mécanique rationnelle*. Ces deux savants ayant à réglementer l'enseignement mathématique en ont retranché, quoi? *la nouvelle géométrie et la mécanique rationnelle*. Ces étranges anomalies me rappellent un ouvrage de morale intitulé *Bechinot Olam* (*), et cet ouvrage débute ainsi : « *On ne peut sonder ni les abîmes de la mer, ni* » *la profondeur des cieux; plus impénétrables sont en-* » *core les replis du cœur humain.* »

Observations sur la résolution des équations du troisième degré par les formules de Tartalea, sur le cas irréductible, sur le problème de la trisection de l'angle et de la duplication du cube; par un *mathématicien*. Quimper, 1850; in-8° de 16 pages.

L'auteur *montre*, par des exemples, que si l'équation du troisième degré a une racine de la forme $a + \sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, les quantités contenues sous le radical, dans les formules ordinaires, deviennent des carrés parfaits; il *montre*, mais ne *démontre* pas que cela doit être ainsi. Courtois, professeur au collége Stanislas, dont la perte récente est si regrettable, s'est occupé de cette question qu'il a probablement résolue (**). Parlant de la trisection de l'angle, le *mathématicien* croit qu'on peut faire cette opération par la géo-

(*) *Appréciation du monde*, traduite de l'hébreu en français, par *Michel Berr*.

(**) Voir *Nouvelles Annales*, t. II, p. 50; Courtois est mort en 1849.

métrie élémentaire. Wantzel en a démontré l'impossibilité. M. Sturm a rendu cette démonstration plus rigoureuse et plus simple, à ce qu'on dit.

Études sur la trigonométrie sphérique, suivies de nouvelles Tables trigonométriques, donnant la valeur des angles horaires du cadran solaire dans toutes les positions, la série des heures du lever et du coucher du soleil pour toutes les latitudes, et la solution abrégée de beaucoup d'autres problèmes d'astronomie, de géographie et de navigation; par M. *Alphonse Heegemann*, membre de la Société nationale des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille. Lille, 1851; in-8° de 192 pages, une planche. (Extrait des *Mémoires de cette Société*, année 1849.)

Ces Études sont terminées par deux Tables A et B, et c'est par là que nous commençons, car tout l'ouvrage est dans cette fin. La Table A est à double entrée et représente l'équation indéterminée à trois variables

$$\sin x \sin y = \sin z;$$

l'arc x qu'on suppose plus grand que y est à l'entrée supérieure ou horizontale, les arcs se succèdent de $30'$ en $30'$, depuis $0^\circ 30'$ jusqu'à 90°; et l'arc le moins élevé occupe l'échelle latérale ou verticale, et ces arcs se succèdent aussi de $30'$ en $30'$. Supposons, par exemple, $x = 69^\circ$, $y = 25^\circ 30'$; prenant dans la colonne horizontale 69°, et dans la colonne verticale $24^\circ 30'$, on lit dans l'intérieur de la Table $22^\circ 466$ à l'endroit où les deux lignes, partant de ces deux points trouvés, se croisent; ainsi l'on a

$$z = 22^\circ 46' 36''.$$

Le degré étant supposé divisé en six cents parties ou dixièmes de minute, il faut multiplier le troisième chiffre décimal 6 par 6 pour avoir les secondes. Cette même Table, qui donne les produits des deux sinus, donne aussi évidemment les quotients, et, par conséquent aussi, les produits d'un nombre quelconque de sinus divisés par un produit semblable; le tout à vue et sans recourir aux Tables de logarithmes; mais dans ce cas la méthode perd son avantage.

La Table B représente l'équation indéterminée

$$\sin x \operatorname{tang} y = \operatorname{tang} z.$$

Sa construction est analogue à celle de la Table A; il est presque inutile de dire que les Tables s'appliquent aussi à des cosinus et à des cotangentes. Les nombres intermédiaires s'obtiennent à l'aide d'une méthode d'interpolation fondée sur le théorème de Taylor appliqué à une fonction à deux variables; ce qui nécessite deux ordres de différences, inconvénient assez majeur, les unes prises dans les lignes horizontales et les autres dans les colonnes verticales. Ces différences se rapportent à 15′ de différence; une Table spéciale donne les parties proportionnelles. Ces Tables occupent soixante-quatre pages. Les deux équations fondamentales résolvent directement les dix-huit problèmes qu'on peut proposer sur le triangle sphérique rectangle, avec un suffisant degré d'exactitude qui dépend aussi de l'exactitude des Tables qui, à ce que je sache, n'est pas encore constatée. Les triangles obliquangles se décomposant en deux triangles rectangles, on peut encore avoir recours aux Tables. L'auteur les a calculées en grande partie jusqu'aux secondes de degré. Des vues d'économie et des difficultés typographiques ont fait renoncer à la publication de ces grandes Tables; projet dont l'exécution serait assez utile. Un grand nombre de problèmes de trigonométrie, d'astronomie, de navigation, de gnomonique, se résoudraient pour ainsi dire à vue, sans calculs, sans logarithmes. Telles qu'elles sont, les Tables sont suffisantes pour les marins dans les calculs des levers, des amplitudes, etc., et, en général, dans tous les calculs approchés à moins d'une minute de temps près. L'ouvrage contient un grand nombre d'applications à l'astronomie nautique, etc.; l'auteur approprie à ses Tables les formules pour calculer les parallaxes, la réfraction, etc. C'est ce qui recommande principalement cet ouvrage aux professeurs d'hydrographie. On aurait peut-être pu se dispenser d'établir de nouveau les formules des deux trigonométries; elles nous semblaient suffisamment connues et bien établies.

Grandzuge der algebraischen Analysis, etc. Principes de l'analyse algébrique; par le Dr *J. Dienger*, professeur de mathématiques à l'École Polytechnique de Carlsrushe. — Carlsrushe, 1851; 1-8, XIV-216.

Le savant auteur, connu par des travaux de haute analyse, a rédigé cet ouvrage élémentaire pour la *seconde classe* de l'École Polytechnique badoise. L'ouvrage contient *deux divisions*. La première est consacrée aux *fonctions*, aux séries et au calcul aux *différences*. La huitième section, consacrée à la série binomiale, donne la somme de la série infinie $1 + mx + \frac{m(m-1)^2}{2}x^2 + \ldots$ pour x réel ou imaginaire; dans la quatorzième section, on démontre, d'après M. Cauchy, que $f(x+1) - fx$ et $\frac{fx}{x}$ atteignent la même limite pour x croissant indéfiniment; de même les deux expressions $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ et $f(x)^{\frac{1}{x}}$. La deuxième division traite des équations; résolution des équations du troisième et quatrième degré, d'après Euler; existence des racines, d'après M. Cauchy; communs diviseurs de deux polynômes; théorème complet de Sturm; méthode de Lagrange (fractions continues); recherches des racines réelles, d'après Horner (*); méthode de Newton. Un appendice contient les formules $\sin(a+bi)$, $\cos(a+bi)$, etc.; sommation de la série

$$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots,$$

x étant imaginaire; démonstration des formules de Cramer; méthode d'approximation de Fourier.

Les élèves sortant de la classe élémentaire de M. Dienger auront une instruction mathématique plus complète, plus solide que les élèves sortant de notre École Polytechnique, telle qu'on l'a faite, ou mieux, telle qu'on l'a défaite.

SOLUTION DE LA QUESTION 233

(voir t. IX, p. 182);

PAR M. ROUCHÉ,
Élève en spéciales du lycée de Montpellier.

T étant l'aire d'un triangle rectiligne, r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit, a, b, c les trois côtés, on a les équations

$$a+b+c=2p,\quad pr=T,$$
$$p(p-a)(p-b)(p-c)=T^2,\quad abc=4RT.$$

En combinant les deux premières, et développant la troi-

(*) La méthode dite de Horner est dans les *Transactions philosophiques*, 1819. Nous ne voyons pas en quoi elle diffère de la méthode Fourier-Budan.

sième, on obtient le système

$$\sum a = \frac{2T}{r}, \quad \sum ab = \frac{T^2}{r^2} + 4Rr + r^2, \quad abc = 4RT,$$

qui, par le changement de a, b, c, en $2(p-a)$, $2(p-b)$, $2(p-c)$, donne à son tour

$$\sum 2(p-a) = \frac{2T}{r}, \sum 2(p-a)\ 2(p-b) = 4r(4R+r),$$

$$2(p-a).2(p-b).2(p-c) = 8rT.$$

Les côtés a, b, c sont donc racines de l'équation

$$(1) \qquad z^3 - \frac{2T}{r}z^2 + \left(\frac{T^2}{r^2} + 4Rr + r^2\right)z - 4RT = 0;$$

et les quantités $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, sont racines de celle-ci :

$$(2) \qquad u^3 - 2\frac{T}{r}u^2 + 4r(4R+r)u - 8rT = 0.$$

En appliquant le théorème de M. Sturm à l'équation générale

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

on trouve, pour la réalité des racines, la relation unique

$$-4A^3C + A^2B^2 + 18ABC - 4B^3 - 27C^2 > 0 \text{ (*)}.$$

Cette condition, relativement aux équations particulières (1) et (2), fournit le même résultat

$$T^4 - 2r^2(2R^2 + 10Rr - r^2)T^2 + r^3(4R+r)^3 < 0.$$

Le premier membre est un trinôme du second degré en T^2; pour qu'il soit négatif, il faut que l'équation obtenue en l'égalant à zéro ait ses racines réelles, et que T^2 soit compris entre les deux racines.

(*) *Nouvelles Annales*, t. III, p. 161; Note de M. Tarnier.

Ces deux racines ont pour expression

$$r^2\left[2R^2 + 10Rr - r^2 \pm 2\sqrt{R(R-2r)^3}\right],$$

et comme elles sont positives en même temps que réelles, les conditions précédentes deviennent

$$R > 2r,$$

et

$$r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)^3}} > T,$$
$$T > r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3}}.$$

Lorsque $R > 2r$ et que T est égal à une de ces limites, l'équation (1) a deux racines égales, et le triangle est isocèle.

Si $R = 2r$, les deux limites se confondent, T devient égal à cette limite $3r^2\sqrt{3}$; l'équation (1) prend la forme

$$z^3 - 6\sqrt{3}rz^2 + 36r^2z - 24\sqrt{3}r^3 = 0;$$

elle a ses trois racines égales, et le triangle est équilatéral.

On parviendrait aux mêmes conditions de réalité en faisant évanouir les seconds termes des équations (1) et (2), et appliquant ensuite le caractère $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Note. Cet élève fait la judicieuse remarque que la question 230 est un corollaire de la question 232.

THÉORÈMES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

1. *Soit une équation algébrique entière de degré* n,

$$P = Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0 = f(x),$$

α étant une quantité quelconque; on aura les identités

$$\begin{aligned}
P &= P_1\ (x-\alpha) + f(\alpha),\\
P_1 &= P_2\ (x-\alpha) + f'(\alpha),\\
P_2 &= P_3\ (x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!},\\
P_3 &= P_4\ (x-\alpha) + \frac{f'''(\alpha)}{3!},\\
&\vdots\\
P_m &= P_{m+1}(x-\alpha) + \frac{f^m(\alpha)}{m!},\\
&\vdots\\
P_{n-1} &= P_n\ (x-\alpha) + \frac{f^{n-1}(\alpha)}{(n-1)!},\\
P_n &= \frac{f^n(\alpha)}{n!} = A.
\end{aligned}$$

P_1, P_2, P_3,... *sont les parties entières des quotients* $\frac{P}{x-\alpha}$, $\frac{P_1}{x-\alpha}$, $\frac{P_2}{x-\alpha}$, *etc.* (*).

Corollaire.

$$P = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''\alpha$$
$$+\frac{(x-\alpha)^3}{3!}f'''(\alpha) + \ldots + (x-\alpha)^{n-1}\frac{f^{n-1}(\alpha)}{(n-1)!} + (x-\alpha)^n A$$
$$= f[\alpha + (x-\alpha)] = f(x);$$

résultat évident d'après le théorème de Taylor.

2. *Soient* $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, *deux équations algébriques entières; si le déterminant*

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}$$

est identiquement nul, les deux équations sont ou incompatibles ou rentrent l'une dans l'autre.

(*) On n'insérera pas de démonstration de ce théorème.

QUESTIONS.

238. Quand une suite d'ellipsoïdes est inscrite dans un cône de révolution suivant la même courbe de contact, on a, entre leurs demi-axes, a, b, c, la relation suivante :

$$\frac{b^3}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} = \text{constante.}$$

(Michael Roberts.)

239. Démontrer la formule suivante :

$$\frac{1}{4}\pi e^{-a^2} - \frac{1}{2}\pi e^{-a^2}\int_0^a \frac{e^{\frac{-x^4+a^2x^2}{x^2-y^2}}dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= \int_a^x \frac{e^{-x^2}x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \int_0^a \frac{e^{-y^2}\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$- \int_a^x \frac{e^{-x^2}\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \int_0^a \frac{e^{-y^2}y^2\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

(Strebor.)

240. La position d'équilibre d'un corps surnageant n'a lieu que lorsque la distance du centre de gravité du liquide déplacé au centre de gravité du corps est un maximum ou un minimum, ou bien encore lorsque le centre commun de gravité du corps et du fluide déplacé est à sa plus haute ou plus basse position. [Clausen (Th.), astronome de l'observatoire d'Altona.]

241. Soit

$$T_{n+2} = a\,T_{n+1} - b\,T_n,$$

équation caractéristique d'une série récurrente ; on a

$$\frac{T_{n+1}^2 - a\,T_n\,T_{n+1} + b\,T_n^2}{b^n} = \text{constante.}$$

(EULER.)

242. Soit

$$T_{n+2} = 2\,T_{n+1} + T_n,$$

équation d'une série récurrente. Les deux premiers termes étant 1 et 3, aucun terme n'est un carré, à l'exception de 1.

243. Soit l'équation

$$(x - a_1)(x - a_4)(x - a_5)(x - a_8)(x - a_9)\ldots(x - a_{4n})$$
$$+ b^m (x - a_2)(x - a_3)(x - a_6)(x - a_7)\ldots(x - a_{4n-1}) = 0;$$

les indices augmentent successivement d'une unité et de trois unités ; les différences $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, ..., $a_{4n-1} - a_{4n}$ sont positives ; b est un nombre positif ; m un nombre entier positif ; les $2n$ racines sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, ..., a_{4n-1} et a_{4n}. (RICHELOT.)

244. Dans un produit de n facteurs monômes, on ne peut changer que $2^{n-1} - 1$ fois les signes des facteurs, soit en totalité, soit en partie, sans changer le signe du produit.

245. Soit

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n;$$

supposons que x_1, x_2, ..., x_n puissent prendre respectivement m_1, m_2, ..., m_n valeurs différentes ; alors z aura au plus $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$ valeurs différentes ; mais il peut en avoir moins. Dans quel cas ?

246. Résoudre l'équation

$$u^6 - 6u^4 + au^3 + 9u^2 - 3au + f = 0.$$

247. Résoudre l'équation

$$3^x = 54x - 135 \text{ (*)}.$$

248. $4mn - m - 1$ ne peut jamais être un carré, soit entier, soit fractionnaire. (GOLDBACH.)

(*) Les équations de cette forme ont toujours deux racines réelles. (D. BERNOULLI.)

EXERCICE NUMÉRIQUE SUR LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ; LOGARITHMES DE GAUSS.

Soient les quatre équations:

$$124944,66 = 0,0382025\alpha - 0,00655533\beta - 0,0718334\gamma + 0,0565703\delta,$$
$$152292,21 = 0,0465752\alpha - 0,00407850\beta - 0,0915866\gamma + 0,0362259\delta,$$
$$168846,94 = 0,0517211\alpha + 0,00054720\beta - 0,1032346\gamma - 0,0049063\delta,$$
$$105498,00 = 0,0323338\alpha + 0,003054795\beta - 0,0634685\gamma - 0,0271300\delta;$$

d'où

$$3270589 = \alpha - 0,171594\beta - 1,880334\gamma + 1,480800\delta,$$
$$3269812 = \alpha - 0,087568\beta - 1,966467\gamma + 0,777743\delta,$$
$$3264566 = \alpha + 0,010580\beta - 1,995987\gamma - 0,094861\delta,$$
$$3262771 = \alpha + 0,094481\beta - 1,962910\gamma - 0,839084\delta;$$

$$777 = -0,084026\beta + 0,086133\gamma + 0,703007\delta,$$
$$6023 = -0,182174\beta + 0,115653\gamma + 1,575661\delta,$$
$$78018 = -0,266075\beta + 0,082576\gamma + 2,319884\delta;$$

$$9247,1 = -\beta + 1,022717\gamma + 8,36654\delta,$$
$$33061,8 = -\beta + 0,634849\gamma + 8,64924\delta,$$
$$29382,7 = -\beta + 0,310349\gamma + 8,71905\delta;$$

$$23814,7 = -0,387868\gamma + 0,28270\delta,$$
$$3679,1 = +0,324501\gamma - 0,06984\delta;$$

$$61399 = -\gamma + 0,728856\delta,$$
$$11338 = +\gamma - 0,215131\delta;$$

$$72737 = +0,513725\delta;$$

$$\delta = 141587,4,\quad \gamma = 41798,\quad \beta = 1218098,\quad \alpha = 3348538.$$

(Extrait de l'ouvrage : *Base du système métrique décimal, etc.;* tome III, page 93. 1810.)

C'est surtout ce genre de calcul que les logarithmes de Gauss abrégent considérablement.

Prenons pour exemple les deux équations

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c';$$

on en tire successivement

$$x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a},$$
$$x + \frac{b'}{a'}y = \frac{c'}{a'},$$
$$y\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right) = \frac{c}{a} - \frac{c'}{a'},$$
$$y = \frac{\frac{c}{a} - \frac{c'}{a'}}{\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}}.$$

Employant les logarithmes, il faut chercher les six logarithmes $\log a$, $\log b$, $\log c$, $\log a'$, $\log b'$, $\log c'$; de là on déduit

$$\log\frac{b}{a},\quad \log\frac{c}{a},\quad \log\frac{b'}{a'},\quad \log\frac{c'}{a'},$$

ensuite revenir de ces quatre logarithmes aux nombres; substituer ces nombres dans la valeur de y, et prendre de nouveau le logarithme du numérateur et celui du dénominateur : c'est la marche ordinaire; tandis que par les Tables de Gauss, il n'est pas nécessaire de revenir des logarithmes aux nombres, et de connaître les valeurs effectives de $\frac{c}{a}$ et de $\frac{c'}{a'}$, car, comme on connaît leurs logarithmes, ces Tables donnent le logarithme de la différence $\frac{c}{a} - \frac{c'}{a'}$, et de même le logarithme de $\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}$. Voici le procédé général : prenons trois équations à trois inconnues ; on remplace chaque coefficient par son logarithme, et l'on écrit ces équations de cette manière :

$$x \log a + y \log b + z \log c = \log d,$$
$$x \log a' + y \log b' + z \log c' = \log d',$$
$$x \log a'' + y \log b'' + z \log c'' = \log d''.$$

Il est presque inutile d'avertir que ces équations et les suivantes n'existent pas entre les logarithmes, mais entre les nombres correspondants.

De là, on tire

$$x + y \log B + z \log C = \log D,$$
$$x + y \log B' + z \log C' = \log D',$$
$$x + y \log B'' + z \log C'' = \log D'',$$

où

$$\log B = \log b - \log a, \quad \log C = \log c - \log a, \ldots;$$

et ensuite, par soustraction,

$$y \log \beta + z \log \gamma = \log \delta,$$
$$y \log \beta' + z \log \gamma' = \log \delta',$$

où

$$\log \beta = \log (B - B'), \quad \log \gamma = \log (C - C'), \ldots,$$

et l'on trouve $\log \beta$, $\log \gamma$, etc., par les Tables de Gauss ; n'ayant plus que deux équations à deux inconnues, on continue à opérer comme ci-dessus. Toute l'opération se réduit donc à prendre les logarithmes des coefficients et à faire ensuite un certain nombre de soustractions.

Cette méthode serait particulièrement utile aux élèves (*) assujettis à chercher *quarante* logarithmes et autant de *nombres correspondants ;* et à calculer *vingt* logarithmes.

(*) Matière taillable et corvéable à merci.

INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\int \frac{y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1}};$$

PAR M. TH. CLAUSEN.

(Nouvelles astronomiques de Schumacher, n° 442; t. XIX, p. 178; 1842.)

Posons

$$z = \frac{y-1}{\sqrt{y^3-1}}, \quad z' = \sqrt{y^3-1}, \quad z'' = \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$dz = -\frac{y^3-3y^2+2}{2(y^3-1)^{\frac{3}{2}}}dy, \quad dz' = \frac{3}{2}\frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$dz'' = \frac{1}{2}\frac{y^4+2y^3-3y^2-4y+4}{(y^3-1)^{\frac{3}{2}}}dy,$$

$$\frac{dz}{1-3z^2} = -\frac{1}{2}\frac{y^2-2y-2}{y^2-2y+4}\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$\frac{dz'}{z'^2+9} = \frac{3}{2}\frac{y^2}{y^3+8}\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$\frac{dz''}{z''^2+9} = \frac{1}{2}\frac{y-1}{y+2}\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}};$$

d'où

$$\frac{dz}{1-3z^2} + \frac{dz'}{z'^2+9} + \frac{dz''}{z''^2+9} = \frac{6y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1})}.$$

Donc

$$\int \frac{y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1}} = \frac{1}{12\sqrt{3}}\log\left(\frac{1+z\sqrt{3}}{1-z\sqrt{3}}\right)$$

$$+\frac{1}{18}\text{arc tang}\,\frac{1}{3}z' + \frac{1}{18}z'\,\text{arc tang}\,\frac{1}{3}z''$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{y^2+y+1}+\sqrt{y-1}.\sqrt{3}}{\sqrt{y^2+y+1}-\sqrt{y-1}.\sqrt{3}}\right)$$

$$+\frac{1}{18}\text{arc tang}\left[\frac{3y(y-1)}{(4-y)\sqrt{y^3-1}}\right].$$

Observation. Legendre trouve cette intégrale par un moyen très-compliqué et la vérifie par une méthode plus courte. (*Traité des Fonctions elliptiques*, chapitre XXVI, n° 138.)

QUESTIONS DE TRIGONOMÉTRIE;

D'APRÈS M. GAUSS (*).

Soient

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 P}{1 - e^2},$$

$$\alpha \sin Q = \sin P,$$

$$A = \frac{a \cos P}{\alpha \cos Q \sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}},$$

$$K = \frac{\tang^\alpha \left(45^\circ + \frac{1}{2} P\right)}{\tang \left(45^\circ + \frac{1}{2} Q\right)} \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e};$$

faisant

$$\sin \varphi = e,$$

$$\tang \zeta = \tang \varphi \cos^2 P,$$

$$\tang \eta = \sin \zeta \tang P,$$

$$\sin \theta = e \sin P,$$

(*) *Untersuchungen uber gegenstande der hohern geodesic :* Recherches sur des objets de la géodésie supérieure. Gottingue, 1844; in-4° de 45 pages. (Extrait du second tome des *Mémoires de l'Académie de Gottingue*.) L'illustre auteur promet une suite de Mémoires sur le même sujet; un second Mémoire a paru en 1847.

on aura

$$\alpha = \frac{1}{\cos\zeta},$$
$$\sin Q = \cos\zeta \sin P,$$
$$\cos\eta \cos Q = \cos P,$$
$$\sin\eta = \operatorname{tang}\zeta \operatorname{tang} Q,$$
$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(P - Q) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\zeta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta,$$
$$\sin(2\zeta - \varphi) = e \cos 2Q,$$
$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos\eta \cos\theta,$$
$$A = \frac{a\cos\varphi}{1 - e^2 \sin^2 P},$$
$$K = \frac{\operatorname{tang}^{\alpha}\left(45^\circ + \frac{1}{2}P\right)}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}Q\right)\operatorname{tang}^{\alpha e}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\theta\right)}.$$

Calcul numérique.

$$\text{données}\left\{\begin{array}{r} \log a = 6{,}5148235337 \\ \log e = 8{,}9122052097 \\ Q = 52^\circ 40' 0'' \end{array}\right\} \text{logarithmes hyperboliques;}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi &= 4^\circ 41' \;9'',98262, \\ P &= 52^\circ 42' \;2'',53251, \\ \zeta &= 1^\circ 43' 26'',80402, \\ \eta &= 2^\circ 15' 42'',34083, \\ \log\alpha &= 0{,}0001966553, \\ \theta &= 3^\circ 43' 34'',24669, \\ \log A &= 6{,}5152074703, \\ \log\frac{1}{K} &= 0{,}0016708804. \end{aligned}$$

Observation. $52^\circ 40'$ est environ la latitude du parallèle moyen qui traverse le royaume de Hanovre, dont la carte a été levée par l'illustre directeur de l'observatoire de Gottingue.

EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

1. $x^3 - 18x^2 + 2x - 7 = 0$, $x = 17,91015$.
2. $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 48x - 32 = 0$, $x = 2,48906685$.
3. $x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0$, $x = 1,23772905$.
4. $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$, $x = 0,236$ (il y a deux racines différant peu de $0,23$).
5. $x^4 + 9x^2 - 6x + 5 = 0$, $x = 0,357401208 \pm 0,656331949\sqrt{-1}$.
6. $x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 = 0$, $x = 7,029548815 \pm 1,555451499\sqrt{-1}$.
7. $x^4 - 4,1x^3 + 14,2x^2 - 20,1x + 26 = 0$, $x = 0,7183 \pm 1,9288\sqrt{-1}$.
8. $x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 = 0$, $x = 1 \pm 2,7578\sqrt{-1}$.
9. $x^6 + x + 1 = 0$, x est compris entre $-0,7 \pm 0,03\sqrt{-1}$ et $-0,8 + 0,3\sqrt{-1}$.

1°. *Équations à deux inconnues.*

10. $\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 = 0, & x = 2, \quad x = 5,43637043, \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98 = 0, & y = 3, \quad y = -0,85308876. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 4xy - y^3 = 0, & x = 0,773571776, \\ x^2 + y^2x - y^2 = 0, & y = 1,625681024. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 300, & x = 2,4223817, \\ x^3 + y^3 = 80, & y = 4,0368598. \end{cases}$

2°. *Équations transcendantes.*

13. $x^x = 10$, $x = 2,506184$.
14. $4^x + 5^x = 10$, $x = 1,0697432$.
15. $e^x = 2x + 5$, $x = 2,25163$, $x = 2,892 + 7,210\sqrt{-1}$.

3°. *A deux inconnues.*

16. $\begin{cases} x^y = 5, & x = 2,5416, \\ y^x = 4, & y = 1,7253. \end{cases}$

4°. *Racines exprimées en produits infinis.*

17. $x^3 - 18x^2 + 2x - 7 = 0$, $x = 17.1{,}05.1{,}003.1{,}0003\ldots$,

18. $x^3 + 9x^2 - 6x + 5 = 0$, $x = (0{,}35 + 0{,}65\sqrt{-1}).1{,}01$
$\times(1{,}002 - 0{,}004\sqrt{-1})$
$\times(1{,}0002 - 0{,}0007\sqrt{-1})$.

19. $\left\{\begin{array}{l} x^4 + y^4 = 300 \\ x^3 + y^3 = 80 \end{array}\right\}$, $x = 2{,}4.1{,}008.1{,}001\ldots$, $y = 4.1{,}009\ldots$

Ces exemples sont tirés de l'ouvrage : *Allgemeine auf losang der zahlen-gleichungen mit einer oder mehreren unbekannten :* Solution générale des équations numériques à une inconnue et à plusieurs inconnues; par *Simon Spitzer*, professeur suppléant à l'Institut polytechnique de Vienne. Vienne, 1851 ; in-folio de 73 pages.

L'auteur donne à chaque racine la forme générale

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \left(b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_1}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots\right)\sqrt{-1};$$

a_0 et b_0 sont des nombres entiers quelconques, zéro compris; a_1, a_2,..., b_1, b_2,... sont des nombres entiers qui ne peuvent dépasser 9; les quantités b sont nulles pour les racines réelles. Après avoir trouvé $a_0 + \frac{a_1}{10}$, on diminue toutes les racines de cette quantité, par le procédé Budan; la nouvelle équation a une racine moindre que $\frac{1}{10}$, et, par approximation, on trouve $\frac{a_2}{100}$. On diminue alors toutes les racines de la dernière équation de $\frac{a_2}{100}$, on obtient une équation qui a une racine moindre qu'un centième, et, par approximation, on trouve a_3; et ainsi de suite. La même marche, mais plus compliquée, pour les racines imaginaires et pour les équations à plusieurs inconnues. On ne peut connaître le degré d'exactitude, point essentiel dans les méthodes approximatives; du reste, dans la pratique, la substitution directe fournit toujours un moyen de vérification. Nous reviendrons sur cet ouvrage.

EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE. PARIS, 1851.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Trigonométrie.—Usage des Tables. Ancienne division.

Deuxième question (plus difficile). *Les lignes* a, b, c *sont des côtés du périmètre d'une coupe de bois que l'on vient d'asseoir. En calculant la surface de cette coupe, on la trouve trop grande de* $1^{\text{hect.}},75$. *On veut opérer le retranchement de cet excédant au moyen d'une parallèle au côté* a.

Déterminer sur le côté b *la distance* AC *à laquelle doit être menée cette parallèle.*

Dans la figure jointe au texte, le côté b (ligne CA) fait avec le côté a (AB) un angle de $63^\circ 27'$, et le côté a (AB) fait avec le côté suivant c un angle de $79^\circ 17'$. On ne donne pas la valeur numérique de a. Comment alors faire usage des Tables? Si l'on ne voulait qu'une solution géométrique, d'ailleurs nullement difficile, à quoi bon les données numériques?

On ne saurait donner trop d'attention aux questions qui décident de la carrière et souvent du sort des jeunes gens. En toute justice, cette composition doit être considérée comme non avenue, et le résultat être annulé.

LOGARITHMES AVEC 27 DÉCIMALES DU MODULE;

PAR M. PH. KORALEK,
Professeur.

On a souvent besoin de connaître, avec une grande exactitude, le logarithme du module.

Désignant ce nombre par M, on a, comme on sait,

$$M = 0{,}43429\,44819\,03251\,82765\,11289\,189166;$$

appliquant à ce nombre ma méthode de calcul, je trouve

$$\text{log tabulaire de } M = 0{,}63778\,43113\,00536\,78912\,2955917 - 1,$$
$$\text{log népérien de } M = 0{,}16596\,75547\,52044\,20019\,67602\,85 - 1.$$

(*Voir* p. 394.)

On ne sache pas qu'on ait calculé ces logarithmes avec plus de 10 décimales.

BIBLIOGRAPHIE.

INSTRUCTION SUR LES RÈGLES A CALCUL, ET PARTICULIÈREMENT SUR LA NOUVELLE RÈGLE A ENVELOPPE DE VERRE; par *M. Léon Lalanne*, ancien élève de l'École Polytechnique, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, 1851; in-12; VIII-136 pages.

La méthode des *cotes*, la seule presque qui soit en usage dans les services publics, a été introduite depuis quelques années dans l'enseignement graphique de l'École Polytechnique. Il serait à désirer que ce procédé fût admis aussi dans les lycées, et qu'il précédât même la méthode des épures à deux plans de projections. On sait qu'avec les cotes, on n'a besoin que d'un seul plan, au moyen duquel on peut représenter des points dans l'espace et exécuter diverses opérations sur ces points. Ce plan unique, plus facile à comprendre, peut servir de transition aux deux plans. Les cotes peuvent aussi être employées pour représenter une courbe plane au moyen d'une seule droite. A cet effet, prenons un point O pour origine, et menons les droites OX, OY, *axes*. Soit A_1 le point où l'axe OX rencontre la courbe, de sorte qu'en A_1 on a $y = 0$; faisons $OA_1 = 1$; portons sur l'axe des x, et toujours dans le même sens, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 3$, $OA_4 = 4$, etc., et menons les coordonnées correspondantes A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4, etc.; inscrivons à l'extrémité d'une droite le nombre 1; à partir de 1 portons sur la droite l'ordonnée A_2M_2, et inscrivons au bout le nombre 2; et, toujours à partir de 1, portons A_3M_3 et inscrivons 3, et ainsi de suite. Il est évident qu'au moyen de cette droite, si l'on a pris l'unité OA suffisamment petite, on pourra reconstruire la courbe, et, sans recourir à cette construction, on peut trouver approximativement l'aire de la courbe, les coefficients angulaires des tangentes, faire des interpolations, etc. Choisissons la logarithmique $y = \log x$; alors sur la droite *représentative* le nombre 1 indique le logarithme de 1 ou zéro, le nombre 2 indique que l'intervalle 12 est le logarithme de 2; le nombre 3 marque que l'intervalle 13 est le logarithme de 3, et ainsi de suite. Supposons maintenant deux de ces droites ainsi préparées et juxtaposées, 1 étant vis-à-vis de 1, 2 vis-à-vis de 2, etc.; rendons fixe une de ces droites, et appelons-la *règle*, et rendons mobile la seconde droite, le long d'une rainure pratiquée dans la règle. Appelons cette seconde droite *réglette*. Faisant glisser la réglette jusqu'à ce que son nombre 1 soit vis-à-vis le nombre quelconque *m* de la règle, alors le nombre quelconque *n* de la réglette sera vis-à-vis un nombre x de la règle, et la distance $1x$ sur la règle sera égale à la somme des distances $1m$ et $1n$. Or ces distances représentent les logarithmes; donc, d'après la propriété connue $x = mn$, on connaît le produit des deux nombres m et n; l'addition des logarithmes qu'on exécute avec les Tables et avec la plume s'opère par la règle glissante (*slide rule*), sans Tables et sans plumes, à l'aide d'un simple déplacement. On voit comment, par un mouvement inverse, on peut opérer la soustraction des *distances*, et par conséquent la *division*, et aussi l'extraction des racines. Il est évident que s'il fallait inscrire tous les logarithmes, l'instrument serait inexécutable; mais on peut se contenter, pour les usages ordinaires, d'un petit nombre de logarithmes. En effet, admettons qu'on ait inscrit seulement les nombres de 1 à 9; 1 est le commencement de la règle et représente zéro ou le logarithme de 1. Supposons que la règle soit prolongée seulement dans le sens de 21, alors le zéro de l'échelle tombe en dehors; le 1 représentera le logarithme de 10; le 12 le logarithme de 20; le 13 le logarithme de 30, et ainsi de suite; de même 12 peut présenter le logarithme de 200 et 13 le logarithme de 300, etc.; les nombres intermédiaires s'obtiennent par interpolation. Du reste, l'*instruction* est tellement détaillée, les manières d'opérer sont si nettement indiquées, les figures sont si parlantes, que tout le mécanisme devient d'une facilité extrême. M. Lalanne s'est rendu accessible aux moindres intelligences, et nous ajouterons aux plus modestes fortunes. Sa règle à enveloppe de verre ne coûte que 3 francs; celle qui est en bois coûte 7 francs (*). L'in-

(*) Les divisions doivent être parfaitement égales, les traits minces et pourtant visibles, et bien se correspondre sur la règle et la réglette; conditions dont l'exécution exige beaucoup de soin et rendent l'instrustrument de M. Lalanne suffit parfaitement aux élèves qui doivent seulement connaître la règle et la manière de s'en servir, sans avoir besoin d'acquérir une habileté qu'ils acquerront promptement lorsqu'ils seront devenus praticiens; habileté d'ailleurs qu'on ne conserve qu'en pratiquant constamment. Nous recommandons donc la règle *économique,* surtout pour le nouvel enseignement, bien plus dispendieux que l'ancien. Il est vrai que le *nouveau* offre plusieurs compensations; il est plus pénible, plus long, de qualité très-inférieure, et les chances des élèves sont plus embrouillées. Ainsi dans le nouveau mode d'examen (*), les élèves seront classés d'après *douze* moyennes prises sur des objets différents, ayant chacun un coefficient particulier, même fractionnaire (*Moniteur*, 5 juillet 1851; page 1899, 1re colonne, article 42). Les élèves sont assimilés à des orbites planétaires, dont on détermine les dimensions d'après douze observations, ayant chacune son *poids* spécial. L'enseignement est évidemment sous une influence astronomique. Je crois même qu'il est sous la domination du Cancer.

---

ment assez cher. L'action de la température et l'usage font même disparaître ces conditions assez vite. Les élèves n'ayant besoin que de *connaître* l'instrument, le moins dispendieux est le meilleur pour les classes.

(*) On a adopté l'excellent système suivi pour l'École de Saint-Cyr, mais en le gâtant. Le *Président* doit être un protecteur donné aux candidats, et vous en faites un troisième examinateur. Il y a hypertrophie d'examens. D'ailleurs, on ne devient pas mathématicien, physicien, chimiste, etc., par ordonnance ministérielle. En multipliant outre mesure les *moyennes* diverses, vous avez accumulé les chances d'erreurs. A travers les larges trous de vos cribles, les médiocrités passent aussi et même plus facilement que les supériorités. Au milieu de cette macédoine d'épreuves, le contrôle de vos jugements devient *impossible,* et, par conséquent, les injustices sont *possibles.* En ce genre, le *possible* finit toujours par exister.

DES SYSTÈMES DE CHIFFRES
En usage chez différents peuples, et de l'origine de la valeur de position des chiffres indiens.

(Journal de M. Crelle, tome IV, page 206; 1829.)

Mémoire lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 2 mars 1829, par M. le baron ALEXANDRE DE HUMBOLDT.

TRADUIT DE L'ALLEMAND, PAR M. F. WOEPCKE.

Jusqu'à présent, dans les recherches sur les signes de la numération (les seuls hiéroglyphes qui, chez les peuples de l'ancien continent, se soient conservés à côté de l'écriture littérale, anatomie phonétique de la parole), on s'est occupé plutôt de la forme individuelle des signes, que de l'esprit des méthodes à l'aide desquelles le génie humain a réussi à exprimer des quantités avec plus ou moins de simplicité. Le point de vue sous lequel on a envisagé cet objet, a été presque aussi borné que celui qui, pendant longtemps, a fait comparer les langues plutôt relativement à la fréquence de certains sons et de certaines terminaisons, ou relativement à la forme des racines, que par rapport à la structure organique de leurs grammaires. Depuis plusieurs années, je me suis efforcé, continuellement et avec une prédilection particulière, de mettre sous un point de vue général les systèmes de chiffres en usage chez différents peuples anciens et modernes. La connaissance de certains chiffres chez les *Aztekes* (Mexicains) et chez les *Muyscas* (*) (habitants du plateau de *Cundinamarca*)

(*) Quant à l'opinion que les chiffres des *Muyscas* (employés en même temps comme hiéroglyphes des jours de l'âge de la lune), dérivent de la que j'ai remportés de mon voyage; la découverte, faite par *Thomas Young*, du chiffre égyptien, dont les signes (comme nous le savons à présent) n'expriment pas tous par *juxtaposition* le multiple des groupes; le chiffre *gobar* (de poussière) des Arabes, trop peu remarqué encore, découvert par *Silvestre de Sacy*, dans un manuscrit de la Bibliothèque royale de Paris; les comparaisons que j'ai établies entre ces derniers signes de numération et les chiffres mexicains et chinois; la certitude acquise par un grand nombre de grammaires publiées dans l'*Inde*, que les chiffres et les lettres employées comme signes de numération, en deçà et au delà du *Gange*, sont non-seulement d'une forme tout à fait différente, mais que les systèmes de chiffres eux-mêmes sont essentiellement différents, ayant ou n'ayant pas une valeur de position; enfin une méthode indienne entièrement inconnue, qui se trouve dans une scolie du moine grec *Néophytos* : voilà une suite de matériaux qui peuvent jeter quelque lumière sur notre système de numération soi-disant arabe. En 1819, dans un Mémoire lu à Paris, dans une séance de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, j'ai essayé de démontrer comment, chez des peuples qui abrégent la méthode de la simple juxtaposition, en écrivant (à la manière des *Mexicains* dans leurs ligatures de 4 fois 13 ou 52 années, des *Chinois*, des *Japonais* et des *Tamouls*) des exposants ou des indicateurs au-dessus des signes de numération, comment, dis-je, ces indicateurs, par la suppression des signes de groupes arrangés en séric horizontale ou verticale, ont pu donner naissance à l'admirable système indien de la valeur de posi-

---

figure lunaire, qui se développe successivement avec les phases successives, voyez *Humboldt*, Vues des Cord. et Monuments des peuples indigènes de l'Amérique, t. II, p. 237-243; Pl. XLIV.

tion. La propagation de ce système a dû être favorisée par l'usage antique des cordons dont on se servait pour aider la mémoire et pour compter. Détachés, comme les *quippos* des *Tatares*, des *Chinois*, des *Égyptiens*, des *Péruviens* (*) et des *Mexicains*, ces cordons se changeaient en chapelets chrétiens, pieuses machines à calculer (**) ; tendus sur des cadres, ils forment le *suanpan* de toute l'Asie centrale, l'*abacus* des *Romains* et des *Tusciens* (***), et les instruments de l'arithmétique palpable des races *slaves* (****). Ces systèmes de cordons ou de fils de fer du simple *suanpan* asiatique, représentent les groupes plus ou moins élevés d'un système de numération, soit dizaines, centaines et mille; soit, suivant la division sexagésimale, degrés, minutes et secondes. L'esprit de la méthode est le même. Les perles de chaque cordon sont les indicateurs des groupes ; un cordon vide indique zéro ; ainsi il indique le vide *sunya* (sanscr.) *sifr*, ou plutôt proprement *sifron sihron* (arabe, suivant *Meninski : prorsus vacuum*). Je ne puis pas prouver historiquement que l'origine de la valeur de position donnée par les Indiens aux neuf chiffres a été réellement celle que je viens d'indiquer; mais je crois avoir montré le chemin qui peut successivement conduire à cette découverte. Entrevoir de semblables probabilités, voilà tout ce qu'on peut attendre de la ténébreuse histoire du développement des forces de l'esprit humain, histoire que son obscurité ne rend que plus attrayante.

(*) *Voir* sur l'emploi des *quippos* pour compter les péchés au confessionnal, *Acosta*, Hist. natural de las Indias, lib. 6, cap. 8; el Inca *Garcilaso*, lib. 6, cap. 9 ; *Fréret*, Mém. de l'Acad., t. VI, p. 609.

(**) *Klaproth*, Asiat. Mag., th. II, s. 78.

(***) *Otfried Müller*, Etrusker, t. II, p. 318.

(****) En russe, le chapelet s'appelle *tschotki*; la table à calculer aux cordons (le *suanpan* des Tartares), *tschatii*.

Un court extrait du Mémoire lu devant l'Académie des Inscriptions a été imprimé, et cela dans un endroit où l'on ne le cherche guère (*). Le manuscrit même se trouve entre les mains de M. *Champollion*, qui se propose de le publier avec d'autres découvertes beaucoup plus importantes encore, faites par lui à *Turin*, et relatives aux différentes méthodes des chiffres égyptiens. Depuis lors, j'ai continué de compléter de temps en temps mon premier travail; mais comme je ne puis espérer de trouver assez de loisir pour le publier dans toute son étendue, j'essayerai d'en réunir ici les résultats principaux. En présence du nouvel et heureux essor qu'a pris l'étude des langues et des monuments, en présence du commerce croissant avec les peuples de l'Asie méridionale et occidentale, il n'est peut-être pas tout à fait inutile de discuter des problèmes qui touchent de si près à la marche que suit l'esprit humain et même aux plus brillants progrès des mathématiques. Un des plus grands géomètres de notre temps et de tous les temps, l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*, dit (**) : « C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position; idée fine et importante qui nous paraît maintenant si simple, que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même, et l'extrême

(*) *Gay-Lussac* et *Arago*, Annales de Chimie et de Physique, t. XII, p. 93; dans les Comptes rendus mensuels de l'Institut; *Humboldt*, Essais pol. sur la Nouv.-Espagne (2e édit.), t. III, p. 122-124.

(**) *Laplace*, Expos. du système du monde, livre V, chapitre 1. Avec ce jugement, contraste singulièrement l'opinion émise par Delambre dans sa polémique sur le mérite de l'ancienne arithmétique indienne, telle qu'elle se trouve dans la *Lilawati* de *Bhascara Acharya* (Hist. de l'Astronomie ancienne, t. I, p. 543). Il n'est guère probable que la langue seule conduise à la suppression des signes des groupes.

facilité qui en résulte pour tous les calculs, placent notre système d'arithmétique au premier rang des inventions utiles; et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considère qu'il a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes dont l'antiquité s'honore. » Les observations suivantes démontreront, je l'espère, que la méthode *indienne* pouvait dériver successivement de méthodes antérieures, en usage encore aujourd'hui dans l'Asie orientale.

La *langue*, généralement parlant, détermine l'*écriture*, et l'écriture, sous certaines conditions examinées par *Silvestre de Sacy* et par mon frère, réagit sur la langue; de même les manières de compter si différentes chez les différents peuples, et les hiéroglyphes numératifs exercent les uns sur les autres une influence intime. Cette influence réciproque cependant n'est pas toujours d'une rigoureuse conséquence. Les signes de numération ne suivent pas toujours les mêmes groupes d'unités que la langue; la langue n'offre pas toujours les mêmes points d'arrêt (les mêmes intervalles quinaires) que les signes de numération. Mais en réunissant sous un seul coup d'œil tout ce que la langue (noms de nombre) et la graphique numérique présentent dans les zones les plus éloignées, tout ce qu'a produit l'intelligence humaine, dirigée sur les relations quantitatives : alors on retrouve dans l'*écriture numérique* d'une race les singularités isolées, en apparence, de la *langue* d'une autre race. Il faut ajouter même qu'une certaine maladresse dans les parties de la langue et de l'écriture, relatives à la numération, n'offre qu'une mesure trompeuse de ce qu'on se plaît à nommer l'*état de culture de l'humanité*. On rencontre à cet égard, chez les différents peuples, les mêmes complications, les mêmes contrastes que ces peuples présentent sous d'autres rapports. A côté des degrés les plus variés de culture intellectuelle et de constitutions politiques, tantôt ils ont l'écriture littérale, tantôt seulement des signes idéographiques; tantôt une richesse abondante de formes grammaticales, de flexions dérivées organiquement du son radical, tantôt des langues presque destituées de flexions et de formes, engourdies, pour ainsi dire, dès leur naissance. Ainsi l'action réciproque du monde intérieur et du monde extérieur (action dont les premières causes déterminantes restent plongées dans les ténèbres d'un temps mythique) pousse le genre humain *unique de nature* dans les directions les plus divergentes, le plus souvent irrésistiblement; et cette divergence se conserve, quand même de grandes révolutions cosmiques rapprochent de nouveau géographiquement les familles de langues les plus hétérogènes. Mais certaines ressemblances, certains accords qui, à d'immenses distances, se retrouvent dans les formes grammaticales, dans les essais graphiques, pour exprimer de grands nombres, témoignent de l'unité du genre humain, de la prépondérance de ce qui prend sa source dans l'intelligence intérieure et dans l'organisation commune de l'humanité.

Des voyageurs qui virent qu'en comptant on réunissait des cailloux ou des grains en tas de 5 ou de 20, prétendent que beaucoup de nations ne comptent pas au delà de 5 ou de 20 (*). De cette manière on pourrait prétendre aussi que les Européens ne comptent pas au delà de 10, parce que dix-sept est composé de 10 et de 7 unités. Chez les nations les plus civilisées de l'Occident, par exemple chez les *Grecs* et les *Romains*, les langues, comme on sait, rappellent encore cette habitude de former des

(*) *Pauw*, Recherches philos. sur les Américains, t. II, p. 162. (*Humboldt*, Monuments américains, t. II, p. 232-237.)

tas ou des groupes; de là les expressions *psephizein*, *ponere calculum, calculum detrahere*. Des groupes d'unités offrent, en comptant, des *points d'arrêt*, et les peuples les plus différents, en vertu d'une commune organisation corporelle (quatre extrémités, dont chacune divisée en cinq parties), s'arrêtent : ou bien à une main, ou aux deux mains, ou aux mains et aux pieds. Selon cette différence des points d'arrêt, il se forme des groupes de 5, de 10 et de 20 Toujours est-il remarquable que sur le nouveau continent, comme chez les *Mandingas* d'Afrique, chez les *Basques* et chez les races kymriques (galiques) de l'ancien continent, on trouve, pour la plupart, des groupes de 20 (*). Dans la langue *chibcha* des *Muyscas* [nation qui, semblablement aux *Japonais* et aux *Tibétains*, était gouvernée par un chef ecclésiastique et par un chef séculier, et dont j'ai fait connaître la méthode d'intercaler un trente-septième mois, pareille à celle de l'*Inde septentrionale* (**)], 11, 12, 13, s'appellent : *pied un* (*quihieha ata*), *pied deux* (*quihieha bosa*), *pied trois* (*quihièha mica*), composés de *quihieha* ou *qhieha* (*pied*), et des trois premières unités *ata*, *bozha* ou *bosa* et *mica*. Le numératif *pied* indique 10, parce qu'on vient au pied après avoir parcouru en comptant les deux mains. *Vingt*, conséquemment, dans le système de langues auquel appartient celle des *Muyscas*, s'appelle : *pied-dix* ou *maisonnette* (*gueta*), peut-être parce qu'en comptant on employait des grains de maïs au lieu de cailloux, et qu'une petite pile de maïs rappelait le magasin,

(*) Des exemples de pareils groupes de 20 unités sont fournis en Amérique par les *Muyscas*, les *Otomites*, les *Aztekes*, les *Indiens-Cora*, etc.

(**) Monum. amér., t. II, p. 250-253. Les *Muyscas* avaient des pierres couvertes de chiffres, dont la suite facilitait aux prêtres (xeques) l'intercalation de l'année rituelle; voyez la représentation d'une telle pierre d'intercalation, *loc. cit.*, tab. XLIV.

la grange à maïs. Du mot *maison, gueta* ou vingt (les deux pieds et les deux mains), se forment ensuite 30, 40, 80 de la manière suivante : *vingt plus* 10, *deux fois vingt, quatre fois vingt,* tout à fait semblables aux expressions celtiques qui ont passé dans les langues romanes : *quatre-vingt* et *quinze-vingt,* et ces autres plus rares : *six-vingt, sept-vingt, huit-vingt. Deux-vingt* et *trois-vingt* ne sont pas en usage en français, bien que dans le dialecte galique ou celtique de la *Bretagne occidentale,* que j'ai parcourue il y a quelques années, de *ugent, vingt,* on forme : *daou-ugent, deux-vingt* ou 40 ; *tri-ugent, trois-vingt* ou 60, et même *deh ha nao ugent,* 190 ou *dix sur neuf-vingtaines* (*).

Je pourrais donner encore d'autres exemples remarquables de l'analogie qu'offre la langue avec l'hiéroglyphique numérative ; j'en pourrais trouver dans la juxtaposition, dans la soustraction des unités qu'on place graphiquement avant le signe de groupe, dans des degrés intermédiaires de 5 à 15, chez des peuples qui comptent par groupes de 10 ou de 20. Chez des tribus américaines très-grossières encore, par exemple chez les *Gueranis* et chez les *Lulos,* 6, 7, 8 s'appellent *quatre avec deux, quatre avec trois, cinq avec trois.* Chez les *Muyscas,* plus civilisés que ceux-là, on trouve *vingt* (ou maison) *avec dix* pour 30, de même que les *Kymres* du pays de Galles

(*) *Davies,* Celtic Researches, 1804, p. 321 ; *Legodinec,* Grammaire celto-bretonne, p. 55. Dans le dialecte celtique ou kymrique du pays de Galles, 5 s'appelle *pump,* 10 *deg,* 20 *ugain,* 30 *deg ar ugain* (10 et 20), 40 *deugain,* 60 *trigain.* (*William Owen,* Dict. of the Welsh language, vol. I, p. 134.) Suivant ce même système de vingtaines, on trouve en basque : bi 2, lau 4, amar 10, oguai 20, birroguai 40, lauroguai 80, berroguetamar 50, c'est-à-dire, 40 et (ata) *dix. Larramendi,* Arte de la lengua bascongada, 1729, p. 38. (Les numératifs basques et kymriques ne sont pas confusément mêlés dans mes Monum., t. II, p. 237, mais placés ensemble afin d'en faciliter la comparaison ; seulement, par suite d'une faute d'impression, on y lit : *les premiers* au lieu de *les deux* ou de *les uns et les autres.*)

disent *dig* (dix) *or urgain* (avec vingt), et que les Français désignent 70 par soixante et dix. Partout, chez les *Étrusques*, les *Romains*, les *Mexicains* et les *Égyptiens*, on trouve des additions par juxtaposition; d'un autre côté, les langues offrent des formes soustractives ou minoratives (*); c'est ainsi que l'on trouve dans le sanscrit, chez les *Indiens : unavinsàti*, 19; *unusata*, 99; chez les *Romains : undeviginti* (*unus de viginti*), 19; *undeoctoginta*, 79; *duo de quadraginta*, 38; chez les *Grecs : cikosi deonta henos*, 19, et *pentekonta düoin deontoin*, 48, c'est-à-dire deux manquant de cinquante. Cette même forme minorative de la langue a passé dans la graphique numérique lorsqu'on place des caractères à gauche des signes de groupes 5, 10, et même de leurs multiples; par exemple 50 ou 100 (IV et IΛ, XL et XT pour désigner 4 et 40 chez les *Romains* et chez les *Tusciens* (**), quoique chez ces derniers, suivant les nouvelles recherches d'*Otfried Müller*, les chiffres probablement doivent leur origine entièrement à l'alphabet). Dans certaines rares inscriptions romaines, recueillies par *Marini* (***), on trouve même quatre unités avant 10, par exemple IIIIX pour désigner 6. Nous verrons bientôt que chez des races indiennes il existe des méthodes graphiques dans lesquelles la valeur de position, selon la position ou la direction des signes, indique *addition* et *multiplication*; tandis que chez les Tusciens et les Romains, la position est *additive* ou *soustractive*. Dans ces systèmes indiens (pour me servir de chiffres romains), IIX indique vingt, et XII douze.

Dans un grand nombre de langues, les groupes normaux

(*) M. *Bopp* cite même 95 ou cent diminué de cinq *pantschonam satan* (contraction de *pantscha* 5 et *ana moins*).

(**) *Otfried Müller*, Etrusker, t. II, p. 317-320.

(***) Iscrizioni della villa di Albano, p. 193. *Hervas*, Aritmetica delle nazioni, 1786; p. 11-16.

5, 10, 20 sont appelés respectivement une main, deux mains, main et pied (chez les Guaranis *mbombiabe*). Lorsqu'on a parcouru en comptant les doigts des deux extrémités, l'*homme entier* est pris pour symbole de 20; ainsi, dans la langue des *Yarkcnos* (nation dont j'ai trouvé des villages de mission très-peuplés sur les rives du fleuve *Apace*, tributaire de l'*Orinoco*), 40 s'appelle *deux hommes*, *noeni jemne*, de noemi *deux* et jemne *homme*. En persan, comme on sait, *pentscha* signifie le *poing*, et *pendj cinq*, dérivant du mot sanscrit *pantscha*. C'est ce dernier, suivant l'observation ingénieuse de M. Bopp, qui a produit le mot latin *quinque*, de même que de *tschatur* (sanscrit) vient *quatuor*. Le pluriel de *tschatur* (4) est *tschatvaras*, qui s'approche beaucoup de la forme dorico-éolienne *tettares*. Car le *ch* indien, prononcé comme en anglais, *tsch*, dans les formes grecques se change en *t*, donc *tschatvaras* se change en *tatvaras*, et *pantscha* en *penta* (en grec *pente*, dialecte éolien : *pempe*, d'où *penpezein*, compter sur les cinq, c'est-à-dire sur les doigts). En latin, c'est *q* qui correspond au *tsch* indien, conséquemment *tschatur* et *pantscha* se changent en *quatuor* et *quinque*. Le mot *pantscha*, même dans le sanscrit, ne signifie jamais *main*, mais désigne uniquement le nombre 5. Cependant *pantschasatcha* est une expression descriptive pour désigner la main comme organe *à cinq branches* (*).

De même que la parole (et avec une naïveté toute particulière les langues de l'Amérique méridionale) désigne comme points d'arrêt les groupes de 5, 10, 20, de même nous reconnaissons ces mêmes groupes dans l'hiéro-

(*) M. *Bopp*, à Paris, en 1820, m'a communiqué un intéressant Mémoire manuscrit sur les numératifs de la langue sanscrite comparés à ceux des langues grecque, latine et gothique, qui était destiné originairement à être publié dans mon ouvrage : *Sur les chiffres des divers peuples.*

glyphique numérative. Les *Romains* et les *Tusciens* ont des chiffres simples (*) pour désigner 5, 50, 500. Le système *quinaire* s'est conservé à côté du système *dénaire*. Dans la langue (*mexicaine*) des *Aztekes*, on trouve non-seulement des signes de groupes, par exemple, pour désigner 20, un *drapeau;* pour désigner le carré de 20 ou 400, une *plume* remplie de grains d'or, qui, en quelques provinces mexicaines, servait de monnaie; pour désigner le cube de 20 ou 8000, un *sachet* (*xiquipilli*) contenant 8000 fèves de cacao, servant également au commerce d'échange; mais aussi (parce que le drapeau est divisé en quatre champs et colorié à demi ou aux trois quarts) des chiffres pour désigner demi-vingt, ou 10, et $\frac{3}{4}$ de vingt ou quinze, pour ainsi dire : deux mains et un pied (**). Mais c'est l'*Inde* qui offre la plus remarquable de toutes les preuves de l'influence réciproque qui existe entre l'écriture et la langue. En sanscrit, la valeur de position des unités est entrée même dans le langage. C'est-à-dire que les Indiens ont une certaine méthode figurative d'exprimer des nombres par des objets dont on connaît un nombre déterminé. *Surga* (soleil), par exemple, signifie 12 parce que, dans les mythes indiens, on suppose douze soleils suivant l'ordre des mois. Les deux *Aswinas* (Castor et Pollux) qui se trouvent aussi parmi les naktschatras et mansions lunaires expriment 2; *manu* signifie 15, conformément aux *menus* de la mythologie. Ces indications feront comprendre comment *surg-manu*, composé des symboles de 12 et 14, peut exprimer le millésime 1214. Je dois la connaissance de ce fait à la communication bienveillante du savant *Colebrooke*. Pro-

---

(*) Relativement au signe tuscien pour 500, voyez *Otfried Müller*, Abth., IV, fig. 2.

(**) *Humboldt*, Monum. amér., t. I, p. 309.

bablement suivant le même principe, *manusurga* signifie 1412, et *aswinimanu* 214. En sanscrit, d'ailleurs, la numération est tellement parfaite, qu'on trouve même un simple mot, *koti,* pour dix millions, de même que la langue *qquischna* (péruvienne), qui ne compte pas suivant des groupes de 20, possède un simple mot (*hunu*) pour exprimer un million.

Si, comme le dit *Ovide,* nous ne comptons suivant des dizaines « quia tot digiti, per quos numerare solemus, » l'homme avec des extrémités divisées six fois, serait arrivé à une échelle duodénaire, à des groupes de 12 (*), qui offre le grand avantage de divisions sans fractions par 2, 3, 4 et 6, et dont les *Chinois*, depuis les temps les plus reculés, se servent pour leurs mesures et leurs poids.

De ces réflexions sur la relation qui existe entre la *langue* et l'*écriture,* entre les *numératifs* et les signes numériques, nous passons à ces derniers mêmes. Je répète que, dans cet extrait de mon grand ouvrage non achevé, il ne sera pas tant question de la *formation hétérogène* de tel ou tel élément (chiffre), que de *l'esprit des méthodes* employées par les différentes nations pour exprimer des quantités numériques. Je ne parle ici de la figure et de la forme des chiffres que lorsqu'elles peuvent influer sur des raisonnements relatifs à l'identité ou l'hétérogénéité des méthodes. Car les manières de procéder pour exprimer les multiples purs ou mixtes des groupes dénaires fondamentaux (par exemple $4n$, $4n^2$ ou $4n+7$, $4n^2+6n$, $4n^2+6n+5$) sont très-variées et se font tantôt par *ordination* (valeur de position) chez différents peuples indiens; tantôt par simple *juxtaposition,* comme chez les *Tusciens*, les *Romains*, les *Mexicains*, les *Égyptiens*; tan-

(*) *Debrosses,* t. II, p. 158.

tôt par des *coefficients placés à côté*, chez les habitants du midi de la péninsule indienne qui parlent la langue Tamoul; tantôt par certains *exposants* ou indicateurs placés au-dessus des signes de groupes, chez les *Chinois*, les *Japonais* et dans les myriades des *Grecs;* tantôt, suivant la méthode inverse, par un certain nombre de zéros ou de points superposés à neuf chiffres pour indiquer la valeur relative ou de position de chaque chiffre; ce sont, pour ainsi dire, des signes de groupes placés au-dessus des unités, comme dans le chiffre gobar des Arabes et dans un système de chiffres indiens, expliqué par le moine *Néophytos*. Les cinq méthodes qu'on vient d'énumérer sont tout à fait indépendantes de la *figure des chiffres*, et, pour faire ressortir plus encore cette indépendance, je me suis fait une loi de n'employer dans ce Mémoire d'autres signes que ceux qui sont communément employés dans l'arithmétique et l'algèbre. De cette manière, l'attention est plus fixée sur ce qui est essentiel, sur l'esprit de la méthode. Déjà, à l'occasion d'un autre sujet très-hétérogène à celui-ci, relativement à la suite régulière et souvent périodique des courbes géognostiques [dans les additions à l'*Essai géognostique sur le gisement des roches* (*)], j'ai essayé de montrer comment des *notations pasigraphiques* peuvent contribuer à la généralisation des idées. On supprime les considérations secondaires, quoique très-importantes en elles-mêmes, sur les formes et les fusions individuelles pour mettre sous un jour d'autant plus clair un phénomène qu'on désire examiner particulièrement, avantage qui peut justifier à un certain degré la sécheresse et la froideur de pareilles observations.

On est accoutumé à distinguer dans les méthodes graphiques des peuples: 1° des *signes* indépendants des

(*) Édit. de 1823, p. 364-375.

lettres de l'alphabet; 2° des *lettres* qui, par un certain arrangement, par certains traits ou points ajoutés, ou (se rapportant à la langue) comme initiales des numératifs (*) indiquent la valeur numérique. Il est, comme on sait, hors de doute que les races helléniques, ainsi que les races sémitiques ou aramaïques (parmi celles-ci les *Arabes* eux-mêmes, jusqu'au v^e siècle (**) après l'hégire, avant de recevoir les chiffres des *Persans*), à l'époque de leur culture développée, se servaient des mêmes signes comme lettres et comme chiffres. D'un autre côté, nous rencontrons dans le nouveau continent deux nations au moins, les *Aztekes* et les *Muyscas*, qui avaient des chiffres sans posséder une écriture littérale. Chez les *Égyptiens*, les hiéroglyphes les plus usités, pour les unités, les dizaines, les centaines et les mille, ne semblent pas non plus dépendre des hiéroglyphes phonétiques. De même le chiffre *pehlwi* de la Perse ancienne, dans les neuf premières unités, est tout à fait indépendant de l'alphabet, comme c'est le cas également chez les *Tusciens*, chez les *Grecs* dans les temps les plus anciens, et chez les *Romains*. *Anquetil* (***) observe déjà que l'alphabet *zend*, dont les 48 éléments auraient pu faciliter l'expression des

(*) Le chiffre diwani des Arabes, composé uniquement de monogrammes ou abréviations de numératifs, offre l'exemple le plus compliqué d'une telle *écriture d'initiales*. Il est plus douteux qu'on ne le croit ordinairement que les C et les M des Tusciens et des Romains soient des initiales empruntées aux langues tuscienne et romaine. (*Leslie*, Philos. of arith., p. 7-9, 211; *Debrosses*, t. I, p. 436; *Hervas*, p. 32-35; *Otfried Müller*, Etrusker, p. 304-318.) La croix grecque rectangulaire, tout à fait semblable au signe chinois pour 10, dans les inscriptions les plus anciennes, désigne *mille* (*Boerkh*, Corp. inscript. græc., vol. I, p. 23) et n'est autre chose que la forme la plus ancienne du *chi* (Nouveau traité de diplom., par deux Religieux de Saint-Maur, vol. I, p. 678).

(**) *Silvestre de Sacy*, Gramm. arabe, 1810; t. I, p. 74; note 6.

(***) Mém. de l'Acad. des Belles-Lettres, t. XXXI, p. 357.

nombres, n'est pas employé comme chiffre, et que, dans les livres zends, les nombres sont toujours exprimés à la fois par le chiffre pehlwi et par les mots zends. Si des recherches ultérieures corroboraient cette absence d'un chiffre zend, cela favoriserait l'opinion que, vu l'affinité intime des langues zend et sanscrite, le peuple zend devait s'être séparé des Indiens dans un temps où *la valeur de position des chiffres* était encore inconnue à ceux-ci. Dans le pehlwi, à partir de 9, les signes de groupes 10, 100 et 1000 sont composés de lettres. *Dal* est 10, *re* joint au *za* 100, *re* joint au *ghaïn* 1000. En considérant le peu que nous connaissons de la masse de chiffres dont le genre humain fait usage, on trouve que la division des chiffres en *chiffres littéraux* et *chiffres* proprement dits, est aussi incertaine et aussi stérile que la division des langues en langues monosyllabiques et polysyllabiques, abandonnée depuis longtemps par les véritables philologues. Qui peut décider avec certitude si le chiffre *tamoul* des *Indes méridionales*, qui n'admet pas la valeur de position, et qui, le signe de 2 excepté, est tout à fait différent de celui employé dans les manuscrits *sanscrits*; si, dis-je, ils ne font pas dériver ce chiffre de l'alphabet *tamoul* même, puisque, dans celui-ci, on croit reconnaître, sinon le signe de groupe de 100, pourtant celui de 10 (la lettre *ya*) et le chiffre 2 (la lettre *u*)? Le chiffre *telougon* (*), admettant la valeur de position également en usage dans la partie méridionale de la péninsule, diffère singulièrement, pour les signes de 1, 8 et 9, de tous les chiffres indiens qui nous sont

(*) *Campbell*, Grammar of the teloogoo language (Madras, 1816), p. 4-208. Le *telougon* est la langue que par erreur on nommait *gentoo*, et est appelée par les indigènes *trilinga* ou *telenga*. Comparez la Table de chiffres donnée par *Campbell* à d'autres variétés de chiffres indiens qui se trouvent dans *Wahl*, Hist. universelle des langues orientales, 1784, tab. I.

connus jusqu'à présent, tandis qu'il leur est conforme pour les signes de 2, 3, 4 et 6. Le besoin d'exprimer graphiquement des nombres a sans doute été éprouvé le premier, et les signes numériques font partie des plus anciens de tous les signes graphiques. Les instruments de l'arithmétique *palpable*, que M. *Leslie* dans son ouvrage ingénieux : *the Philosophy of Arithmetic* (1817) met en regard de l'arithmétique *figurative* ou *graphique*, sont : les deux mains de l'homme, de petites piles de cailloux (calculi, psephoi), des grains de semence, des cordons séparés et à nœuds (cordons à calculer, *quippos* des Tartares et du Pérou), des *suanpan* encadrés et des Tables d'abacus, la machine à calculer des peuples slaves à boules ou grains enfilés. Tous ces instruments offraient à l'œil les premières manières de désigner *graphiquement* des groupes de différents ordres. Une main, ou un cordon à nœuds ou à boules glissantes, désigne les unités jusqu'à 5, ou jusqu'à 10, ou jusqu'à 20. L'autre main indique combien de fois, en comptant, on a passé sur les cinq doigts de la première (pampezesthei) ; chaque doigt de la seconde main, c'est-à-dire chaque unité, exprimera donc alors un groupe de 5. C'est la même chose pour deux cordons à nœuds que pour deux mains ; et si l'on passe aux groupes de 2^e^, 3^e^ et 4^e^ ordre, la même relation de groupes supérieurs et inférieurs a lieu dans les cordons à calculer tendus sur des cadres et garnis de boules, le *suanpan* de l'Asie ancienne qui, de bonne heure, a passé sous forme d'*abax* ou de *tabula logistica* aux peuples occidentaux (peut-être par des Égyptiens aux temps de la confédération pythagoricienne). Les *koua's*, qui sont plus anciens que l'écriture chinoise actuelle, et même les lignes parallèles noueuses, semblables à des notes de musique et souvent interrompues des livres magiques (raml) de l'*Asie intérieure* et du *Mexique*, ne semblent être que des projections graphiques de ces cordons à calculer et mnémoniques (*). Dans le *suanpan* asiatique ou dans l'*abacus* [dont les Romains, par suite de leurs chiffres incommodes, se servaient beaucoup plus souvent que les *Grecs* (**) chez qui la graphique numérique avait fait des progrès plus heureux], à côté des séries *dénaires* qui se suivaient en progression géométrique, il se conservait aussi des séries *quinaires*. A côté de chaque cordon des groupes ou ordres n, n^2, n^3, il se trouvait un cordon plus petit, qui désignait cinq des boules du grand cordon par une seule boule. Au moyen de cet arrangement, le nombre des unités fut déterminé en sorte que le cordon principal n'avait plus besoin que de quatre boules, et le cordon secondaire d'une seule (***). Les Chinois semblent, depuis les temps les plus reculés, avoir considéré arbitrairement un quelconque de la suite des cordons parallèles, comme le *cordon des unités*, de manière qu'en descendant et en remontant, ils obtenaient des fractions décimales, des nombres entiers et des puis-

(*) En Orient, on appelle l'art négromantique *raml*, l'art du sable. Des lignes entières ou brisées et des points servent d'éléments pour guider le divinateur. (*Richardson* and *Wilkins*, Diction. Persian and Arabic., 1806, t. I, p. 482.) Le manuscrit remarquable, bien véritablement mexicain, couvert comme de notes de musique, conservé à *Dresde* et dont j'ai donné un dessin dans mes Monum. amér., Pl. 44, fut reconnu par un persan savant, qui vint me voir à Paris, à première vue comme un tel *raml* oriental. Depuis ce temps, j'ai découvert des *koua* véritablement américains et des dessins linéaires en forme de notes de musique, bien semblables à ceux dont je viens de parler, dans plusieurs manuscrits hiéroglyphiques d'origine *aztèke* et dans les sculptures de *Palenque* dans l'État de *Guatimala*. Dans le chiffre chinois d'ancien style, le signe de groupe pour 10, une perle sur un cordon, est évidemment pris du *quippu* (comme projection).

(**) *Nicomaque* dans *Ast*, Theologumena arithm., 1817, p. 96. Dans les affaires financières du moyen âge, la table à calculer [le comptoir] (*abax*) se changeait en *exchequer*.

(***) Ainsi c'est le cas dans l'*abacus* romain. Dans l'*abacus* chinois on employait 5 et 2 boules, puis on plaçait de côté les boules qui ne comptaient pas.

sances de 10. Combien (*) la connaissance des fractions décimales a été introduite tard dans l'Occident (au commencement du XVI^e siècle), tandis que l'arithmétique palpable de l'Orient y était parvenue depuis longtemps ! Chez les *Grecs*, l'échelle ascendante n'était connue au delà de l'unité que dans le système sexagésimal des degrés, minutes et secondes; mais comme on n'avait pas $n - 1$, c'est-à-dire 59 signes, la valeur de position n'était observée que par rangées de deux nombres.

En examinant l'origine des nombres, nous trouvons que, au moyen de piles de cailloux ou sur les cordons des Tables à compter, chargées de boules, on écrivait et lisait transitoirement des nombres avec une grande régularité. Les impressions que laissaient ces opérations ont partout influencé les commencements de la graphique numérative. Dans les hiéroglyphes historiques, rituels et négromantiques des *Mexicains*, que j'ai fait connaître, les unités jusqu'à 19 (le premier simple signe de groupe est 20) sont placées l'une près de l'autre en forme de gros grains colorés, et, ce qui est particulièrement remarquable, le calcul va de droite à gauche, comme l'écriture sémitique. On remarque parfaitement cet ordre dans 12, 15, 17 où la première série contient 10, et la seconde n'est pas tout à fait remplie. Dans les monuments helléniques les plus anciens, dans les inscriptions sépulcrales tusciennes, chez les *Romains* et chez les *Égyptiens* (ainsi que *Thomas Young*, *Jomard* et *Champollion* l'ont prouvé), les unités sont désignées par des lignes perpendiculaires. Chez les Chinois et sur quelques monnaies véritablement phéniciennes décrites par *Eckhel* (tome III, page 410), ces traits sont horizontaux jus-

(*) Relativement aux premiers essais de notation décimale faits par *Michel Stifelius* d'*Eslingen*, *Stevin* de *Bruges* et *Bombelli* de *Bologna*, voyez *Leslie*, Phil. of arithm., p. 134.

qu'à 4. Les Romains (en négligeant le signe de groupe quinaire) joignaient ensemble, dans les inscriptions, quelquefois jusqu'à 8 traits comme unités. Beaucoup d'exemples en sont donnés par *Marini* dans l'écrit remarquable : *Monumenti dei fratelli Arvali* (*). Les têtes de clous servant à régler l'ancienne année romaine (*Annales antea in clavis fuerunt, quos ex lege vetusta figebat prætor maximus*, PLIN., VII, 40) auraient pu conduire aux points des unités qui se trouvent chez les Mexicains, et ces points se rencontrent en effet (à côté des lignes horizontales, chinoises et phéniciennes) dans les subdivisions des onces et des pieds (**). Les points et traits, au nombre de neuf ou de dix-neuf, dans l'échelle *dénaire* ou *vicésimale* (échelle des mains ou des mains et pieds) de l'ancien et du nouveau continent, sont la plus grossière de toutes les notations du système de la juxtaposition. On y *compte* plutôt les unités qu'on ne les *lit*. L'existence indépendante, l'individualité, pour ainsi dire, de certains groupes d'unités, comme notations, ne commence que dans les numératifs alphabétiques des races sémitiques et helléniques, ou chez les *Tibétains* et les *peuples indiens*, qui expriment 1, 2, 3, 4 par des signes particuliers et idéographiques. Dans le *pehlwi* de la Perse ancienne, il se présente une transition remarquable de la juxtaposition grossière de signes d'unités à l'existence isolée d'hiéroglyphes composés et idéographiques. Ici l'origine des premiers neuf chiffres par le nombre des incisions ou dents est évidente; cinq jusqu'à dix ne sont même que des enlacements des signes 2, 3, 4 sans que le signe 1 revienne. Dans les systèmes véritablement *indiens* des chiffres *devanagari*, persan et arabo-européen, on

(*) T. I, p. 31; t. II, p. 675, par exemple dans *Octumvir*.
(**) *Marini*, t. I, p. 228.

ne saurait reconnaître que dans 2 et 3, des contractions (*) de 2 et 3 unités; certainement pas dans les chiffres plus élevés qui, dans la péninsule indienne, diffèrent entre eux de la manière la plus régulière.

En parlant ici, et dans la suite de ce Mémoire, des nombres *indiens*, il faut que je m'explique d'abord sur cette dénomination et sur les anciens préjugés qui consistent à croire que l'Inde possède des chiffres d'une forme unique avec exclusion des numératifs alphabétiques; que dans toute l'Inde on trouve la connaissance de la valeur de position et non pas l'usage de signes de groupes particuliers pour n, n^2, n^3,.... De même que, comme l'a dit souvent mon frère, Guillaume de Humboldt, le *sanscrit* n'est désigné que très-inconvenablement par les noms de *langue indienne, ancienne langue indienne*, vu qu'il existe dans la péninsule indienne plusieurs langues très-anciennes et ne dérivant pas du tout du sanscrit; de même l'expression *chiffre indien, ancien chiffre indien* est, en général, très-vague, tant pour la forme des chiffres que pour le génie des méthodes, employant tantôt la juxtaposition, tantôt des coefficients, tantôt la simple valeur de position des groupes principaux n, n^2, n^3 et de leurs multiples $2n$, $3n$.... Même l'existence d'un signe pour zéro n'est pas encore, dans les chiffres indiens, une condition nécessaire de la valeur de position, ainsi que le prouve la scolie de *Néophytos*. Dans la partie méridionale de la péninsule, les langues *tamoul* et *telougon* sont les plus répandues. Les Indiens qui parlent *tamoul* ont des chiffres différents de leur alphabet, parmi lesquels 2 et 8 ont une ressemblance éloignée avec les chiffres (*deva-*

(*) *Abel Rémusat*, Langues tartares, p. 30. Pour le singulier chiffre indien de *Java*, voyez *Crawfard*, t. II, 263.

nagari) indiens 2 et 5 (*). Les chiffres *cingalais* (**) diffèrent plus encore des chiffres indiens. Ni ceux-ci, ni les chiffres tamouls n'ont de valeur de position ni de signe pour zéro; les groupes n, n^2, n^3,... y sont représentés par des hiéroglyphes particuliers. Les *Cingalais* opèrent par juxtaposition, les *Tamouls* à l'aide de coefficients. Au delà du *Gange*, dans l'empire *Burman*, on trouve la valeur de position et un signe pour zéro, mais des figures des chiffres entièrement différentes des chiffres arabes, persans et devanagari-indiens (***). Tous les neuf chiffres persans employés par les Arabes diffèrent entièrement des chiffres devanagari (****); 7 est formé comme une S romaine, 8 comme une S tuscienne. Parmi ceux qu'aujourd'hui nous nommons chiffres arabes, uniquement 1, 2, 3 ressemblent aux chiffres devanagari correspondants, le devanagari 4 est notre 8; notre 9 est un 7 devanagari; notre 7 est un 6 persan. En *Bengali*, 5 a la figure d'un croissant, et 3, 5, 6, 8, 9 diffèrent entièrement des chiffres devanagari (*****). Les chiffres de *Guzerath* ne sont que des chiffres devanagari-indiens mal formés (******).

Des réflexions sur l'influence des chiffres primitifs sur l'alphabet, sur des déformations des lettres faites à dessein, afin de distinguer les lettres des chiffres, sur les différents

(*) *Robert Anderson*, Rudiments of tamul grammar, 1821, p. 135.

(**) *James Chafer*, Grammar of the cingalese language; *Colombo*, 1815, p. 135.

(***) *Carcy*, Grammar of the rurman language, 1814, p. 196. Uniquement les chiffres rurmans 3, 4 et 7 ressemblent quelque peu à 2, 5 et 7.

(****) Voyez *John Shakespear*, Grammar of the hindustani language, 1813, p. 95 et Pl. I. *William Jones*, Grammar of the persian language, 1809, p. 93. *Silvestre de Sacy*, Grammaire arabe, Pl. VIII.

(*****) *Graves Chamney Hanghton*, Rud. of bengali grammar, 1821, p. 133.

(******) *Robert Drummond*, Illustrations of the grammat. parts of the *Guzerath* and *Mahratt* language, 1808, p. 25.

arrangements des lettres numératives, qui, chez le même peuple, ne correspondent pas toujours à l'ordre usuel de l'alphabet (ainsi que c'est le cas pour l'aboudjed des peuples sémitiques de l'*Asie* et de l'*Afrique* (*), sont étrangères à ce Mémoire et ont donné naissance à bien de vagues hypothèses dans le domaine des alphabets et des hiéroglyphes comparés. Moi-même j'ai émis autrefois la conjecture que les chiffres indiens, nonobstant les formes de 2 et de 3, sont des lettres d'un ancien alphabet dont on retrouve des reflets dans les caractères phéniciens, samaritains, palmyriens et égyptiens (sur les momies) et même sur les anciens monuments persans de *Nakschi-Rustan* (**). Combien de lettres de ces alphabets ne ressemblent-elles pas aux chiffres nommés exclusivement indiens? D'autres savants (***) ont avancé déjà que ces chiffres soi-disant indiens sont d'origine phénicienne, et l'ingénieux *Echkel* a déjà fait observer que les lettres phéniciennes ressemblent à des chiffres d'une manière tellement frappante, qu'on désigne le mot *abdera* par 19990 et par 15550 (****). Mais cette origine des chiffres et des lettres est enveloppée de ténèbres qui, vu l'état actuel des matériaux dont on peut disposer, rendent impossibles des recherches philosophiques sérieuses, si l'on ne veut pas se borner à des résultats négatifs.

Les mêmes peuples comptent souvent en même temps avec des lettres numératives et avec des signes de nombres idéographiques ou choisis arbitrairement; de même

---

(*) *Silvestre de Sacy*, Grammaire arabe, t. I, p. 10.

(**) *Silvestre de Sacy*, Antiquités de la Perse, Pl. I, n. 1. Comparez les inscriptions numériques du Sinaï, et *Descript. de l'Égypte*, t. V, Pl. LVII.

(***) *Guyot de la Marne*, Mém. de Trévoux, 1736, p. 360; 1740, mars, p. 260. *Jahn*, Bibl. archæolog., B. I, p. 479. *Büttner*, Tables comparat., 1742, St. 2, p. 13. *Eichhorn*, Introd. au vieux Testament, B. I, p. 197. *Wahl*, Hist. littér. de l'Orient, p. 601-630. Mines de l'Orient, B. III, p. 87.

(****) *Doctrina nummorum veterum*, 1794; t. III, p. 396-404, 421, 494.

on trouve dans un même système numérique les méthodes les plus différentes pour exprimer les multiples du groupe fondamental. Quelquefois ce qui n'est qu'indiqué dans un système se trouve complétement développé dans un autre. C'est ainsi que dans le domaine de la parole, certaines formes grammaticales qui ne font pour ainsi dire que préluder chez une nation, se trouvent développées chez une autre avec prédilection et avec toute l'énergie de ses forces intellectuelles. En décrivant un à un les systèmes numériques employés par chaque peuple, on obscurcit les ressemblances des méthodes, on perd la trace du chemin qui a conduit l'esprit humain au chef-d'œuvre de l'arithmétique indienne, dans laquelle chaque signe a une valeur absolue et une valeur relative, suivant laquelle ils croissent de droite à gauche en progression géométrique. Je quitte donc, dans ce qui suit, l'ordre ethnographique, et ne ferai qu'examiner les différents moyens employés pour exprimer *graphiquement* les mêmes groupes d'unités (groupes mixtes ou simples).

Première méthode. — *Juxtaposition.* Simplement additive des lettres numératives et les véritables chiffres. Ainsi chez les *Tusciens*, les *Romains*, les *Grecs*, jusqu'à la myriade; les races *sémitiques*, les *Mexicains* et dans la plupart des chiffres *pehlwi*. Cette méthode rend le calcul particulièrement incommode lorsque les *multiples* des groupes ($2n$, $3n$, $2n^2$,...) n'ont pas de signes particuliers. Les *Tusciens* et les *Romains* répètent les signes 10 jusqu'à 50. Les *Mexicains*, chez lesquels le premier signe de groupe est 20 (un drapeau), répètent le même hiéroglyphe jusqu'à 400. Les *Grecs*, au contraire, ont, dans les deux séries des dizaines et des centaines, commençant respectivement avec *iota* et *rho*, des signes pour 20, 30, 400 et 600. Trois *épisèmes* (lettres d'un alphabet antique) *bau*, *koppa* et *sampi*, expriment 6, 90 et 900; ces deux derniers terminent les séries des dizaines et des centaines, circonstance qui rend plus semblable la valeur numérique des lettres grecques à celle de l'aboudjed sémitique (*). M. *Bockh,* dans ses recherches savantes sur le digamma, a montré que *bau* est le *wau* des *Sémites* (des *Latins*); *koppa* était le *koph* sémitique (9), et *sampi* le *schin* sémitique (**). Le série des unités depuis *alpha* jusqu'à l'*hêta* forme, chez les *Grecs,* les nombres fondamentaux (*puthmenes*) avec lesquels, à l'aide d'artifices découverts par *Apollonius* (***), on opérait en calculant de manière qu'en dernier résultat on les réduisait aux nombres correspondants des séries deuxième et troisième (des analogues).

Seconde méthode. — *Multiplication ou diminution de la valeur par des signes placés au-dessus et au-dessous.* Dans la quatrième série de la notation grecque, les puthmènes, comme on sait, reviennent par analogie, multipliés par mille au moyen de l'apposition d'un petit trait mis au bas de la lettre. Ainsi l'on arrivait jusqu'à la myriade; on écrivait jusqu'à 9999. Si l'on avait appliqué cette notation par accents à tous les groupes en supprimant tous les signes après le *thêta* (9), on aurait, en donnant à un β deux ou trois accents, des expressions pour 20, 200 et 2000; de cette manière on se serait rapproché du chiffre arabe *gobar,* et, par cela, de la valeur de position; mais malheureusement on passait les groupes des dizaines et des centaines pour ne commencer la notation par accents qu'avec les mille, et sans même l'essayer pour les groupes supérieurs.

Tandis qu'un trait mis en bas multipliait le nombre

(*) *Hervas,* Arithm. delle nazioni, p. 78. Relativement à l'ancien ordre des alphabets sémitiques, voyez *Descript. de l'Égypte moderne,* t. II, Pl. II, p. 208.

(**) *Économie nationale des Athéniens,* B. II, p. 385.

(***) *Delambre,* Histoire de l'Astr. ancienne, t. II, p. 10.

par mille, un trait vertical placé en haut désigne, chez les *Grecs,* une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur le nombre placé sous l'accent. Ainsi, chez *Diophante,* γ' est $\frac{1}{3}$, $\delta' = \frac{1}{4}$; mais lorsque le numérateur est plus grand que l'unité, il est désigné par le nombre *inférieur,* et alors le dénominateur de la fraction lui est ajouté en guise d'exposant, de sorte que, par exemple, $\gamma^{\delta} = \frac{3}{4}$ (*). Dans des inscriptions romaines, un trait horizontal ajouté en haut multiplie le nombre par mille, ce qui peut être considéré comme un moyen d'abréviation pour économiser l'espace.

La méthode d'*Eutocius,* pour exprimer les myriades, est plus importante. Ici nous rencontrons, chez les Grecs, la première trace du système exponentiel ou plutôt d'indication, si important pour l'Orient. M^{α}, M^{β}, M^{γ} désignent 10000, 20000, 30000. Ce qui ici est appliqué exclusivement aux myriades s'étend, chez les *Chinois* et chez les *Japonais,* qui recevaient leur culture des Chinois 200 ans avant notre ère, à tous les multiples des groupes. Trois traits horizontaux sous le signe 10 indiquent 13; trois traits horizontaux au-dessus signifient 30. Suivant cette méthode on écrivait le nombre 3456 ainsi (en employant les chiffres romains comme signes de groupes, les chiffres indiens comme exposants) :

$$\begin{matrix} M^3 \\ C^4 \\ X^5 \\ I^6. \end{matrix}$$

(*) *Delambre,* t. II, p. 11. L'accent ajouté au haut des lettres, uniquement pour indiquer qu'elles ont été employées comme nombres, ne doit pas être confondu avec le signe de fraction. Aussi dans plusieurs anciens manuscrits mathématiques, n'est-il jamais proprement perpendiculaire, Chez les *Égyptiens* on trouve les mêmes indices. Au-dessus d'un trait recourbé (*) qui signifie 1000, on place 2 ou 4 unités pour exprimer 2000 et 4000. Chez les *Aztekes* ou *Mexicains* j'ai trouvé le signe de la *ligature* avec six unités comme exposant, pour exprimer 312 années ($6 \times 52 = 312$) ; j'en ai donné la représentation dans mon ouvrage sur les *Monuments américains*. Chez les *Chinois*, les *Aztekes* et les *Égyptiens* le signe de groupe est toujours le signe inférieur, comme si l'on écrivait X^5 pour 50; dans le chiffre arabe *gobar*, le signe de groupe est placé au-dessus de l'indicateur. Il faut savoir que dans le *gobar* les signes de groupes sont des points, conséquemment des zéros; car dans l'*Inde*, en *Tibet* et en *Perse*, des zéros et des points sont identiques. Les signes *gobar*, qui depuis l'année 1818 ont fixé toute mon attention, ont été découverts par mon ami et maître *M. Silvestre de Sacy*, dans un manuscrit de l'ancienne abbaye *Saint-Germain-des-Prés*. Ce grand orientaliste dit : « Le *gobar* a un grand rapport avec le chiffre indien, mais il n'a pas de zéro » (**). Je crois toutefois que le signe pour zéro y existe, mais, comme dans la scolie de Néophytos, il est placé au-dessus des unités, non pas à côté; ce sont même exactement ces zéros ou points qui ont fait donner à ces caractères le nom singulier de *gobar* ou *écriture de poussière*. Au premier coup d'œil on doute si l'on doit

---

mais horizontal, en sorte qu'il ne peut jamais être confondu avec le signe de fraction. (*Bast*, De usu litterarum ad numeros indicandos, et *Gregorii*, Corinthii liber de dialectis linguæ græcæ, 1811, p. 850.)

(*) *Kosegarten*, de Hierogl. ægypt., p. 54. L'opinion émise par *Gatterer* d'après *Rianchini* (Décad. I, cap. 3, p. 3), *Goguet* (t. I, p. 226) et *Debrosses* (t. I, p. 432), que des *Égyptiens* donnaient la valeur de position aux 9 unités en direction verticale, n'a été aucunement corroborée par des recherches modernes. *Gatterer*, Histoire universelle jusqu'à Cyrus, p. 555-586.

(**) *Grammaire arabe*, p. 76, et la note ajoutée à la Pl. VIII.

y reconnaître un passage des lettres aux chiffres. On ne distingue qu'avec peine les 3, 4, 5 et 9 indiens. *Dal* et *ha* sont peut-être les chiffres indiens 6 et 2 mal posés. L'indication au moyen des points est la suivante :

$3^{\cdot}$ pour 30,
$4^{\cdot\cdot}$ pour 400,
$6^{\cdot\cdot\cdot}$ pour 6000.

Ces points rappellent une notation grecque ancienne, mais rare, qui ne commence qu'avec les myriades : $\alpha^{\cdot\cdot}$ pour 10000, $\beta^{::}$ pour 200 millions. Dans ce système de progressions géométriques il y a originairement un point, que cependant on n'emploie pas, pour indiquer 100. Chez *Diophante* et *Pappus*, un point est placé entre les lettres numératives, pour remplacer l'initiale Mu (myriade). Alors un point multiplie par 10000 ce qui est à gauche. On serait porté à croire que des idées obscures sur des notations au moyen de points et de zéros, venues de l'Orient, s'étaient répandues par des *Alexandrins* en Europe. Le véritable signe de zéro pour indiquer quelque chose *qui manque*, est employé par *Ptolémée* dans l'échelle sexagésimale descendante, pour exprimer des degrés, minutes ou secondes qui manquent. *Delambre* veut aussi avoir trouvé le signe de zéro dans des manuscrits du commentaire de *Théon* sur la Syntaxe de Ptolémée (**). L'usage de ce

(*) *Ducange*, Palæogr., p. 12.

(**) *Hist. de l'Astron. ancienne*, t. I, p. 547; t. II, p. 10. On ne trouve pas le passage de Théon dans ses ouvrages imprimés. *Delambre* penche tantôt vers une explication du signe grec pour zéro comme abréviation de *ouden*, tantôt il voudrait le dériver d'une relation particulière du numératif *omicron* avec les fractions sexagésimales, *loc. cit.*, t. II, p. 14, et *Journal des Savants*, 1817, p. 539. Il est singulier que dans l'ancienne arithmétique indienne de la *Lilawati*, zéro placé près d'un nombre indique qu'il faut retrancher le nombre, *Delambre*, t. I, p. 540. Qu'est-ce que désigne le *ling* (un véritable zéro), écrit dans les chiffres chinois sous 12, signe en Occident est donc antérieur de beaucoup à l'invasion des Arabes. Voir l'écrit de *Planude* sur les *Arithmoi indikoi*.

TROISIÈME MÉTHODE. — *Multiplication de la valeur par des coefficients*. Ce que chez les *Chinois* nous avons trouvé comme indicateurs dans l'écriture perpendiculaire, la différence entre $\underset{2}{X} = 12$ et $\overset{2}{X} = 20$, se trouve répété en direction horizontale chez les *Grecs*, les *Arméniens* et les habitants parlant *tamoul* de la partie méridionale de la péninsule indienne. *Diophante* et *Pappus* écrivent β Mu pour deux fois dix mille ou 20000, tandis que αMu β (lorsque β se trouve à droite de l'initiale de la myriade) signifie une fois dix mille plus deux ou 10002. La même chose a lieu dans les chiffres *tamoul*, comme qui dirait $4\,X = 40$ et $X4 = 14$. Dans le pehlwi de l'ancienne Perse, suivant *Anquetil*, et dans l'*arménien*, suivant *Cerbied* (*), on reconnaît des multiplicateurs placés à gauche pour exprimer les multiples de 100. Il faut aussi rapporter à cette méthode le point de *Diophante*, mentionné ci-dessus, qui remplace Mu et multiplie en 1000 ce qui précède (**).

QUATRIÈME MÉTHODE. — *Multiplication et diminution ascendantes et descendantes*, *par division en rangées de nombres dont la valeur diminue en progression géométrique*. *Archimède* dans les octades, *Apollonius* dans les tétrades, n'ont employé cette notation que pour

---

13, 22, 132? Dans les inscriptions romaines, des zéros sont des oboles répétées plusieurs fois (*Bockh*, Économie nationale des Athéniens, B. 2, p. 379).

(*) *Grammaire arménienne*, 1823, p. 25.

(**) De telles divisions au moyen de points, qui, d'une manière d'ailleurs très-inconséquente, indiquent une valeur de position, on trouve aussi en trois endroits de *Pline*, souvent discutés (t. VI, p. 24-33; t. XXX, p. 3).

des nombres au delà de $(10000)^2$, pour les 100 millions ou myriades de myriades (*). Ici il y a évidemment valeur de position des mêmes signes, se suivant en rangées différentes; il y a donc valeur absolue et relative, comme dans l'échelle sexagésimale descendante des astronomes alexandrins, pour indiquer les degrés, les minutes et les secondes. Mais puisque, en ce dernier cas, faute de $n - 1$ ou 59 signes, chaque rangée est composée de 2 chiffres, la valeur de position ne peut pas offrir l'avantage des nombres indiens. Lorsque les trois cent soixantièmes de la circonférence sont considérés comme entiers, les minutes sont des soixantièmes de cet entier, les secondes des soixantièmes des minutes, etc.; comme fractions, ils reçurent de *Ptolémée* le signe de fraction, l'accent ajouté en haut, et pour indiquer la progression descendante, dans laquelle chaque rangée de 2 chiffres est 60 fois plus petite que la précédente, les accents furent multipliés de rangée en rangée. De cette manière, les minutes reçurent le simple accent des fractions grecques ordinaires (ayant l'unité pour numérateur), les secondes reçurent deux accents, les tierces trois, les degrés mêmes, comme entiers, pas d'accent, peut-être comme *rien* (*ouden*) un zéro (**). Je dis *peut-être*, car dans *Ptolémée* et *Théon*, les zéros, comme signes de degrés, manquent encore.

(*) *Delambre*, Hist. de l'astr. ancienne, t. I, p. 105; t. II, p. 9.

(**) Relativement à l'emploi du signe zéro, V. *Leslie*, p. 12-135; *Ruithen*, Germanen und Griechen Hist., II, p. 2-33; *Ducange*, Glossar. mediæ græcitatis, t. II, p. 572; *Maumert*, De numerorum quos arabicos vocant origine; *Pythagor.*, p. 17. Dans l'arithmétique grecque, M° désigne une unité, *monas*, de même qu'un *delta* avec un zéro (proprement omicron) superposé, signifie *tetartos*; *Bast*, *Gregor.*, *Cor.*, p. 851. Ainsi chez Diophante, M°κα est 21. Le signe grammatical indien *auuswara* a, en effet, la forme d'un zéro indien (*sunga*). Mais il n'indique qu'une modification de la prononciation de la voyelle placée à côté et est entièrement étranger au *sunga*.

La simple énumération des différentes méthodes employées par des peuples auxquels l'arithmétique indienne était inconnue, pour exprimer les multiples des groupes fondamentaux, présente, je crois, l'explication du développement successif du système indien. En écrivant 3558 perpendiculairement et horizontalement au moyen d'indicateurs $\overset{3}{\mathrm{M}}\ \overset{5}{\mathrm{C}}\ \overset{6}{\mathrm{X}}\ \overset{8}{\mathrm{I}}$, on reconnaît facilement qu'on peut se passer des signes des groupes M, C.... Or, nos chiffres indiens ne sont autre chose que les multiplicateurs des différents groupes. Cette notation, au moyen de seules unités (multiplicateurs), est rappelée d'ailleurs par les cordons successifs du *suanpan* représentant les mille, les centaines, les dizaines et les unités. Ces cordons, dans l'exemple donné, montraient 3, 5, 6 et 8 boules. Là on ne voit point de signes de groupe. Les signes de groupes sont les positions mêmes, et ces positions (cordons) sont remplies par les unités (multiplicateurs). Donc, par les deux voies de l'arithmétique *figurative et palpable*, on est conduit à la *position* indienne. Si le cordon est *vide*, que la place en écrivant reste libre, qu'il manque un groupe (un terme de la progression), le vide est rempli graphiquement par l'hiéroglyphe du vide, un cercle vide : *sunga*, *sifron*, *zûphra* (*).

Que la notation numérative ne s'est perfectionnée dans l'*Inde* que successivement, c'est ce qui est confirmé par le chiffre *tamoul* qui, au moyen de 9 signes d'unités et de signes de groupes pour 10, 100 et 1000, exprime toutes les valeurs à l'aide de multiplicateurs ajoutés à gauche; cela est confirmé aussi par les étranges *arithmoi indikoi*

(*) En anglais *cypher* s'est conservé pour indiquer zéro, tandis que dans les langues occidentales qui emploient *zéro* (*sifron, siron*) pour zéro, *chiffre* n'indique qu'un numératif en général. En sanscrit, suivant *Wilson*, nombre ou quantité s'appelle *sambhara*.

de la scolie du moine *Néophytos* conservé à la bibliothèque de Paris (*Cod. reg*, fol. 15), et dont je dois la connaissance à la communication bienveillante de M. le professeur *Brandis*. Les 9 chiffres de *Néophytos*, hormis le 4, sont tout à fait semblables aux chiffres persans. Les chiffres 1, 2, 3 et 9 se trouvent même dans des inscriptions numériques égyptiennes (*). Les 9 unités sont multipliés par 10, 100 ou 1000 par la superposition de un, deux ou trois zéros, comme qui écrirait

$$\overset{0}{2} = 20,\quad \overset{0}{2}4 = 24,\quad \overset{0\,0}{4} = 400,\quad \overset{0}{\overset{0\,0}{6}} = 6000.$$

En imaginant des points au lieu de zéros, on a le chiffre arabe *gobar*. Voici une traduction latine textuelle de cette scolie. Le moine nomme par erreur *tzûphron* un mot indien.

« Tzyphra est et vocatur id, quod cuivis litteræ inde » a decade et insequentibus numeris quasi ὀμικρόν inscri» bitur. Significat autem hac indica voce tali analogiam » numerorum. Ubi igitur scriptum est simile primæ lit» teræ ἄλφα, pro unitate scriptæ, atque super impositum » habet vel punctum vel quasi ὀμικρόν, addita altera figu» ra litteræ indicæ, differentiam et augmentum numero» rum declarat. E. g. pro primo græco numero, ᾱ scrip» to, apud Indos | sive linea recta perpendicularis, » quando non habet superimpositum punctum vel ὀμικρόν, » ipsum hoc denotat unitatem; ubi vero superimpositum » sit punctum atque altera littera adscripta sit, figura » quidem similis priori, significat XI, propter addita» mentum similis litteræ atque superimpositum unum » punctum. Similiter etiam in reliquis litteris, quemad» modum adspectus docet. Si vero plura habet puncta,

(*) *Kosegarten*, p. 54.

» plura denotat. Quod intelligas, lector, et supputes » unumquidque. »

On ne connaît ici pas plus de position que dans la méthode *gobar*. On écrivit donc 3006 ainsi : $\overset{000}{3}\;6$; mais on devait remarquer bientôt que les mêmes chiffres revenaient avec d'autres valeurs, que (si tous les groupes étaient remplis), dans $\overset{000}{3}\;\overset{00}{4}\;\overset{0}{6}\;7$, les points ou zéros, diminués ainsi régulièrement, devenaient superflus. Ces zéros ne faisaient en quelque sorte que faciliter la prononciation des nombres. Si l'usage s'introduisait d'écrire les zéros à côté au lieu d'au-dessus des chiffres, on avait la notation indienne actuelle du groupe simple $\overset{000}{3} = 3000$. Si l'on voulait ajouter $\overset{000}{3}$ ou 3000 à $\overset{0}{4} = 40$ on remplissait cette place qui est assignée à 40 par son exposant ou indicateur de groupe. Ainsi on obtenait 3040, et des 3 zéros, attribut caractéristique des mille, *descendus* à la ligne des unités, il restait deux comme places vides. Suivant la scolie de Néophytos, les zéros sont donc (comme les points du *gobar*) des indicateurs pour la notation des groupes ascendants, et l'on conçoit, d'après les réflexions qu'on vient de développer, comment ces zéros, lorsque la valeur de position des chiffres fut introduite, pouvaient descendre dans la ligne et s'y maintenir.

En jetant encore un coup d'œil rétrospectif sur le grand nombre de méthodes de notation des peuples des deux continents, trop peu connues, nous remarquons :

1°. Peu de signes de groupes et presque exclusivement pour n^2, n^3, n^4..., non pas pour $2n$, $3n$ et $2n^2$, $3n^2$,..., comme chez les *Romains* (*) et les *Tusciens* X, C, M

(*) Nous faisons abstraction, dans la vue d'abréger, des signes de groupes du système secondaire quinaire V, L, D,.....

(de sorte que tous les degrés intermédiaires, par exemple $2n$ ou $2n^2$, sont exprimés par juxtaposition XX, CCC);

2°. Beaucoup de signes de groupes, non-seulement pour n, n^2 (*iota* et *rho* des lettres numératives grecques), mais aussi pour $3n$ ou $4n^2$ (λ et ν), ce qui produit une grande *hétérogénéité* des éléments de l'expression pour $2 + 2n + 2n^2$ (par exemple σκβ pour 222);

3°. Expression des multiples du groupe fondamental et de ses puissances ($2n$, $3n$, $4n^2$, $5n^2$), soit par l'apposition (en bas ou au-dessus) d'indicateurs aux signes de groupes (chinois: $\overset{2}{\mathrm{X}}$, $\overset{3}{\mathrm{X}}$, $\overset{4}{\mathrm{C}}$, $\overset{5}{\mathrm{C}}$; indien-tamoul: 2 X, 3 X, 4 C, 5 C), soit par une ponctuation ou accentuation graduelle des 9 premiers signes d'unités, de sorte que,

$$\dot{\alpha} = 10,\quad \dot{\beta} = 20,\quad \ddot{\alpha} = 100,\quad \dddot{\alpha} = 1000,\quad \ddot{\ddot{\delta}} = 40000;$$

en *gobar*, dans la scolie de *Néophytos* et dans l'échelle sexagésimale descendante des *astronomes alexandrins*, pour $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$, en écrivant, par exemple,

$$1^{\circ}\,37'\,37''\,37'''\ldots$$

Nous avons vu, enfin, comment les indicateurs (multiplicateurs) des peuples de l'Asie orientale, des habitants de la partie méridionale de la péninsule indienne, ou, s'il existait originairement des signes de groupes différents pour n, n^2, n^3, comment l'accentuation des *puthmènes* du système *gobar* ou de la scolie de *Néophytos;* enfin, comment les cordons du *suanpan*, dans lequel une valeur élevée à une puissance n'est exprimée que par la position relative du cordon, pouvaient conduire à la valeur de position.

Si le simple système de position indien a été introduit en Occident par suite du séjour que le savant astronome

Rihan Mahommed ebn Ahmet Albiruni fit dans l'Inde (*) ou par des douaniers moresques de la côte septentrionale de l'Afrique et le commerce qui s'établissait entre ceux-ci et les marchands italiens, c'est ce que, ici, nous laissons indécis. Malgré l'antiquité de la culture indienne, il est tout aussi incertain si le système de position qui a si puissamment influencé l'état des mathématiques était connu déjà du temps de l'expédition macédoine au delà de l'Inde. Combien *Archimède*, *Apollonius de Perge* et *Diophante* auraient transmis plus perfectionnées les sciences mathématiques à l'âge savant des *Hachémites*, si l'Occident avait reçu douze ou treize siècles plus tôt, par l'expédition d'Alexandre, l'arithmétique indienne de position! Mais la partie de l'Inde antérieure, qui fut traversée par les Grecs, le *Pendjab* jusque vers *Palibothra*, était, suivant les savantes recherches de M. *Lassen*, habitée par des peuples peu cultivés. Ils furent même appelés Barbares par ceux qui habitaient plus vers l'orient. Ce n'est que *Seleucus Nicator* qui pénétra au delà de la limite qui séparait la civilisation de la barbarie, depuis le fleuve *Sarasvatis* (**) jusqu'au *Gange*. De l'ancien chiffre indien *tamoul*, qui exprime $2n$, $3n^2$,... par des multiplicateurs apposés, et par conséquent a, outre les signes des neuf premières unités, des signes particuliers pour n, n^2, n^3,..., nous concluons que dans l'Inde, à côté du système à valeur de position nommé presque exclusivement indien (ou arabe), il existait aussi d'autres systèmes de chiffres sans valeur de position. Peut-être ni Alexandre ni ses successeurs bactriens, en pénétrant temporairement dans l'Inde, ne venaient-ils en

(*) C'est l'opinion émise par le savant orientaliste M. Sédillot, connaisseur également profond de l'astronomie grecque et de l'astronomie arabe.

(**) *Lassen*, Comment. geogr. de Pentapot, p. 58.

contact avec des nations chez lesquelles la méthode de position était exclusivement en usage.

Puissent les traces de tout ce qui reste encore à découvrir être poursuivies bientôt avec plus de zèle, soit par des philologues ayant l'occasion d'examiner des manuscrits grecs, persans ou arabes (*), soit par des voyageurs séjournant dans la péninsule indienne même. Rien que la pagination de vieux volumes manuscrits de la littérature sanscrite peut conduire à des observations remarquables. Qui aurait soupçonné, par exemple, que parmi les *Indiens*, à côté de l'arithmétique décimale de position, il existait un système sédécimal sans position; que certains peuples indiens comptaient de préférence suivant des groupes de 16, comme les peuples américains, les *Kymres* et les *Basques* suivant des groupes de 20? Or une telle numération singulière a été découverte, il y a plus de dix ans, dans un manuscrit de l'ancien poëme indien *Mahabharata* (*Cod. Reg.*, Paris, page 178), par M. le professeur *Bopp* qui, du temps où je présentai mon premier Mémoire sur les *chiffres des peuples* à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, a bien voulu me la communiquer pour que je la fasse connaître. Soixante-cinq pages de ce manuscrit sont paginées de lettres numératives indiennes, cependant de manière que seulement les consonnes de l'alphabet sanscrit (*k* pour 1, *k h* pour 2...) soient employées, ce qui est en contradiction avec le préjugé (**) bien généralement répandu jusqu'à présent,

---

(*) Parmi les manuscrits arabes, je recommande surtout ceux qui traitent des affaires des finances ou de l'arithmétique en général, par exemple, *Abn Jose Alchindus*, De arithmetica indica; *Abdel Hamid ben vasee Abalphadl*, De numerorum proprietatibus; *Ahmad ben Omar Alkarabisi*, Liber de indica numerandi ratione; l'Algèbre indienne de *Katka; Mohammed ben Lara*, De numerorum disciplina (*Casici*, Bibl. arabico-hispana, t. I, p. 353, 405, 410, 426, 433).

(**) Si l'arithmétique de position n'est pas originaire de l'Inde, elle qu'on trouve employés dans l'Inde exclusivement des chiffres et non pas des lettres en guise de chiffres, comme chez les peuples sémitiques et chez les Grecs. A la soixantième page commence la remarquable notation sédécimale. Dans les premiers 15 puthmènes, c'est à peine si l'on reconnaît deux signes qui sont des lettres sanscrites, *t* aspiré et *d*, et semblent correspondre à 3 et à 12 respectivement; on y retrouve aussi peu les signes nommés proprement indiens (arabes). Il est remarquable que le chiffre 1 avec un zéro apposé signifie 4, et que le chiffre 1 redoublé (deux traits perpendiculaires) avec un zéro apposé signifie 8; ce sont pour ainsi dire des points d'arrêt, des degrés intermédiaires du système sédécimal, pour $\frac{1}{4}n$ et $\frac{1}{2}n$; mais $\frac{3}{4}n$ (12) est sans zéro et a un propre hiéroglyphe, semblable au 4 arabe. Pour le groupe normal 16 et pour ses multiples $2n$, $3n$,..., on emploie les chiffres *bengali* connus, en sorte que 16 est exprimé par le 1 bengali précédé d'un trait courbé; 32 par le 2 bengali; 48 par le 3 bengali. Les multiples de n ne sont donc que comme des nombres de premier, second, troisième... ordre; les nombres $2n + 4$ ou $3n + 6$ (c'est-à-dire, dans le système sédécimal, 36 et 54) sont désignés par un 2 bengali et un chiffre mahabharata (*) 4 placé à côté, ainsi que par un chiffre bengali 3 et un chiffre mahabharata 6; méthode de numération très-régulière, mais incommode et compliquée, et dont l'origine est d'autant plus énigmatique qu'elle présuppose la connaissance des chiffres bengali.

---

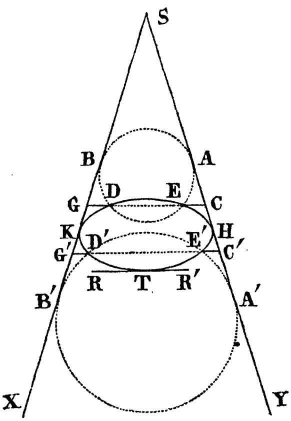
doit au moins y avoir existé de temps immémorial; car on ne trouve chez les Indiens aucune trace d'une notation alphabétique telle que la notation des Hébreux, des Grecs et des Arabes (*Delambre*, Hist. de l'Astr. ancienne, t. I, p. 543).

(*) Je me sers ici de cette expression impropre uniquement pour désigner par un terme convenable le système de chiffres que présente une copie de ce poëme.

TANGENTES COMMUNES A UNE CONIQUE ET A UN CERCLE.

Problème. *Par deux points* D, E, *donnés sur une ellipse* HEDK, *on fait passer une circonférence quelconque* DEAB, *puis on mène à ces deux courbes des tangentes communes* HAS, KBS : *trouver le lieu géométrique du point* S *de rencontre de ces tangentes.*

(Chasles.)



Pour résoudre cette question, j'établirai le lemme suivant :

Soient HEDK, DEAB, *une ellipse et une circonférence tangentes aux deux droites* SX, SY, *et se coupant en deux points* D, E : *si l'on mène dans l'ellipse une corde quelconque* D′E′ *parallèle à* DE, *il sera toujours possible de faire passer par les deux points* D′, E′, *une circonférence qui soit tangente aux deux droites* SX, SY.

Je prolonge les cordes parallèles DE, D′E′, jusqu'à ce qu'elles coupent les tangentes aux points C, G, C′, G′; et je prends C′A′ moyenne proportionnelle entre C′E′, C′D′, et de même G′B′ moyenne proportionnelle entre G′E′, G′D′. La circonférence conduite par les trois points D′, E′, A′ sera tangente à la droite SY en A′; de même, la circonférence qui passe par D′, E′, B′ touche la droite SX en B′. Pour faire voir que ces deux circonférences coïncident, il suffit de démontrer qu'on a

$$SA' = SB',$$

ou, ce qui revient au même,

$$AA' = BB'.$$

Je nomme a, b, c, les diamètres de l'ellipse respectivement parallèles aux droites DE, SX, SY : d'après le théorème de Newton, on a, en désignant par K et H les points où l'ellipse touche SX, SY,

$$\frac{GD \times GE}{\overline{GK}^2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{GB}^2}{\overline{GK}^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

ce qui donne

$$GB = GK \times \frac{a}{b};$$

de même

$$G'B' = G'K \times \frac{a}{b},$$

d'où

$$GB + G'B' = GG' \times \frac{a}{b},$$

et, par suite,

$$BB' = GG'\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

On aura semblablement

$$AA' = CC'\left(1 + \frac{a}{c}\right);$$

d'où

$$\text{(1)} \qquad \frac{GG'}{CC'} = \frac{BB'}{AA'}\left(\frac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{a}{b}}\right).$$

De plus

$$SK = SG + GK = SG + GB.\frac{b}{a} = SG + (SG - SB)\frac{b}{a}$$

$$= SG\left(1 + \frac{b}{a}\right) - SB.\frac{b}{a};$$

de même

$$SH = SC\left(1 + \frac{c}{a}\right) - SA.\frac{c}{a}.$$

Mais, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{SK}{SH} = \frac{b}{c},$$

ou

$$SK \times c = SH \times b.$$

Ce qui donne, en remplaçant SK et SH par leurs valeurs,

$$SG\left(c + \frac{bc}{a}\right) - SB\frac{bc}{a} = SC\left(b + \frac{bc}{a}\right) - SA\frac{bc}{a}.$$

Ou, parce que SB = SA,

$$SG\left(\frac{ac+bc}{a}\right) = SC\left(\frac{ba+bc}{a}\right);$$

il en résulte

$$\frac{SG}{SC} = \frac{ba+bc}{ac+bc} = \frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{b}+1}.$$

Remplaçant $\dfrac{\dfrac{a}{c}+1}{\dfrac{a}{b}+1}$ par $\dfrac{SG}{SC}$ dans l'égalité (1), il viendra

$$\frac{GG'}{CC'} = \frac{BB'}{AA'} \times \frac{SG}{SC}.$$

Or, à cause des parallèles GC, G'C', on a

$$\frac{GG'}{CC'} = \frac{SG}{SC};$$

donc

$$\frac{BB'}{AA'} = 1, \quad \text{ou} \quad AA' = BB';$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

De là nous conclurons que le lieu géométrique reste le même quelle que soit la grandeur ou la position de la corde DE, pourvu que sa direction ne change pas. Que si, par exemple, au lieu de faire passer les circonférences par les extrémités de la corde DE, on les mène par les extrémités de D'E', on trouvera absolument les mêmes points de rencontre pour les tangentes communes. Cette conclusion étant vraie quelque rapprochées que soient les extrémités D', E' de la corde, doit encore subsister lorsque ces deux points se confondent. Dans ce cas, la corde D'E' devient la tangente RTR' à l'ellipse; les circonférences sont elles-mêmes tangentes à l'ellipse au point T. On sait déjà (*Nouvelles Annales*, tome III, page 495) qu'alors le lieu géométrique est une hyperbole qui a les mêmes foyers que l'ellipse (*).

G.

(*) La solution purement analytique présente des difficultés de calcul, à cause des *quatre* tangentes communes. Cette solution serait très-instructive (*voir* tome III, page 431).

TM.

NOTE SUR LA FORMULE DE SIMPSON ET SUR UNE AUTRE FORMULE DE QUADRATURES*;

Par E. CATALAN.

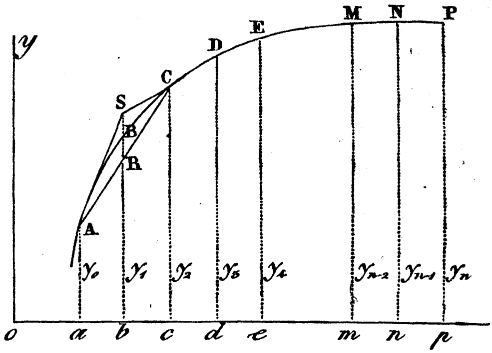
(Communiquée à la Société Philomathique.)

Pour évaluer l'aire comprise entre un arc de courbe, l'axe des abscisses et deux ordonnées extrêmes, il faut, après avoir inséré, entre ces deux dernières droites, un nombre impair d'ordonnées équidistantes, remplacer la courbe donnée par des arcs de paraboles tels, que chacun d'eux passe par les extrémités de trois ordonnées consécutives, et faire la somme des segments paraboliques ainsi obtenus.

Telle est la *Méthode de Robert Simpson*.

Il n'est pas difficile de voir que cette méthode doit, en général, conduire à des résultats peu approchés. En effet, les paraboles substituées à la courbe proposée, au lieu de former une ligne continue, présentent, le plus souvent, des *jarrets* à leurs points d'intersections; car chacune d'elles est déterminée indépendamment de celle qui la précède et de celle qui la suit. En cherchant à corriger le défaut inhérent à la formule de Simpson, j'en ai rencontré une autre qui, si je ne me trompe, pourra presque toujours être préférée à la formule de Simpson et à celle de M. Poncelet.

Pour arriver à cette formule, proposons-nous d'abord de remplacer une courbe donnée, par une suite de paraboles du second degré.



AP étant l'arc donné, menons les ordonnées extrêmes Aa, Pp; divisons l'intervalle ap en un nombre *quelconque* n de parties égales; puis élevons les ordonnées bB, cC,..., Nn.

Cela étant, faisons passer, par les trois points consécutifs A, B, C, une parabole dont l'axe soit parallèle à Aa, *et conservons seulement l'arc* AB *de cette ligne.* De même, par les trois points B, C, D, faisons passer une nouvelle parabole, et ne conservons que la partie BC de cette courbe, etc. En continuant ainsi, nous arriverons aux trois derniers points M, N, P, que nous joindrons par un arc parabolique, pris cette fois dans son entier.

Il est visible que les paraboles employées dans cette construction se *raccordent* mieux que celles du tracé de Simpson; car deux arcs consécutifs, au lieu d'avoir seulement un point de commun, en ont deux. Si donc on fait la somme de tous les segments paraboliques AaBb, BbCc,..., MnPp, on aura une aire A′ qui différera assez peu de l'aire cherchée A.

Il est bon d'observer pourtant que, la construction étant irrégulière dans la partie MNP de la courbe, la valeur de A′ ne sera pas symétrique. Mais si l'on refait, dans un ordre inverse, cette même construction, et que l'on prenne la moyenne des deux aires A′, A″ obtenues, on aura, à fort peu près, la valeur de A.

Développons les calculs qui viennent d'être indiqués.

Désignons par y_0, y_1, y_2,..., y_{n-1}, y_n les ordonnées des points A, B, C,..., N, P, et par δ l'intervalle de deux ordonnées consécutives. Menons la corde ARC; prenons BS = BR, et menons AS; cette droite sera tangente à l'arc AB de la parabole ABC. Or, le *triangle parabolique* ABR est les deux tiers du *triangle rectiligne* ARS; donc

$$\mathrm{ABR} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{RS}.ab = \frac{2}{3}\mathrm{BR}.ab = \frac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0+y_2}{2}\right)\delta.$$

D'ailleurs,

$$\mathrm{AR}\,ab = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y_0+y_2}{2}\right)\delta.$$

Donc, en ajoutant,

$$\mathrm{AB}\,ab = \left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{y_0+y_2}{12}\right)\delta.$$

Un simple changement d'*indices* donne ensuite

$$\mathrm{BC}\,bc = \left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{y_2+y_4}{12}\right)\delta,$$

$$\mathrm{CD}\,cd = \left(\frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3 - \frac{y_3+y_5}{12}\right)\delta,$$

. . . .

$$\mathrm{MN}\,mn = \left(\frac{1}{2}y_{n-2} + \frac{2}{3}y_{n-1} - \frac{y_{n-2}+y_n}{12}\right)\delta,$$

$$\mathrm{NP}\,np = \left(\frac{1}{2}y_n + \frac{2}{3}y_{n-1} - \frac{y_n+y_{n-2}}{12}\right)\delta.$$

La somme de ces valeurs sera

$$\mathrm{A}' = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathrm{S} - y_{n-1}) + \frac{2}{3}(\mathrm{S} - y_0 - y_n + y_{n-1}) \\ - \frac{2\mathrm{S} - y_{n-1} - y_0 - y_1 + y_{n-2}}{12} \end{array}\right]\delta,$$

ou

$$A' = \left(S - \frac{7}{12}y_0 + \frac{1}{12}y_1 - \frac{1}{12}y_{n-2} + \frac{1}{4}y_{n-1} - \frac{2}{3}y_n\right)\delta,$$

S étant la somme de toutes les ordonnées.

Changeant y_0 en y_2, y_1 en y_{n-1}, etc., nous aurons

$$A'' = \left(S - \frac{7}{12}y_n + \frac{1}{12}y_{n-1} - \frac{1}{12}y_2 + \frac{1}{4}y_1 - \frac{2}{3}y_0\right)\delta;$$

d'où

$$A' + A'' = \left[\begin{array}{l} 2S - \frac{5}{4}(y_0 + y_n) + \frac{1}{3}(y_1 + y_{n-1}) \\ \quad - \frac{1}{12}(y_2 + y_{n-2}) \end{array}\right]\delta.$$

La formule cherchée est donc

$$A = \left[S - \frac{5}{8}(y_0 + y_n) + \frac{1}{6}(y_1 + y_{n-1}) - \frac{1}{24}(y_2 + y_{n-2})\right]\delta\ (*).$$

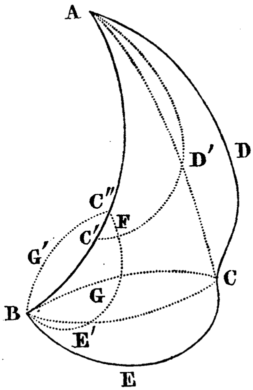
Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface d'une sphère, est le plus petit des arcs du grand cercle qui passe par ces points;

Par M. BARBET,
Chef d'institution.

Si l'on suppose entre A et B une ligne ADCEB autre que l'arc de grand cercle AB qui les joint, cette ligne ne

(*) Contrairement à ce que j'avais cru d'abord, cette formule n'est pas nouvelle : elle n'est même qu'un cas particulier de celle que fournit le calcul des différences. (Lacroix, tome III, page 183.) En publiant cette Note, je n'ai donc eu qu'un but, celui d'être utile aux élèves.

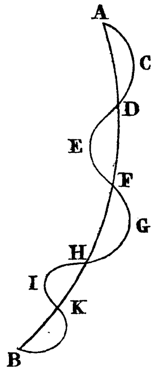
sera pas le plus court chemin entre A et B, car on pourra en trouver un plus court.



Pour le démontrer, on prend sur la ligne ADCEB un point C ; on le joint aux points A et B par les arcs de grand cercle AC, BC, et l'on forme un triangle sphérique ABC dans lequel on a AB $<$ AC $+$ BC. Donc si l'on fait pivoter autour du point A, sur la surface de la sphère, la portion de ligne ADC et l'arc de cercle AC jusqu'à ce que le point C vienne en C′, et si l'on opère de même sur la portion de ligne BEC et l'arc de cercle BC, par rapport au point B, le point C tombe sur AB entre A et C′ au point C″. Les deux parties du chemin deviennent AD′C′, BE′C″ et se coupent en F, de telle sorte que le chemin AD′FE′B est plus court que le chemin ADCEB de la ligne brisée C′FC″.

1[re] *Remarque*. Le succès de cette démonstration résulte de ce que les deux arcs de cercle AC et BC ayant été rabattus sur l'arc AB, la portion BE′C″ du chemin ADCEB coupe en F la portion AD′C′. Il pourrait se faire que la deuxième portion du chemin, au lieu d'avoir la position CEB, eût la position CGB, de telle sorte qu'après le rabattement de l'arc BC sur BA cette portion CGB prît la position $C''G'B$. Il n'y aurait pas alors de point de rencontre de cette portion $C''G'B$ avec $AD'C'$. Mais s'il y a d'un côté d'un arc de grand cercle BC une ligne BGC, on peut en concevoir une BEC symétriquement placée de l'autre côté, et égale à la première Substituant celle-ci à l'autre, on peut prendre au lieu du chemin ADGEB le chemin égal ADCEB, auquel on applique la démonstration précédente.

2e *Remarque*. Si la ligne qui va du point A au point B, autre que l'arc de cercle AB, au lieu d'être placée entièrement d'un même côté de l'arc AB, le coupait en plusieurs points D, F, H, K, on établirait comme ci-dessus que chaque segment tel que AD est plus petit que la partie correspondante ACD de la ligne, autre que l'arc de grand cercle AB, qui va du point A au point B. Et en ajoutant membre à membre toutes ces inégalités on en conclurait arc AB $<$ ACDEFGHIKB.



INTÉGRATION DE DEUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. J. DUPAIN,
Élève de l'École Normale.

On propose d'intégrer le système d'équations simultanées suivant :

$$(1)\qquad y\frac{d^2z}{dx}+2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+a\sin z=0,$$

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-y\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-a\cos z=0.$$

Nous prendrons de nouvelles variables t, u liées aux anciennes par les relations

$$t=y\sin z,\qquad u=y\cos z.$$

Les premiers principes du calcul différentiel nous feront connaître les dérivées de t et de u,

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dx}\sin z+y\cos z\frac{dz}{dx},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\cos z-y\sin z\frac{dz}{dx},$$

$$(3)\qquad \frac{d^2t}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\sin z+2\cos z\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}-y\sin z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+y\cos z\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$(4)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\cos z-2\sin z\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}-y\cos z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-y\sin z\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Ajoutons au second nombre de l'équation (4) le premier membre de l'équation (1) multiplié par $\sin z$, et retranchons-en le premier membre de l'équation (2) multiplié par $\cos z$; il vient, réductions faites,

$$(5)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}=a.$$

Une combinaison analogue des équations (1), (2), (3) conduit à

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0; \tag{6}$$

les équations (5), (6) fournissent immédiatement les intégrales

$$u = \frac{ax^2}{2} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}, \qquad t = \mathrm{C}x + \mathrm{D},$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. On repasse aisément aux variables y, z,

$$z = \text{arc tang}\,\frac{t}{u}, \qquad y = \sqrt{t^2 + u^2};$$

les intégrales demandées sont donc

$$z = \text{arc tang}\,\frac{2(\mathrm{C}x + \mathrm{D})}{ax^2 + 2\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}},$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4(\mathrm{C}x + \mathrm{D})^2 + (ax^2 + 2\mathrm{A}x + 2\mathrm{B})^2}.$$

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

PAR M. STURM.

On doit à M. Poinsot une nouvelle théorie fort ingénieuse de la rotation des corps, aujourd'hui bien connue et appréciée des géomètres. Toutefois l'ancienne méthode analytique est encore en usage, précisément parce qu'elle exige moins de raisonnement. Il peut donc être utile de simplifier la partie essentielle de cette analyse, qui est la formation des équations d'Euler, d'où l'on déduit ensuite toutes les circonstances du mouvement et même les propriétés nouvelles découvertes par M. Poinsot.

Considérons d'abord en lui-même, et indépendamment des forces qui le produisent, le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. En adoptant les notations de la *Mécanique* de Poisson, soit O le point fixe, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque m du corps rapporté à trois axes fixes rectangulaires passant par le point O, et $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées du même point m rapporté à un autre système d'axes rectangulaires liés au corps et tournant avec lui autour du point O. Ces derniers axes seront dans la suite les axes d'inertie principaux du corps pour le point O. On a les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = ax_{,} + by_{,} + cz_{,}, \\ y = a'x_{,} + b'y_{,} + c'z_{,}, \\ z = a''y_{,} + b''y_{,} + c''z_{,}, \end{cases}$$

les cosinus a, b, c, etc., étant liés par les relations connues

$$(2)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0, \end{cases}$$

qui en entraînent d'autres équivalentes

$$(3)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0, \text{ etc.}$$

Les composantes de la vitesse v du point m parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz, ou les projections de cette vitesse sur les axes sont

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_{,}\dfrac{da}{dt} + y_{,}\dfrac{db}{dt} + z_{,}\dfrac{dc}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x_{,}\dfrac{da'}{dt} + y_{,}\dfrac{db'}{dt} + z_{,}\dfrac{dc'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x_{,}\dfrac{da''}{dt} + y_{,}\dfrac{db''}{dt} + z_{,}\dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Comme les axes fixes sont arbitraires, il nous est permis de supposer que leur position soit celle qu'occupe le système mobile des axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ au bout du temps t, position dont ce dernier système s'écartera après le temps t. Alors $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ deviennent les composantes $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$ de la vitesse v parallèles aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, au bout du temps t, pourvu qu'on prenne les valeurs de $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, etc., dans cette hypothèse. Or les relations (2) donnent, quels que soient les axes fixes,

$$\begin{gathered}
ada + a'\,da' + a''\,da'' = 0,\\
bdb + b'\,db' + b''\,db'' = 0,\\
cdc + c'\,dc' + c''\,dc'' = 0,\\
adb + a'\,db' + a''\,db'' + bda + b'\,da' + b''\,da'' = 0,\\
adc + a'\,dc' + a''\,dc'' + cda + c'\,da' + c''\,da'' = 0,\\
bdc + b'\,dc' + b''\,dc'' + cdb + c'\,db' + c''\,db'' = 0.
\end{gathered}$$

Si l'on suppose que ces axes fixes coïncident avec $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, au bout du temps t, on a alors

$$\begin{array}{lll}
a = 1, & b = 0, & c = 0,\\
a' = 0, & b' = 1, & c' = 0,\\
a'' = 0, & b'' = 0, & c'' = 1,
\end{array}$$

et les équations qui précèdent deviennent

$$\begin{array}{ll}
da = 0, & db + da' = 0,\\
db' = 0, & dc + da'' = 0,\\
dc'' = 0, & dc' + db'' = 0.
\end{array}$$

On aurait les mêmes résultats en différentiant les équations (3).

Posons

$$\frac{db''}{dt} = -\frac{dc'}{dt} = p,\quad \frac{dc}{dt} = -\frac{da''}{dt} = q,\quad \frac{da'}{dt} = -\frac{db}{dt} = r,$$

nous aurons

(5) $u_{,} = qz_{,} - ry_{,}, \quad v_{,} = rx_{,} - pz_{,}, \quad w_{,} = py_{,} - qx_{,}.$

Ces quantités p, q, r détermineront le déplacement après le temps dt des axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, liés au corps, car leurs directions nouvelles après le temps dt que nous désignons par Ox', Oy', Oz', font avec celles qu'ils ont au bout du temps t, et qu'on vient de prendre pour axes fixes, les angles qui ont pour cosinus $a + da$, $b + db$, etc.; en faisant

$$a = 1, \quad da = 0, \quad b = 0, \quad db = -rdt, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire qu'on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos x_{,} Ox' = a + da = 1, \\ &\cos x_{,} Oy' = db = rdt, \\ &\cos x_{,} Oz' = dc = -qdt, \\ &\cos y_{,} Ox' = da' = -rdt, \\ &\cos y_{,} Oy' = 1, \\ &\cos y_{,} Oz' = dc' = -pdt, \\ &\cos z_{,} Ox' = da'' = -qdt, \\ &\cos z_{,} Oy' = db'' = -pdt, \\ &\cos z_{,} Oz' = 1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on reprend des axes fixes quelconques Ox, Oy, Oz, les lignes $Ox_{,}$ et Oy' feront avec eux des angles ayant pour cosinus a, a', a'' et $b + db$, $b' + db'$, $b'' + db''$; on aura

$$\cos x_{,} Oy' \text{ ou } rdt = a(b + db) + a'(b' + db') + a''(b'' + db''),$$

ou

$$(7) \qquad rdt = adb + a'db' + a''db'',$$

et aussi

$$rdt = -\cos y_{,} Ox' = -b(a + da) - b'(a' + da') - b''(a'' + da''),$$

ou

$$(7) \qquad rdt = -bda - b'da' - b''da''.$$

On aura de même les expressions générales de pdt et qdt pour des axes fixes quelconques; et l'on en déduira les relations $\frac{dc}{dt}=aq-bp$, etc., $pda+qdb+rdc=0$, etc., qui se tronvent dans la *Mécanique* de Poisson, tome II, page 135; seconde édition.

Les points du corps dont la vitesse est nulle à l'époque t, se trouvent sur une droite OI représentée par les équations

$$qz_{,}-ry_{,}=0, \quad rx_{,}-pz_{,}=0, \quad py_{,}-qx_{,}=0,$$

ou

$$\frac{x_{,}}{p}=\frac{y_{,}}{q}=\frac{z_{,}}{r}.$$

Cette droite passe par le point fixe et fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Le corps tourne donc autour de cette droite pendant le temps infiniment petit dt. Mais la position de cet axe peut changer d'un instant à un autre; c'est pourquoi on l'appelle l'*axe instantané de rotation*. Les lieux des axes instantanés successifs dans le corps et dans l'espace sont deux surfaces coniques ayant pour sommet le point fixe O; elles *se touchent* à l'époque t suivant la droite qui est l'axe instantané actuel, et après le temps dt suivant une autre droite infiniment voisine qui a décrit un angle infiniment petit *du second ordre,* pour devenir le nouvel axe instantané. De sorte que le mouvement du corps n'est autre que celui du premier cone attaché au corps roulant, sans glisser sur la surface de l'autre cône fixe dans l'espace.

La vitesse angulaire de rotation autour de l'axe instantané est égale à $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ que je désignerai par ω.

En effet, la vitesse v d'un point quelconque m est

$$v = \sqrt{(qz_, - ry_,)^2 + (rx_, - pz_,)^2 + (py_, - qx_,)^2}$$
$$= \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2) - (px_, + qy_, + rz_,)^2}$$
$$= \sqrt{\omega^2 . \mathrm{O}m^2 - (\omega . \mathrm{O}m^2 - \cos \mathrm{IO}m)^2} = \omega . \mathrm{O}m . \sin \mathrm{IO}m = \rho\omega,$$

ρ étant la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe OI; ainsi ω est la vitesse angulaire.

On peut aussi l'obtenir, en cherchant la vitesse d'un point particulier, et la divisant par la distance de ce point à l'axe instantané. Si l'on choisit le point situé sur l'axe O$z_,$, à une distance de l'origine égale à l'unité, on a

$$x_, = 0, \quad y_, = 0, \quad z_, = 1,$$

et

$$u_, = q, \quad v_, = p, \quad w_, = 0,$$

d'où résulte

$$v = \sqrt{p^2 + q^2};$$

la distance de ce point à l'axe est

$$\sin \mathrm{IO}z_, \quad \text{ou} \quad \sqrt{1 - \cos^2 \mathrm{IO}z_,}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{r^2}{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

En divisant v par cette distance, on a bien la vitesse angulaire égale à $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ou ω.

On vérifie que la direction de la vitesse v est perpendiculaire au plan mOI, en observant que les formules (5) donnent les relations

$$x_, u_, + y_, v_, + z_, w_, = 0, \quad pu_, + qv_, + rw_, = 0.$$

Prenons les moments par rapport aux axes O$x_,$, O$y_,$, O$z_,$, de la quantité de mouvement mv du point m, comme si c'était une force (qu'on remplacerait, dans la théorie des couples, par une force égale et parallèle appliquée à l'origine et un couple).

Le moment de mv, par rapport $Ox_{,}$, est $m\,(w_{,}y_{,}-v_{,}z_{,})$, ou

$$my_{,}(py_{,}-qx_{,})-mz_{,}(rx_{,}-pz_{,}).$$

La somme des moments de tous les points du corps par rapport à l'axe $Ox_{,}$ est donc

$$p\sum m(y_{,}^2+z_{,}^2)-q\sum mx_{,}y_{,}-r\sum mx_{,}z_{,}.$$

Cette somme se réduit à Ap, en supposant que les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ soient les axes d'inertie principaux du corps pour le point O, et désignant par A la somme

$$\sum m(y_{,}^2+z_{,}^2).$$

Ainsi, en nommant A, B, C les trois moments d'inertie principaux du corps par le point O; Ap, Bq, Cr sont les sommes des moments des quantités de mouvement des points du corps par rapport aux axes principaux $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$. (Dans la théorie des couples, ces moments sont ceux de trois couples agissant dans les trois plans coordonnés $X_{,}$, $OY_{,}$,.... Ils donnent un couple résultant dont le moment $G=\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}$; la perpendiculaire à son plan fait avec les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ des angles qui ont pour cosinus $\frac{Ap}{G}$, $\frac{Bq}{G}$, $\frac{Cr}{G}$. M. Poinsot a remarqué que ce plan est le plan diamétral conjugué au diamètre de l'ellipsoïde central $AX^2+BY^2+CZ^2=1$, qui est dirigé suivant l'axe instantané, pour lequel les cosinus sont $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$.)

Si l'on prend des axes fixes quelconques, on aura la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Ox d'après les lois connues de la composition des moments ou des couples, en multipliant les moments

Ap, Bq, Cr relatifs aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, par les cosinus a, b, c des angles que OX fait avec ces axes, et ajoutant, c'est-à-dire que

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= \mathrm{A}pa + \mathrm{B}qb + \mathrm{C}rc, \\ \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= \mathrm{A}pa' + \mathrm{B}qb' + \mathrm{C}rc', \\ \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= \mathrm{A}pa'' + \mathrm{B}qb'' + \mathrm{C}rc''. \end{aligned}\right.$$

Équations du mouvement. Supposons maintenant que des forces motrices données agissent sur le corps solide. Désignons par X, Y, Z les composantes parallèles à des axes fixes de la force appliquée à la molécule m qui a pour coordonnées x, y, z. D'après le principe de d'Alembert, les forces perdues $\left(\mathrm{X} - m\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ etc.}\right)$ doivent se faire équilibre autour du point fixe O : il faut et il suffit pour cela que la somme de leurs moments, par rapport à chacun des axes fixes, soit égale à zéro, ce qui donne les trois équations

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \sum(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z) = \mathrm{L}, \\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \mathrm{M}, \\ \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \mathrm{N}; \end{aligned}\right.$$

en désignant par L, M, N les sommes de moments des forces motrices par rapport aux axes fixes,

$$\sum(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z), \quad \sum(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x), \quad \sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y).$$

La première équation peut s'écrire ainsi :

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \mathrm{L}.$$

Mais on a trouvé plus haut, équation (8),

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \mathrm{A}pa + \mathrm{B}qb + \mathrm{C}rc.$$

Donc on a

$$\frac{d}{dt}.(\mathrm{A}pa + \mathrm{B}qb + \mathrm{C}rc) = \mathrm{L},$$

ou

$$\mathrm{A}a\frac{dp}{dt} + \mathrm{B}b\frac{dq}{dt} + \mathrm{C}c\frac{dr}{dt} + \mathrm{A}p\frac{da}{dt} + \mathrm{B}q\frac{db}{dt} + \mathrm{C}r\frac{dc}{dt} = \mathrm{L}.$$

Faisons coïncider les axes fixes avec les axes principaux du corps $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, pris dans la position qu'ils occupent au bout du temps t. Nous aurons alors

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{db}{dt} = -r, \quad \frac{dc}{dt} = q.$$

En même temps il faut remplacer L ou $\sum m(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z)$ par la somme des moments des forces données

$$\sum m(\mathrm{Z}_{,}y_{,} - \mathrm{Y}_{,}z_{,}),$$

par rapport à l'axe $Ox_{,}$, que nous désignerons par $\mathrm{L}_{,}$.

L'équation précédente devient

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{B})qr = \mathrm{L}_{,}. \tag{10}$$

Les deux autres équations (9) donnent, de même,

$$\mathrm{B}\frac{dq}{dt} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})pr = \mathrm{M}_{,},$$

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})pq = \mathrm{N}_{,}.$$

Ce sont les formules d'Euler ; $\mathrm{L}_{,}$, $\mathrm{M}_{,}$, $\mathrm{N}_{,}$ désignant les moments des forces motrices par rapport aux axes principaux du corps à l'époque t.

On les obtient encore de la manière suivante :

D'après les lois de la composition des moments ou des couples, analogue à celle des forces, la somme Ap des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe $Ox_{,}$ est égale à la somme des moments par rapport aux axes fixes multipliés par les cosinus a, a', a'', des angles que $Ox_{,}$ fait avec ces axes fixes. Ainsi, l'on a

$$A p = a \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + a' \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)$$
$$+ a'' \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right),$$

et, en différentiant,

$$A \frac{dp}{dt} = a \sum m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + a' \sum m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$
$$+ a'' \sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \frac{da}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)$$
$$+ \frac{da'}{dt} \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + \frac{da''}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right),$$

ou, d'après les équations (9),

$$A \frac{dp}{dt} = a\mathrm{L} + a'\mathrm{M} + a''\mathrm{N} + \frac{da}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)$$
$$+ \frac{da'}{dt} \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + \frac{da''}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

Si l'on fait coïncider les axes fixes avec les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, au bout du temps t, cette équation deviendra

$$A \frac{dp}{dt} = \mathrm{L}_{,} + r.\mathrm{B}q - q.\mathrm{C}r,$$

ou

$$A \frac{dp}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{B}).qr = \mathrm{L}_{,}.$$

Car, dans cette coïncidence, on a

$$a = 1, \quad a' = 0, \quad a'' = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{da'}{dt} = r, \quad \frac{db''}{dt} = -q.$$

L devient $L_{,}$, et les sommes des moments

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\ \text{etc.},$$

deviennent celles qui se rapportent aux axes $Oy_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, c'est-à-dire Ap, Bq, Cr.

On arrive ainsi aux équations d'Euler sans avoir besoin de calculer les forces accélératrices d'un point quelconque parallèles à des axes fixes, ou aux axes principaux du corps, ni les forces centrifuges de M. Poinsot. Au surplus, on peut encore trouver les expressions de ces forces d'une manière assez simple.

Les projections de la vitesse v sur les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ étant données par les formules (5), sa projection sur l'un des axes fixes Ox, est

$$(11)\quad \frac{dx}{dt}=a(qz_{,}-ry_{,})+b(rx_{,}-pz_{,})+c(py_{,}-qx_{,}).$$

De là résulte

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=a\left(z_{,}\frac{dq}{dt}-y_{,}\frac{dr}{dt}\right)+b\left(x_{,}\frac{dr}{dt}-z_{,}\frac{dp}{dt}\right)\\&+c\left(y_{,}\frac{dp}{dt}-x_{,}\frac{dq}{dt}\right)+(qz_{,}-ry_{,})\frac{da}{dt}+(rx_{,}-pz_{,})\frac{db}{dt}\\&+(py_{,}-qx_{,})\frac{dc}{dt}.\end{aligned}$$

Si l'on prend encore pour axes fixes les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ dans la position où ils se trouvent à l'époque t, $\frac{d^2x}{dt^2}$ deviendra la composante $p_{,}$ de la force accélératrice du point m parallèle à l'axe $Ox_{,}$, et l'on aura $\left(\text{en faisant}\right.$

$\left. a=1,\ b=0,\ c=0,\ \frac{da}{dt}=0,\ \frac{db}{dt}=r,\ \frac{dc}{dt}=q\right)$

$$p_{,}=z_{,}\frac{dq}{dt}-y_{,}\frac{dr}{dt}+(py_{,}-qx_{,})q-(rx_{,}-pz_{,})r,$$

ou

$$p_{,} = z_{,}\frac{dq}{dt} - y_{,}\frac{dr}{dt} - (p^2+q^2+r^2)x_{,} + p(px_{,}+qy_{,}+rz_{,})\ (*).$$

On connaît donc les composantes $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ de la force accélératrice du point m parallèles aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$.

Les forces perdues $X_{,} - mp_{,}$, $Y_{,} - mq_{,}$, $Z_{,} - mr_{,}$ doivent se faire équilibre autour du point fixe O; en égalant leurs moments à zéro, on aura

$$\sum[(Z_{,} - mr_{,})y_{,} - (Y_{,} - mq_{,})z_{,}] = 0, \quad \text{etc.}$$

Substituant les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ et réduisant, on retrouvera les équations d'Euler.

A ces équations, qui expriment comment varient la vitesse de rotation et la position de l'axe instantané par rapport aux axes principaux du corps, il faut joindre les formules (3), ou plutôt trois relations équivalentes entre p, q, r et les variations des angles désignés par ψ, θ, φ de la *Mécanique* de Poisson, angles qui définissent la position des axes principaux du corps solide par rapport à un système d'axes fixes Ox, Oy, Oz.

On obtient immédiatement les formules de la page 134,

$$p\,dt = \sin\varphi \sin\theta\, d\psi + \cos\varphi\, d\theta, \quad \text{etc.},$$

(*) Si du point m on abaisse mi perpendiculaire sur l'axe instantané, on voit que la partie $-(p^2+q^2+r^2)x_{,} + p(px_{,}+qy_{,}+rz_{,})$ représente la projection sur l'axe $Ox_{,}$ d'une force dirigée suivant cette perpendiculaire mi et qui a pour valeur $\omega^2.mi$. Car, en projetant le triangle Omi sur $Ox_{,}$, on a

$$\begin{aligned} mi\cos(mi, Ox_{,}) &= Oi\cos(Oi, Ox_{,}) - Om\cos(Om, Ox_{,}) \\ &= \left(\frac{p}{\omega}x_{,} + \frac{q}{\omega}y_{,} + \frac{r}{\omega}z_{,}\right)\frac{p}{\omega} - x_{,}, \end{aligned}$$

d'où

$$\omega^2.mi.\cos(mi, Ox_{,}) = p(px_{,}+qy_{,}+rz_{,}) - (p^2+q^2+r^2)x_{,}.$$

à l'aide du théorème sur la composition des rotations infiniment petites, en vertu duquel, si l'on prend sur l'axe de chaque rotation (dans un certain sens) une longueur qui représente la grandeur de cette rotation, la somme des projections sur une droite quelconque de plusieurs rotations est égale à la projection de la rotation résultante. Il en résulte que la rotation $\omega\, dt$ du corps autour de l'axe instantané équivaut aux trois rotations successives $p\, dt$, $q\, dt$, $r\, dt$ autour des axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ et aussi aux trois rotations successives du corps autour des lignes Oz, ON et $Oz_{,}$ indiquées par les différentielles $d\psi$, $d\theta$ et $d\varphi$. En outre, $p\, dt$, projection sur la ligne $Ox_{,}$ de la rotation effective $\omega\, dt$, est égale à la somme des projections sur $Ox_{,}$ des trois rotations correspondantes à $d\psi$, $d\theta$ et $d\varphi$, c'est-à-dire qu'on a

$$p\, dt = d\psi \cos zOx_{,} + d\theta \cos \mathrm{NO}x_{,} + d\varphi \cos z_{,}Ox_{,},$$

ou

$$p = \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt}.$$

On trouve de même q et r, et, réciproquement, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction de p, q, r.

On trouve aussi les mêmes formules en différentiant simplement les équations

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{c}{c'}, \quad \cos\theta = c'', \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a''}{b''};$$

puis, remplaçant dc, dc', etc., par les valeurs qui se trouvent à la page 135, et qu'on obtient aussi en comparant les expressions (4) et (11) de $\frac{dx}{dt}$, etc.

On peut abréger de la même manière les calculs par lesquels M. Coriolis a établi son théorème sur le mouvement relatif d'un point ou d'un système de points par rapport à des axes qui ont un mouvement donné dans l'espace (*Calcul de l'effet des Machines*, pages 40 et suivantes). Pour le cas d'un système, il faut prendre la formule générale de dynamique

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$= \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z), \quad \text{ou} \quad \sum P\delta p,$$

substituer les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, δx, δy, δz qui résultent des formules

$$x = \xi + ax_, + by_, + cz_,,$$
$$y = \eta + a'x_, + b'y_, + c'z_,,$$
$$z = \zeta + a''x_, + b''y_, + c''z_,,$$

où ξ, a, b, c, $x_,$, etc., sont variables avec t, et prendre ensuite les axes fixes Ox, Oy, Oz parallèles aux axes mobiles $Ox_,$, $Oy_,$, $Oz_,$ considérés dans la position qu'ils occupent au bout du temps t, ce qui donne

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \quad \text{etc.},$$
$$\frac{da}{dt} = 0, \qquad \frac{db}{dt} = r, \quad \text{etc.},$$
$$\delta x = \delta x_,, \quad \delta y = \delta y_,, \quad \delta z = \delta z_,, \quad \text{etc.}$$

Les liaisons du système étant exprimées par des équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad \text{etc.},$$

entre t, $x_,$, $y_,$, $z_,$, etc., on arrive, par la méthode de Lagrange, à des équations telles que

$$m\frac{d^2x_,}{dt^2} = X_, - X_e - m\left(q\frac{dz_,}{dt} - r\frac{dy_,}{dt}\right) + \lambda\frac{dL}{dx_,} + \mu\frac{dM}{dx_,} + \ldots,$$

$X_,$ étant la composante parallèle à $Ox_,$ de la force motrice appliquée au point m, et X_e celle de sa force d'entraînement.

NOTICE HISTORIQUE SUR LE CALCUL DES VARIATIONS;

TRADUIT DE L'ALLEMAND DE M. STRAUCH (*).

1. Quelques problèmes de Géométrie et de Mécanique ont donné naissance au calcul des variations, branche la plus élevée de l'Analyse. Nous rencontrons encore ici une marche particulière à l'esprit humain qui va du *difficile* au *facile*, du *compliqué* au *simple*, tandis qu'on devrait s'attendre à une marche opposée. Que de dissertations et de Mémoires ont dû être composés avant de débarrasser l'*idée* simple de ses accessoires, avant d'établir avec clarté le point *essentiel* du sujet !

Le premier problème de ce genre a été résolu par Newton lorsqu'il détermina la forme de la surface de révolution qui éprouve la moindre résistance en se mouvant dans un fluide, suivant la direction de son axe.

C'est en 1687 qu'il a publié le résultat sans faire connaître son procédé (*Principia Philos. naturalis mathematica,* sect. II, prop. 35, scol., édition de 1687 : c'est la prop. 34 dans les éditions postérieures).

Le second problème est celui de la brachistochrone.

Déjà Galilée s'est proposé ce dernier problème et trouva erronément que la courbe était le cercle (*Liber de motu et mech.*, dial. II, prop. 34, scol., page 209).

(*) Extrait d'un *Traité complet sur le calcul des variations*, publié, en 2 volumes in-8°, à Zurich, en 1849; un troisième volume, consacré aux intégrales doubles, est sous presse; ouvrage important sur lequel nous reviendrons, pour montrer qu'on a été doublement injuste envers ce calcul, en en exagérant la difficulté et atténuant l'utilité.

Mais en 1693, Jean Bernoulli résolut exactement le problème de la brachistochrone, et découvrit que c'était une cycloïde, et, en 1696, il fit paraître, à ce sujet, une provocation adressée aux géomètres. Cette invitation porte :

Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur.

« *Datis in plano verticali duobus punctis* A *et* B, *as-*
» *signari mobili* M *viam* AMB, *per quam gravitate sua*
» *descendens, et moveri incipiens a puncto* A, *brevis-*
» *simo tempore perveniat ad alterum punctum* B. »
(*Acta Eruditorum Lipsiensia*, 1696, page 269.)

Leibnitz, Newton, Jacques Bernoulli, le marquis de l'Hôpital fournirent des solutions. Newton donna encore ici le résultat sans le procédé (*Philosophical Transactions* de 1697, n° 224, page 384). De même, le marquis de l'Hôpital. Ces divers travaux furent réunis par Leibnitz qui les publia en 1697 (*Act. Erud. Lips.*, 1697, mai). La solution de Jean Bernoulli parut aussi en 1697 (*Act. Erud. Lips.*, 1697, mai, p. 206).

Ce problème peut être considéré comme le commencement de cette longue suite de travaux qui ont pour objet les maximums et minimums des intégrales (*).

Ensuite on joignit à la condition des valeurs extrêmes encore cette autre condition, savoir, que la courbe cherchée ait une longueur donnée.

Jacques Bernoulli est le premier qui proposa publiquement de tels problèmes. Jean Bernoulli adressa un paquet cacheté à l'Académie royale des Sciences, avec la condition de n'ouvrir le paquet que lorsque son frère Jacques aurait fait connaître sa solution (*Journal des Savants*, février 1701).

Jacques publia sa solution la même année sous ce titre :

(*) Nous donnerons, d'après M. Strauch, une Notice particulière sur ce problème.

Analysis magni problematis isoperimetrici; Basle, 1701.

Cette solution, fondée sur un principe vrai, est exacte. Celle de Jean ne fut insérée qu'en 1706 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*. La solution est fautive; c'est ce que l'auteur finit par reconnaître lui-même. Il donna une nouvelle solution dans les *Mémoires* de 1718 de la même Académie. Le principe est le même que celui de son frère, mais avec des simplifications. Il en est de même de la solution que Taylor a donnée dans son ouvrage : *Methodus incrementorum directa et inversa*; Lond., 1715.

L'égalité des périmètres fit donner à ce genre de questions le nom de *questions isopérimétriques*, et la recherche d'une méthode pour les résoudre fut connue sous le nom de *problème isopérimétrique*.

Les questions où il s'agit de trouver des courbes satisfaisant à certaines conditions de maximum ou de minimum s'étant multipliées considérablement, il en résulta qu'on prit ces deux dénominations dans un sens plus général, plus étendu que ne comportent leurs significations litérales. On comprit sous le nom de *questions isopérimétriques* toutes celles où il faut déterminer des courbes jouissant de certaines propriétés *de maximis et minimis*, n'importe le nombre et l'espèce des conditions accessoires.

Les solutions s'accordaient bien dans les principes; mais il n'y avait pas de *méthode générale*. Euler entreprit cette recherche, et la poursuivit sans relâche.

Un premier Mémoire sur ce sujet parut en 1739 (*Comm. Petrap.*, tome VI, 1739 : *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*). Les divers problèmes sont partagés en classes :

Première classe. Trouver toutes les courbes où une certaine propriété A acquière une valeur extrême.

Deuxième classe. Parmi toutes les courbes de la première classe, trouver celles qui jouissent de la propriété B.

Troisième classe. Parmi toutes les courbes de la deuxième classe, trouver celles qui jouissent de la propriété C; et ainsi de suite.

Ce Mémoire avait besoin de perfectionnements et de développements.

Le second Mémoire parut en 1741 (*Comm. Petrap.*, tome VIII, 1741 : *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis*). Il contenait des parties défectueuses et peu claires.

En 1744, il publia un ouvrage étendu sous ce titre : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, seu solutio problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti.* Lausannæ et Genevæ, in-4°, 1744.

Tous les problèmes y sont partagés en deux classes. La première renferme les recherches de maximums et de minimums *absolus*. Dans la seconde classe, il s'agit des maximums et minimums *relatifs*. Aux problèmes connus, Euler en ajoute une foule d'autres qui enrichissent son œuvre d'une manière brillante. Les *règles* énoncées sont parfaites, en ce sens qu'elles sont générales et conduisent toujours au résultat vrai. Une règle de grande valeur est surtout celle par laquelle les questions de la seconde classe sont ramenées à celles de la première classe; mais toutes ces règles sont fondées sur des considérations géométriques, et l'on ne saurait trop admirer la perspicacité et l'adresse avec laquelle l'illustre géomètre surmonte toutes les difficultés. Toutefois la science pouvait prétendre à une méthode plus parfaite. C'est ce qu'Euler non-seulement sentait, mais ce qu'il a exprimé explicitement ainsi : *Une méthode débarrassée de toute considération géométrique est encore à désirer, qui puisse expliquer pour-*

quoi dans ce genre de questions il faut remplacer P*dp* *par* —*pd*P (*Methodus inveniendi*, etc. Au bas de la page 56 on lit : *Desideratur itaque*, etc.).

Cette méthode analytique si désirée fut découverte par Lagrange. Il en fit part dès 1755 à Euler qui avait si bien mérité du sujet (*Miscellanea Taurinensia*, tome IV, années 1766-69, 2e partie, page 163).

Euler apprécia de suite la haute importance de la nouvelle invention, et le jugement qu'il en porta est consigné dans une lettre en date du 2 octobre 1759, adressée à Lagrange et où on lit : *La solution analytique du problème isopérimétrique ne laisse plus rien à désirer, et je me réjouis que cet objet, dont je me suis occupé si longtemps presque seul, ait été porté par vous au plus haut degré de perfection. L'importance du sujet m'a engagé, à l'aide de vos éclaircissements, de rédiger aussi une solution analytique du problème ; mais je ne ferai rien paraître jusqu'à ce que vous ayez fait imprimer vos recherches, afin de ne pas vous dérober la moindre parcelle de la gloire qui vous appartient* (*) (*voir* la même page des *Miscellanea Taurinensia* citée ci-dessus).

La nouvelle invention ne fut rendue publique qu'en 1761 (*Miscellanea Taurinensia*, tome II, 1760-1761, 2e partie, page 173 : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*). Cette invention consiste en ceci : Lagrange soumet une expression composée de variables et de différentielles à une nouvelle différentiation qu'il désigne non par la lettre usitée *d*, mais par la lettre δ ; et, quand cette lettre δ se trouve avant le signe *d* ou $\int$, il le place derrière ces signes. Ensuite, il opère au-

(*) Excellente leçon de morale, de probité scientifique ; exemple peu contagieux. Tm.

tant d'intégrations partielles jusqu'à ce qu'on ne rencontre plus sous le signe $\int$ aucune variable affectée à la fois des deux lettres d et δ.

Les avantages de ce procédé sont :

1°. D'être simple et général, c'est-à-dire qu'il peut s'étendre à un nombre quelconque de variables; de sorte que la recherche des courbes à double courbure et des surfaces devient aussi facile qu'auparavant, celle des courbes planes.

2°. On obtient non-seulement les équations principales, mais les équations aux limites; ce n'est que d'alors qu'il fut possible de poser des équations de condition et de les introduire dans le calcul.

Nonobstant ces avantages, on ne peut se dissimuler que dans ce premier Mémoire de Lagrange le manque d'un fondement scientifique se fait encore sentir, car il est loisible de demander :

1°. Quelle différence existe entre la nouvelle différentiation δ et l'ancienne d?

2°. Est-on autorisé ou obligé d'écrire $d\delta$, $\int\delta$ au lieu de δd, $\delta\int$?

3°. La valeur de la différentiation pour δ n'est pas changée par les intégrations partielles ultérieures, pourquoi faut-il pourtant faire ces intégrations?

Alors Euler se permit de publier aussi ses travaux analytiques; il fit paraître deux Mémoires en 1766. Le premier porte le titre: *Elementa calculi variationum*, et le second : *Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum;* les deux Mémoires se trouvent dans les *Novi Comm. Acad. Petrop.*, tome X; 1766. Ici, Euler s'applique à établir des principes à l'aide desquels on puisse donner des fondements solides à la méthode de Lagrange, à laquelle il donne le nom de *calcul des variations*, qui est resté. A la fin du second Mémoire, il donne pour la première fois l'équation connue sous le nom d'*équation de condition d'intégrabilité.*

Quoique Euler reconnût les droits de Lagrange, l'illustre inventeur eut pourtant des désagréables prétentions à repousser. Dès 1734, Fontaine avait appliqué une méthode nouvelle et qui lui est particulière pour résoudre le problème de la ligne tautochrone (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences,* 1734). En 1767, il prétendit que cette méthode s'appliquait à toutes les questions de *maximis* et de *minimis;* mais qu'on n'en avait pas fait usage. A cet effet, il publia un Mémoire, pour soutenir cette assertion (*Mémoires de l'Académie,* 1767). Là, il accuse Lagrange de s'être égaré dans la nouvelle route que ce dernier avait choisie, parce qu'il n'avait pas assez approfondi la théorie, etc.; il propose en même temps deux méthodes qu'il donne pour nouvelles et meilleures que toutes celles que l'on a publiées sur cet objet. Lagrange répondit ainsi, en 1770 : *Pour ma justification, je crois n'avoir rien de mieux à faire que d'engager les connaisseurs à lire le Mémoire de M. Fontaine. On verra que l'une de ces méthodes est celle qu'Euler a publiée dans son ouvrage de* 1744, *et que la seconde n'est autre, pour le fond, que la mienne et n'en diffère que par une exposition moins bonne* (*Miscell. Taurin*., t. IV, années 1766-1769; 2[e] partie, p. 164; ce volume, malgré cette date, renferme pourtant la justification de Lagrange, écrite le 28 mai 1770, comme on peut voir à la page 187; on y trouve même un Mémoire de 1771, p. 250).

A cette occasion, nous devons mentionner une seconde circonstance où Lagrange croyait qu'on voulait lui disputer l'honneur de l'invention. Les deux géomètres Jacquier et Leseur avaient publié, à Parme, un *Traité du Calcul intégral;* un chapitre entier du second volume est consacré à la nouvelle méthode, sans en nommer l'auteur ; Lagrange dit à cela : *Je ne me serais pas plaint, s'ils s'étaient contentés d'accepter ma méthode, sans en nommer l'inventeur ; c'est un procédé dont ils se sont rendus coupables en d'autres endroits ; mais comme ils citent le Mémoire d'Euler, il paraîtrait qu'ils veulent lui attribuer la méthode, tandis que j'en suis le premier inventeur* (*Miscell. Taurin.*, t. IV, p. 165).

Le célèbre Borda écrivit aussi un Mémoire dans lequel il cherche à montrer que les équations aux limites, obtenues par la méthode de Lagrange, n'ont pas une entière certitude (*Académie royale des Sciences*, 1767 et 1768). A cet effet, il résout le problème de la brachistochrone dont Lagrange s'est occupé dans son premier Mémoire. Borda parvient à un résultat exact et qui ne s'accorde pas avec celui de Lagrange. Toutefois, ce fait ne prouve rien contre les équations aux limites. La raison en est que Lagrange est parti d'une formule qui n'est pas assez générale ; car il pose la formule $t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$ (*Miscell. Taurin.*, t. II, p. 176) ; x sont les coordonnées parallèles à la direction de la pesanteur. Cette formule ne s'adapte qu'au cas où le mouvement commence avec $x = 0$, et ne convient pas aux cas où le mouvement commence à un autre endroit. Depuis, Lagrange a amélioré sa formule (*Miscell. Taurin.*, t. IV, p. 183) et l'a arrangée de manière que le mouvement peut commencer à un point quelconque de la brachistochrone. Dès lors Lagrange pouvait montrer que sous certains rapports ses premiers résultats (*Miscell. Taurin.*, t. II, p. 179 et 180) étaient exacts, et sous d'autres rapports Borda avait aussi raison. La certitude des équations aux limites fut ainsi établie d'une manière brillante.

En 1770, Euler publia un nouveau Mémoire sur le calcul des variations, et qu'il a ajouté au troisième volume de son *Traité de Calcul intégral* (*); là, tout ce qui précède est surpassé. Jusqu'ici on n'avait mis le calcul des variations en relation qu'avec des questions *de maximis* et *de minimis*. L'auteur se débarrasse de cette idée étroite et annonce (§ 115) que ce calcul pouvait être rendu plus général, et que les problèmes se divisent en deux classes. Dans la première classe sont les problèmes où la relation entre y et x est considérée comme étant donnée, et l'on cherche la variation de l'intégrale $\int V\,dx$, en attribuant à x et à y des variations quelconques; dans la seconde classe, on cherche une relation entre x et y telle qu'elle donne une certaine propriété à l'intégrale $\int V\,dx$; par exemple que, devenant un maximum ou un minimum, la première variation $\delta \int V\,dx$ s'annule.

Euler s'appliqua désormais non-seulement à consolider les principes du calcul des variations, mais aussi à rendre plus intime la connexion de ce calcul avec les autres branches de l'Analyse. En 1772, parut un autre Mémoire : *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi* (*Novi Comm. Petrop.*, t. XVI, 1772); jusqu'ici on n'avait appliqué la méthode qu'à des expressions intégrales. Dans ce Mémoire, l'auteur se débarrasse de cette restriction, et réunit en trois catégories toutes les expressions qu'on peut soumettre à des variations; à la première appartiennent les expressions qui ne renferment que des

(*) *Institutiones calculi integralis*, 3 T., *Petrop.*; 1768-70. Le professeur Salomon en a publié une belle traduction allemande en 4 volumes in-8°; Vienne, 1828-30; le quatrième volume contient de nouveaux Mémoires d'Euler qui ne sont pas dans l'original latin. Une traduction française serait encore aujourd'hui d'une immense utilité. C'est au Ministre de l'Instruction publique à faire ouvrir cette riche mine d'enseignements. Cela viendra l'an 2440 quand on s'occupera des choses et non uniquement des personnes, quand la science sera séparée de la politique.

formes fonctionnelles; à la seconde, les expressions où l'on rencontre aussi des différentielles; et à la troisième, les expressions où il y a aussi des intégrales.

Au § 4, il reproduit le principe sur lequel il avait établi jusqu'ici le calcul des variations, et qui consiste à distinguer deux sortes de changements dans y : l'un désigné par dy provient de ce que x devient $x+dx$; l'autre désigné par δy est entièrement arbitraire et ne dépend pas de x. Ainsi considéré, le calcul des variations semblait constituer un genre particulier de calcul; mais en scrutant plus exactement l'essence de ce calcul, Euler découvrit qu'on pouvait le ramener entièrement à la théorie des différentielles partielles. Au lieu de conserver le changement appelé *variation*, il remplace l'équation $y=\varphi(x)$, d'abord par celle-ci $y+\Delta y=\varphi(x)+t\psi(x)$ où t est un infiniment petit; puis, passant à une forme plus générale, il considère y non plus comme une fonction de x seulement, mais comme une fonction de deux variables x et t, t étant une variable nouvellement introduite. C'est ce qu'il explique de cette manière : Soit $y=\varphi(x)$ l'équation d'une ligne; $y=\varphi(x, t)$ représentera toutes les lignes infiniment voisines si $\varphi(x, t)$ est telle, qu'en faisant $t=0$, $\varphi(x, t)$ revient à $\varphi(x)$, et la formule $\frac{d\varphi(x, t)}{dt}dt$ remplace ce qui avait été désigné par δy.

Certes, l'introduction d'une nouvelle variable a donné au calcul des variations sa base véritable. Toutefois, je fais voir (§ 61) que ce moyen n'est pas à l'abri de quelques objections, et j'indique (§ 53) un autre procédé.

Dans aucun de ses Mémoires, Euler ne s'est occupé des variations du second ordre, nécessaires pour savoir s'il y a maximum ou minimum, ou si aucun des deux n'a lieu. Les premières recherches de ce genre ont été publiées par

Laplace, en 1772 (*Nova Acta eruditorum*, 1772, p. 193). Ensuite Legendre s'est occupé du même objet, dans un Mémoire de 1786 et dans un second Mémoire de 1787 (*Académie des Sciences*, 1786, p. 7, et 1787, p. 348); mais dans ces trois Mémoires il n'est question que des cas où y est fonction de la seule variable x.

Lagrange s'efforça aussi de consolider et d'étendre sa méthode. C'est ce qu'il fait dans sa *Théorie des fonctions analytiques* dont la première édition est de 1797, et la seconde de 1813. On y trouve bien des recherches sur les variations du second ordre, mais aussi pour les cas où l'on ne cherche qu'une seule fonction y d'une seule variable x (seconde partie, chap. XII, n^os^ 64-70; 2^e^ édition); et la méthode ne s'étend ni aux cas où y et z sont des fonctions de x, ou bien z fonction des deux variables x, y; une seule question est pourtant traitée, où paraissent y et z, fonctions de x (seconde partie, chap. XII, n° 73; 2^e^ édition); mais cette question est spéciale, et l'on ne donne pas de règles pour le cas général. Dans cet ouvrage, on trouve pour la première fois un problème où il s'agit de rendre *maximum* et *minimum* une expression qui renferme des différentielles, mais pas d'intégrales (seconde partie, chap. XI, n^os^ 59 et 60; 2^e^ édition); mais on ne donne que de faibles indications sur la théorie nécessaire pour résoudre de tels problèmes.

En 1806, dans la 2^e^ édition des *Leçons sur le calcul des fonctions*, Lagrange a considérablement perfectionné sa méthode, et l'a enrichie de beaucoup de problèmes intéressants (*). Imitant Euler, il remplace la fonction $\varphi(x)$ par celle-ci, $\varphi(x, t)$, telle qu'en faisant $t = 0$, $\varphi(x, t)$ revienne à $\varphi(x)$; ensuite il développe $\varphi(x, t)$, par le

(*) La 1^re^ édition forme le 12^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, 1804. La 2^e^ édition, qui a paru chez Courcier en 1806, est tellement augmentée, qu'on ne peut plus citer la 1^re^ édition.

théorème de Maclaurin, en cette série,

$$\varphi(x) + t\,\psi(x) + \frac{t^2}{1.2}\chi(x) + \ldots.$$

Cette marche, la même que celle d'Euler, est sujette aux mêmes objections. Ainsi tout le calcul des variations étant fondé sur le théorème de Maclaurin, il possède tous les avantages attachés à ce théorème.

Jetant un regard sur ce qui précède, nous voyons :

1°. Qu'Euler, par la méthode géométrique, porta si loin le problème isopérimétrique, que la science devait nécessairement découvrir une méthode analytique;

2°. Que Lagrange fit cette découverte;

3°. Qu'Euler s'est efforcé de consolider et de développer la méthode de Lagrange, et qu'il a considérablement perfectionné cette méthode, surtout en introduisant une nouvelle variable;

4°. Que Lagrange a reconnu que cette idée était la plus convenable au sujet et l'a adoptée comme base de sa méthode.

Outre Laplace et Legendre, auxquels, comme nous avons dit, le calcul des variations doit de précieuses acquisitions, d'autres géomètres ont cru devoir s'occuper de ce calcul; la plupart, sans faire avancer la science, se sont contentés de réunir, selon leurs propres vues, les propositions connues. Il serait superflu de donner une Notice détaillée de ces écrivains. Il nous suffit de dire que quelques-uns se sont tenus strictement à la forme *générale* qu'Euler a donnée pour base, savoir : de représenter la *variation immédiate* par une série infinie.

Parmi ceux-ci, on remarque Lacroix, qui a recueilli dans son ouvrage, et a exposé clairement et dans un bel ordre, tout ce qui a été fait (*Traité du calcul différentiel et intégral*, 2e édition, t. II, 1814; p. 724, 744, 751).

D'autres ont adopté une forme qu'Euler a déjà déclarée trop spéciale, savoir : la forme finie $\varphi(x) + t\psi(x)$ (*); croyant ainsi donner au procédé de l'élégance et le rendre simple, ils l'ont entaché de grands défauts. En effet, pour qu'une fonction $\varphi(x)$ puisse se changer dans la fonction arbitraire $\varphi(x, t)$, le développement de $\varphi(x, t)$ doit être représenté par une série infinie, réellement ou au moins idéalement existante. Si l'on prétend que la série est finie, il faut que la fonction $\varphi(x, t)$ jouisse de certaines propriétés qui permettent d'arrêter la série, et alors la fonction cesse d'être entièrement arbitraire. En outre, ce procédé conduit à beaucoup de contradictions, comme nous verrons dans divers endroits de cet ouvrage.

Toutefois, M. le professeur Martin Ohm fit paraître en 1825, 1831, 1833, 1839, quatre écrits qui méritent d'être pris en considération. Le calcul s'est enrichi et a pris de l'extension, ainsi que nous allons le faire voir.

Donnons d'abord les titres de ces ouvrages :

1°. *Lehre des grösten and kleinsten*. Théorie du maximum et du minimum; Berlin, 1825.

2°. *System der mathematik*. Système des mathématiques, t. V; Berlin, 1831.

3°. *Idem*, t. VII; Berlin, 1833.

4°. *Lehrbuch der höhern mathematik*, en 2 vol., t. II; Berlin, 1839 (**).

L'ouvrage de 1825 contient une théorie générale du calcul des variations, très-complète et où plusieurs points

---

(*) Nous n'en citerons que trois :

1°. GERGONNE, *Annales des Mat.*, t. XIII; 1822.

2°. DIRKSEN, *Analytische darstellung der variations rechnung* (Exposition analytique du calcul des variations); Berlin, 1823.

3°. POISSON, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XII; 1833, p. 231 et 243. *Traité de Mécanique*, 2e édition; 1833, t. I, § 199, 202.

(**) On peut aussi citer les travaux de Jacobi (Liouville, tome III); de M. Cauchy (*Exercices d'Analyse*, tome III; 1844); de M. Delaunay (Liouville, tome VI), et le Mémoire couronné de M. Sarrus (*Savants étrangers*, tome X; 1848). TM.

difficiles sont mieux traités qu'à l'ordinaire. On y trouve aussi une théorie très-développée du maximum et du minimum. L'auteur, d'après Euler, ramène toutes les questions à trois catégories. 1° Les expressions purement fonctionnelles. Les recherches sont assez complètes; toutefois, il y manque plusieurs cas que j'ai indiqués dans mon ouvrage, t. I, § 162-179, et auxquels les questions 55-60 servent d'applications. 2° Les expressions où entrent aussi des différentielles pour lesquelles Lagrange n'a donné que de légères indications; ici, ce cas est traité pour la première fois et avec une étendue suffisante. 3° Les expressions qui renferment aussi des intégrales. Beaucoup de ces recherches se distinguent par la plénitude, et quelques-unes sont manquantes; ainsi: 1° on trouve ici pour la première fois une recherche générale des variations du second ordre, pour le cas d'une intégrale simple, à deux limites constantes et pour deux fonctions y et z indépendantes l'une de l'autre, et chacune fonction de x; mais lorsque y et z sont liées par une relation (par une équation algébrique ou différentielle), la recherche est à peine indiquée, et, toutefois, une règle spéciale est nécessaire. De même, ce qui concerne la variation du second ordre lorsque les limites des intégrales sont variables est inexact. 2° Lors d'une intégrale double, on traite ici, pour la première fois, le cas où la variable, suivant laquelle se fait la première intégration est une fonction de la variable suivant laquelle on fait la seconde intégration. On montre comment il faut alors transformer la variation du premier ordre; mais cette transformation n'a rien de pratique. Pour des intégrales doubles, les équations aux limites présentent une infinité de cas à discuter, et nonobstant on ne mentionne que quelques cas particuliers; ainsi sous ce rapport il n'y a comme rien de fait. La variation du second ordre manque en entier.

Dans les ouvrages de 1831 et 1839, on donne une théorie du calcul des variations, et, de plus, des séries élégantes, utiles, qui méritent de fixer l'attention.

Dans les deux ouvrages de 1833 et 1839, on trouve aussi une théorie générale du maximum et du minimum; c'est un extrait de l'ouvrage de 1825, une sorte d'exposition plus succincte.

Venons maintenant au point principal. Sur quelle base l'auteur a-t-il fondé son calcul? Cette base offre quelque chose de très-particulier. L'auteur pose de suite pour la variation immédiate,

$$y_x = y + xy_1 + \frac{x^2}{1.2}y_2 + \frac{x^3}{1.2.3}y_3 + \ldots,$$

ou bien

$$y_x = y + x\delta y + \frac{x^2}{1.2}\delta^2 y + \frac{x^3}{1.2.3}\delta^3 y + \ldots,$$

sans dire le moins du monde où il a pris cette série, ni d'où elle a pu se déduire. En effet :

Dans l'ouvrage de 1825, on lit : « Lorsqu'une expression y se développe par elle-même, indépendamment d'une autre expression, en une série ascendante suivant les puissances entières de π, alors on dit que l'expression y est *immédiatement variée selon* π; mais si une expression V ne peut se développer en une telle série que parce qu'elle dépend d'une autre expression développée suivant une telle série, on dit alors que V *est variée médiatement selon* π. Lorsque π est infiniment petit, $y_\pi - y$, ou $V_\pi - V$ sont les variations de y ou de V. »

En représentant les variations immédiates par des séries infinies, M. Ohm n'a fait que revêtir son calcul de la vraie forme. Mais on est en droit de demander : d'où l'auteur déduit-il ces séries? Pourquoi n'a-t-il pas pris une marche d'où ces séries ressortent *nécessairement?* Pourquoi, sans dire le motif, a-t-il renoncé à la base posée par Euler et adoptée par Lagrange, etc.?

On a déjà dit que dans le Traité complet de 1825, on trouve très-peu de chose sur les intégrales doubles. C'est ce qui a engagé Poisson a publier, en 1833, un Mémoire spécial sur cet objet (*Académie des Sciences*, t. XII; le Mémoire a été lu le 10 octobre 1831). Pour le cas où les limites de l'intégrale double sont variables, l'illustre analyste croit devoir introduire un nouveau principe; à la place des deux variables x, y, il met deux fonctions de deux nouvelles variables u et v, etc., et ramène finalement les deux variables x et y. Par ce procédé, la recherche, pas déjà très-simple, a été rendue plus compliquée et surchargée de difficultés superflues.

C'est la raison qui a porté M. Ostrogradsky à traiter le même sujet dans un Mémoire publié en 1834 (*Acad. de Pétersb.*, 6e série, t. III; et Journal de M. Crelle, t. XV, 4e cahier; 1836). Il montre que l'introduction de deux nouvelles variables n'est pas nécessaire et que le principe fondamental du calcul des variations suffit pour réunir toute généralité désirable et une extrême simplicité.

Toutefois, j'ai montré dans cet ouvrage (t. II, § 737 et 738), que les deux Mémoires, sous le rapport de la théorie et de la pratique, ne répondent pas à ce que le sujet exige. L'expression pour la variation du premier ordre n'est pas pratique, et est même inachevée. La variation du second ordre manque complétement dans les deux dissertations. On n'y trouve pas un seul exemple spécial propre à éclairer des recherches si difficiles dans les détails, etc.

Cette courte esquisse présente l'état où est actuellement la branche la plus élevée de l'Analyse; beaucoup a été fait et il reste encore bien des choses à faire. Nous avons vu aussi que, sous le rapport pratique, les ouvrages d'Euler et de Lagrange sont ornés d'applications belles et intéressantes; et cependant nous verrons plus loin que c'est précisément pour les applications qu'il reste le plus à faire.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE PROPOSÉES AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, EN 1851.

Comme l'année dernière, nous avons recueilli les programmes des questions de géométrie descriptive qui ont été proposées au concours d'admission à l'École Polytechnique, et nous les mettons sous les yeux de nos lecteurs. Ainsi rapprochés, ils montrent la tendance de l'École à faire disparaître graduellement des travaux graphiques des candidats la méthode qui consiste à reproduire les épures gravées des auteurs, pour lui voir substituer celle des programmes écrits dans lesquels chaque élève trouve des données numériques différentes.

Quinze programmes, relatifs à l'intersection de deux surfaces de révolution, ont été envoyés dans les villes d'examen. Afin d'éviter des redites inutiles, nous les grouperons de la manière suivante :

Sphère pleine et cône de révolution dont l'axe est incliné. — Dans les cinq programmes, la sphère est donnée par la position de son centre et par la grandeur de son rayon; le cône est défini par la position de son axe et de son sommet, et par le rayon de la section droite faite à une distance déterminée du sommet. Par exemple : axe incliné de 45 degrés sur le plan horizontal, distant de 1 centimètre du centre de la sphère, et non parallèle au plan vertical; sommet situé à 8 centimètres au-dessus du centre de la sphère; section droite de 7 centimètres de rayon et distante de 15 centimètres du sommet du cône.

Ou bien : axe non parallèle au plan vertical, incliné de 30 degrés sur chacun des plans de projection, et distant de 2 centimètres du centre de la sphère; sommet situé à 12 centimètres au-dessus du plan horizontal ou en avant du plan vertical; section droite, etc.

On demandait : 1° de définir graphiquement, d'après les procédés ordinaires de la géométrie descriptive, les formes, dimensions et positions des deux surfaces données, en adoptant pour le cône une position choisie à volonté entre toutes celles qui satisfont aux conditions prescrites; 2° de construire la courbe d'intersection de la surface conique et de la surface sphérique; 3° de discuter, dans un texte, les particularités que peuvent présenter la question générale de l'intersection d'une sphère et d'un cône, et la recherche des points remarquables de la courbe d'intersection.

Sphère creuse et cône droit. — Deux programmes.

Sphère donnée par la position de son centre et par la grandeur des rayons des surfaces intérieure et extérieure. Cône ayant son axe perpendiculaire au plan horizontal ou au plan vertical, et distant de 5 centimètres du centre de la sphère; son sommet à 15 centimètres du plan horizontal ou du plan vertical; sa trace, horizontale ou verticale, de 5 centimètres de rayon et tangente à la ligne de terre.

On demandait : 1° de construire les courbes d'intersection des surfaces sphériques avec la surface conique; 2° de projeter séparément, sur un plan vertical, le cône après l'arrachement par la sphère ou la sphère après l'arrachement par le cône; 3° de discuter dans un texte, etc.

Sphère pleine et cylindre de révolution dont l'axe *est incliné.* — Cinq programmes tout à fait analogues aux cinq premiers.

Par exemple : axe du cylindre non parallèle au plan vertical, incliné de 30 degrés sur chacun des plans de projection et distant de 2 centimètres du centre de la sphère ; rayon de 3 centimètres ; limites : le plan vertical d'une part, et, de l'autre, un autre plan vertical également distant du centre de la sphère et du plan vertical de projection.

Ou bien : cylindre dont l'axe, incliné de 45 degrés sur le plan horizontal, est distant de 2 centimètres du diamètre vertical de la sphère et est placé, par rapport au centre (O, O′), de telle manière que le pied de la droite qui mesure la plus courte distance entre l'axe et le diamètre vertical tombe sur ce diamètre à 1 centimètre au-dessus du centre (O, O′) ; dont le rayon est de 3 centimètres, dont les limites sont, etc.

On demandait : 1° de construire la courbe d'intersection de la surface cylindrique et de la surface sphérique ; 2° de développer la surface cylindrique sur un plan tangent vertical, et de tracer sur ce développement la génératrice de contact et la transformée de la courbe cylindro-sphérique ; 3° de discuter dans un texte, etc.

Cylindre droit perpendiculaire à l'un des plans de projection et cylindre de révolution dont l'axe est incliné. — Trois programmes.

Le cylindre droit est donné par la position de son axe et par la grandeur de son rayon. Le cylindre incliné est défini comme dans la question de la sphère et du cône.

On demandait, etc. (*voyez* le programme précédent).

Enfin, *cylindre de révolution creux* dont l'axe a pour projections deux droites inclinées à 45 degrés chacune sur la ligne de terre ; dont les rayons des surfaces extérieure et intérieure sont respectivement de 4 et de 3 centimètres; et *cylindre de révolution plein,* dont l'axe, situé dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, rencontre cette ligne et l'axe du premier cylindre; dont le rayon est de 2 centimètres.

On demandait : 1° de construire les courbes d'intersection de la surface du cylindre plein avec les surfaces extérieure et intérieure du cylindre creux; 2° de projeter sur un plan perpendiculaire à la ligne de terre le cylindre creux et le trou qui le traverse, le cylindre plein ayant d'abord été retiré de ce trou; 3° de discuter dans un texte, etc.

Au premier abord, ces programmes paraissent plus différents par la difficulté qu'ils ne le sont réellement. Lorsque la mise en projection du problème est difficile, la partie purement graphique est diminuée. Toutefois, il faut reconnaître que le travail était trop considérable relativement au temps accordé, quatre heures, tandis que l'année dernière on avait accordé six heures.

Il faut aussi reconnaître que les programmes de Paris étaient un peu plus chargés et surtout d'une rédaction moins explicite que ceux de la province, où l'on a eu l'attention de faire ressortir la mise en projection des surfaces données comme une question, au lieu de la laisser enveloppée dans l'énoncé. Ces petites inégalités, presque inévitables, n'ont pas empêché les candidats de Paris de se trouver en très-grande majorité sur la liste d'admission; on en compte soixante-huit sur quatre-vingt-quinze, ce qui fait deux fois et demie ce que la province a donné; rapport qui se trouve être le même que celui des compositions écrites qui ont été corrigées.

Ce n'est pas ici le lieu, ce n'est peut-être pas non plus le moment de rechercher les causes de cet envahissement de Paris. Les nouveaux programmes des épreuves nous placent dans une de ces époques de transformation peu propre à un examen de cette nature. Il convient d'attendre.

ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Nos lecteurs, géomètres-dessinateurs, nous sauront gré sans doute de porter à leur connaissance une collection de reliefs géométriques qu'ils consulteraient avec profit. Le prospectus porte, pour préambule, les observations suivantes qui nous paraissent d'une grande justesse.

Collection de corps géométriques en plâtre, destinée à l'enseignement de la géométrie descriptive et de ses applications.

« Dessiner d'après le relief, c'est prendre sur les corps solides eux-mêmes (*) les données numériques qui fixent leurs dimensions et leur situation dans l'espace, et c'est se servir des mesures ainsi obtenues pour construire les projections géométriques qui non-seulement représentent ces corps, mais encore suffisent pour les reproduire, comme

(*) « Sous les noms de *hauteur, largeur, épaisseur, profondeur, distance, rayon, diamètre, abscisse, ordonnée, côté*, etc., on fait de nombreux mesurages pour lesquels suffit le *kutsch*, ou double décimètre subdivisé en centimètres, millimètres, et demi-millimètres au besoin. On peut même arriver à une approximation plus grande en lui adaptant un *curseur à vernier*.

» Pour les perpendiculaires, très-nombreuses aussi, qu'on a besoin de mener à un plan, on doit employer l'*équerre à trois dimensions*, instrument que, pour abréger, on pourrait appeler *équerre-relief*. C'est un angle trièdre bi-rectangle très-facile à exécuter en bois ou en papier :

cela se pratique dans les arts de construction, sur les projets des ingénieurs.

» Cet exercice, en graduant les difficultés de l'enseignement du dessin des projections, prépare les élèves aux épures d'après des programmes écrits ou d'après leurs propres conceptions dans la géométrie des trois dimensions. Les reliefs, en montrant d'avance au dessinateur le résultat de ses recherches, en lui en donnant le sentiment, facilitent nécessairement son travail. Cet exercice, dont l'utilité est évidente, est cependant presque inconnu. Est-ce parce que les modèles manquent?

» Observer sur la surface rigoureusement définie des corps géométriques les effets de lumière, d'ombre, de reflet qui s'y manifestent, et les effets de contour apparent de leurs vues perspectives; s'exercer à rendre rapidement à l'estompe et au crayon ces accidents d'une variété infinie et d'une précision saisissable par l'œil le moins exercé; ces deux études constituent un enseignement gradué, rationnel, et de nature à préparer à tous les genres de dessin. Ainsi tous les effets de lumière et de perspective que peuvent présenter les sujets ordinaires du *dessin d'imitation* se trouvent nettement accusés sur les polyèdres, sur les cônes et les cylindres, sur les corps de révolution, sur les formes torses des colonnes, des limons

---

qu'on plie une feuille de papier fort ou du carton mince, et l'on a une *règle* qui peut être d'un bon usage; qu'on fasse un second pli exactement perpendiculaire au premier, qu'on l'ouvre plus ou moins, et l'on a une *équerre à trois dimensions*. Le second pli étant entièrement ouvert, on arrive à l'*équerre à deux dimensions*, c'est-à-dire à l'*équerre plane* de la géométrie élémentaire; c'est aussi l'*équerre du relieur*. Une feuille de papier et un kutsch suffisent donc pour exécuter le *lever* des corps géométriques. Lorsque le plan de position du corps est horizontal, on peut substituer, mais sans avantage, le *fil à plomb* à l'*équerre-relief*.

d'escalier et des serpentins, en un mot, sur toutes les surfaces de la géométrie, convenablement éclairées (*).

» Cet enseignement, d'une simplicité et d'une utilité incontestables, n'est pas assez répandu; est-ce parce que les modèles manquent?

» Si cette lacune existe réellement dans l'ensemble des moyens propres à l'enseignement du dessin, notre collection aidera à la combler.

» La vue attentive des corps solides a l'avantage de familiariser avec les formes et les appellations de la géométrie; les combinaisons de ces formes entre elles, par intersection et par contact, donnent la connaissance d'un grand nombre de résultats que les élèves n'ont pas le temps de chercher, qu'il n'est pas nécessaire de leur faire chercher, qu'il suffit de leur montrer, et en grand nombre, parce qu'il y a de l'instruction dans la variété; enfin, le groupement de ces corps fournit une suite sans nombre de modèles faciles et intéressants à reproduire par le dessin.

» Si cette collection est bien accueillie, elle recevra un développement qui en accroîtra beaucoup l'utilité (**). »

(*) « La *lumière d'une lampe* ou la *lumière solaire,* dans laquelle les corps sont plongés, produit sur leur surface des ombres noires et tranchées qui sont d'un effet peu agréable; aussi ne manque-t-on pas de les adoucir par quelques artifices, mais sans les dénaturer. Les *ombres géométriques,* qui leur sont tout à fait comparables, doivent être traitées comme elles, de manière à produire des résultats qui se rapprochent de ceux du *dessin d'imitation* proprement dit, où l'on suppose les objets éclairés par la *lumière diffuse* de l'atmosphère.

» Quant à ce qui regarde la *perspective,* il nous suffira de dire, pour être compris, qu'une glace interposée entre l'*oculaire,* point où l'on suppose l'œil du dessinateur, et l'*objet* à représenter, est de tous les moyens à employer le plus simple et le plus clair pour faire sentir et comprendre les effets de ce que l'on nomme avec raison la *perspective linéaire,* pour la distinguer de la *perspective aérienne.* »

(**) S'adresser à M. Bardin, rue du Cherche-Midi, 23, à Paris. On est prié d'affranchir les lettres.

On doit désirer que cette collection, que nous avons visitée avec un véritable intérêt, se répande et soit appréciée. Elle est déjà très-étendue, très-variée, et l'on y trouve réalisées en relief toutes les questions d'intersection de surfaces qui ont été proposées cette année au concours d'admission de l'École Polytechnique. Il est bon, quand les programmes des épreuves de concours deviennent de plus en plus difficiles, que quelques personnes se préoccupent de venir en aide aux candidats et à l'enseignement.

L'auteur ne parle pas, dans son prospectus, de la belle suite de *reliefs topographiques* qui constitue, à vrai dire, la partie principale et la plus importante de son musée stéréotomique. Cette réserve semble indiquer qu'il veut en faire l'objet d'un programme particulier.

NOTE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS;

Par M. P. HOSSARD,
Chef d'escadron d'état-major.

Afin de mieux fixer les idées, soit une fonction à deux variables considérée comme l'ordonnée verticale d'une surface. Supposons d'abord que les constantes à déterminer soient telles, que leur variation ne donne lieu qu'à un déplacement parallèle de la surface dans le sens des verticales, et que, par expérience, on ait déterminé un certain nombre de points devant lui appartenir. Si ces points ne s'accordent pas parfaitement entre eux, c'est-à-dire s'ils n'appartiennent pas exactement à une détermination unique de la surface, il est évident que la position à adopter serait celle qui établirait cette relation, savoir : que la somme des différences positives entre les verticales des points obtenus par expérience et les ordonnées correspondantes de la surface, fussent égales aux différences négatives; c'est-à-dire que cette position serait donnée par une moyenne arithmétique, comme dans le cas de la détermination d'un point sur une verticale unique.

Généralement, la variation des constantes à déterminer donnera lieu à une déformation et à un déplacement non parallèle aux ordonnées; il est clair alors que la surface à adopter ne correspondra plus à une égalité entre les erreurs positives et négatives des observations, car l'ordonnée de la surface, selon qu'elle correspondra à tel ou tel point observé, éprouvera des variations différentes pour une même variation des constantes; mais il devient évident que le résultat de chaque observation devra avoir une influence d'autant plus grande dans la détermination de la surface à adopter, que cette observation correspondra à un point dont le déplacement sera plus considérable pour une même variation des constantes. Ainsi, une observation correspondante à un point invariable de la surface devrait rester sans influence, et être négligée, quelle que fût d'ailleurs la différence entre l'ordonnée donnée par l'observation et l'ordonnée du point fixe. Il est évident encore qu'un point obtenu par l'observation, là où la surface éprouve les déplacements les plus considérables pour une même variation des constantes, serait des plus propres à fixer la valeur de ces constantes; enfin que si deux observations correspondent à deux points de la surface, dont l'un éprouve un déplacement double de l'autre pour une même variation des constantes à déterminer, le premier point sera deux fois plus convenable que le second pour fixer cette surface, et, par conséquent, devra entrer avec une influence double, relativement à celui-ci, dans le choix à faire.

Pour arriver à la détermination la plus avantageuse de la fonction cherchée, nous devrons donc prendre une moyenne arithmétique, comme dans le premier cas considéré, mais en faisant entrer chaque observation avec l'influence qui lui est propre.

Les idées de géométrie introduites ici ont eu pour but de rendre la démonstration plus tangible, pour ainsi dire, mais ne sont nullement nécessaires à son exactitude.

Il nous reste maintenant à montrer que ce procédé n'est autre que la méthode des moindres carrés donnée par Legendre, démontrée par Laplace et Poisson.

Soit une fonction de la forme

$$mf + n\varphi + \ldots,$$

f, φ, etc., étant des expressions sans coefficients indéterminés et dont les valeurs numériques sont des données de l'observation; m, n, etc., étant des constantes à déterminer, indépendantes, d'ailleurs, les unes des autres.

Par d'autres observations, on aurait

$$\begin{array}{l} mf' + n\varphi'\ldots, \\ mf'' + n\varphi''\ldots, \\ mf''' + n\varphi'''\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Soient v, v', v'',..., les valeurs respectives de ces fonctions, déduites de l'observation, et

$$e,\ e',\ e'',\ e''',\ldots,$$

les erreurs ou différences entre les résultats qui seraient donnés par la fonction adoptée comme la plus probable, et ceux donnés par l'observation. On aura

$$\begin{array}{l} e = mf + n\varphi\ldots - v, \\ e' = mf' + n\varphi'\ldots - v', \\ e'' = mf'' + n\varphi''\ldots - v'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Or, si, dans la fonction, nous faisons varier successivement chacun des coefficients m, n, p, etc., en laissant les autres constants, nous remarquerons :

1°. Que lorsque m variera, la fonction éprouvera une variation proportionnelle à f pour l'erreur e, proportionnelle à f' pour l'erreur e', proportionnelle à f'' pour l'erreur e'', etc.; ces différentes erreurs devront donc entrer dans la formation de la moyenne avec des poids respectivement proportionnels à

$$f,\ f',\ f'',\ldots,$$

et l'on aura la relation

$$fe + f'e' + f''e''\ldots = 0.$$

2°. Que, pour n variable, on aura

$$\varphi e + \varphi' e' + \varphi'' e''\ldots = 0,$$

et ainsi de suite.

Ces équations, qui seront en nombre égal aux constantes, serviront à les déterminer; on sait d'ailleurs qu'elles reviennent à la condition du *minimum des carrés des erreurs*.

Soit, en effet,

$$e^2 + e'^2 + e''^2 + \ldots,$$

la somme des carrés des erreurs. Différentiant, en faisant varier successivement m, n, etc., les conditions du *minimum* seront :

$$e\frac{de}{dm} + e'\frac{de'}{dm} + e''\frac{de''}{dm} + \ldots = 0,$$

$$e\frac{de}{dn} + e'\frac{de'}{dn} + e''\frac{de''}{dn} + \ldots = 0,$$

. . . .

Or

$$\frac{de}{dm}=f,\quad \frac{de'}{dm}=f',\quad \frac{de''}{dm}=f'',\quad .$$

$$\frac{de}{dn}=\varphi,\quad \frac{de'}{dn}=\varphi',\quad \frac{de''}{dn}=\varphi'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On peut donc dire que la méthode des moindres carrés revient en réalité au calcul élémentaire des *moyennes arithmétiques*, en tenant compte, toutefois, du poids relatif de chacune des observations.

RÉCLAMATION

DE M. HEEGMANN,

Membre de la Société nationale des Sciences et Arts de Lille.

(Extrait d'une Lettre.)

En rendant compte de mon ouvrage de Trigonométrie, vous dites (p. 351) ne pas savoir si l'exactitude des Tables a été *constatée*. Or, j'ai fait, pour obtenir cette exactitude, des dépenses considérables, dont il ne faut pas juger par le profit que peut me donner le livre, qui n'a d'ailleurs été tiré qu'à un très-petit nombre d'exemplaires. J'ai employé séparément plusieurs calculateurs, de manière à contrôler une partie notable de leurs calculs, les uns par les autres. Un second contrôle, non moins efficace, résultait de l'examen des *différences*, opération qui a été faite sur le manuscrit et répétée sur les épreuves de l'imprimerie.

SOLUTION DE LA QUESTION 247

(voir t. IX, p. 358);

PAR M. BUGNOT (J.),
Élève de l'École Polytechnique.

Résoudre l'équation

$$3^x = 54x - 135. \tag{1}$$

Je remarque que $54 = 2.3^3$, et que $135 = 5.3^3$; l'équation est donc

$$3^x = 2.3^3 x - 5.3^3.$$

Je pose

$$x = 3 + y; \tag{2}$$

et, divisant tout par 3^3, j'ai

$$3^y = 2x - 5 = 2(3+y) - 5 = 2y + 1,$$

ou

$$(1+2)^y = 2y + 1;$$

je développe le premier membre par la formule du binôme, et il vient

$$y(y-1)\left[2 + \frac{(y-2)}{3}2^2 + \ldots\right] = 0.$$

De la sorte, les deux racines $y = 0$, $y = 1$, sont mises en évidence; et, se reportant à l'équation (2), on en tire

$$x = 3 \quad \text{et} \quad x = 4,$$

racines qui vérifient l'équation (1).

Actuellement, ramenant l'équation (1) à la forme

$$f(x) = 0,$$

je prends la dérivée

$$f'(x) = 3^x \log' 3 - 54.$$

Pour que cette dérivée soit négative, il faut que l'on ait

$$3^x < \frac{54}{\log' 3},$$

inégalité qui sera vraie, à fortiori, si l'on a

$$3^x \leqq \frac{54}{2} \text{ ou } 27;$$

car

$$\log' 3 = 1,0986122\ldots < 2.$$

Or cette inégalité est évidemment satisfaite par

$$x \leqq 3.$$

On voit de même que, pour $x \geqq 4$, on a toujours

$$f(x) > 0.$$

Donc la fonction est constamment décroissante depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = 3$, et croissante depuis $x = 4$ jusqu'à $x = +\infty$; et, conséquemment, l'équation n'a pas de racines en dehors des limites 3 et 4.

En second lieu, il est évident que si une valeur de x rend positif le binôme $3^x \log' 3 - 54$, toute valeur supérieure $x + h$ le rendra, à fortiori, positif. Donc, quand la fonction $f(x)$, décroissante à partir de $x = 3$ et devenue négative, aura atteint son maximum, elle croîtra constamment et d'une manière continue jusqu'à l'infini. Donc elle ne pourra passer qu'une fois par zéro, ce qui aura lieu pour $x = 4$, puisque $f(4) = 0$. Ainsi l'équation proposée admet les racines 3 et 4 et n'en a pas d'autres.

TABLE DES MATIÈRES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

Analyse algébrique.

Pages.

Analyse indéterminée; Arithmologie et Arithmétique.

Calcul des probabilités.

Déterminants.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie sphérique.

Trigonométrie et tétragonométrie planes.

Géométrie descriptive et pratique.

Géométrie de l'espace.

Coniques planes.

Géométrie des lignes planes, en général.

Géométrie de situation.

Mécanique.

Calcul aux différences; sommation.

Calcul infinitésimal et fonctionnel; séries.

Questions.

Questions résolues.

(*) Ce problème est traité dans l'*Arithmétique universelle* de Newton, traduite par Beaudeux, page 98 (1802).

Bibliographie et Biographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

(*) Nom anagrammatique.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les dix premiers volumes.

TOME I.

Nos.	Pages.
4 (*bis*)	123
25	247
41	396
47	519

TOME II.

Nos.	Pages.
61	48
79	454

TOME III.

Nos.	Pages.
81	40
84	256
87	376

TOME IV.

Nos.	Pages.
93	259

TOME V.

Nos.	Pages.
120	202
136	672

TOME VI.

Nos.	Pages.
141	134
145	216
148	*Ibid.*
153	242
165	394

TOME VII.

Nos.	Pages.
180	157
182	*Ibid.*
190	240
192	368
193	*Ibid.*
198	448

TOME VIII.

Nos.	Pages.
199	44
205	107

TOME IX.

Nos.	Pages.
218	11
228	298

TOME X.

Nos.	Pages.
238	357
240	*Ibid.*
245	258
248	*Ibid.*

Observation. Sur 248 questions, il en reste 31 à résoudre. Les autres sont résolues et imprimées ou bien en manuscrit et paraîtront en 1852.

ERRATA.

TOME V. (*Quatrième supplément.*)

Page 7, ligne 5 en descendant, *au lieu de* 1,0079361, *lisez* 1,0079368.

Page 7, ligne 6 en descendant, *au lieu de* 0,0000004, *lisez* 0,0000003; l'erreur est en moins.

Page 7, ligne 11 en descendant, *au lieu de* $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, *lisez* $\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}$.

Page 7, ligne 7 en remontant, *après* méthode, *ajoutez* d'extraction des racines.

TOME VII. (*Troisième supplément.*)

Page 277, ligne 10 en remontant, *au lieu de* $\frac{b}{f}$, *lisez* $-\frac{b}{f}$.

Page 278, ligne 1 en descendant, *au lieu de* $-4bf$, *lisez* $-2bf$.

Page 278, ligne 3 en descendant, *au lieu de* $-4bf$, *lisez* $-2bf$.

TOME IX. (*Premier supplément.*)

Page 74, ligne 1 en descendant, *au lieu de* par le produit, etc, *lisez* par le quotient du plus simple multiple *n* de ces dénominateurs par le dénominateur correspondant, on obtient, etc.

Page 110, dernière ligne, *au lieu de* à $\overset{=}{>}$ 2, *lisez* $a \overset{=}{>} 2$.

Page 111, ligne 6 en descendant, *au lieu de* $(x^m - 1)^{m+n-1}$, *lisez* $(x-1)^{m-n-1}$.

Page 111, avant-dernière ligne, *au lieu de* moyen, *lisez* majeur.

Page 114, ligne 17 en descendant, *au lieu de* α, *lisez* 2.

Page 114, ligne 19 en descendant, *au lieu de* $S\alpha^{n+1}$, *lisez* Sx^{n+1}.

TOME X.

Page 81, ligne 15, *au lieu de* sont donc en même temps pairs ou impairs, *lisez* qui doivent être en même temps pairs et impairs, sont donc tous les deux pairs.

Page 82, ligne 7 en remontant, *au lieu de* hq^4, *lisez* $4q^4$.

Page 83, lignes 1 et 2, *au lieu de* q et q^2, *lisez* p et p^2.

Page 83, lignes 3 et 4, *au lieu de* pair ou impair comme g, *lisez* si g est pair, et un diviseur $\frac{1}{2}g^2(p^4+4q^4)$, si g est impair.

Page 176, ligne 28, *au lieu de* 303502, *lisez* 53251005444503304.

Page 177, ligne 22, *au lieu de* 1142, *lisez* 168053879.

Page 177, ligne 22, *au lieu de* 4287, *lisez* 89710526.

Page 177, ligne 24, *au lieu de* trop fortes, *lisez* l'une trop forte, l'autre trop faible.

Page 179, ligne 29, *au lieu de* 841, *lisez* 8415.

Page 180, ligne 4, *au lieu de* 3491, *lisez* 0337.

Page 180, ligne 4, *au lieu de* 3035, *lisez* 0325.

Page 180, ligne 6, *au lieu de* 3035, *lisez* 5325.

Page 180, ligne 12, *au lieu de* 244808, *lisez* 245808.

Page 180, lignes 13, 15 et 17, *au lieu de* 136, *lisez* 201.

Page 180, ligne 15, *au lieu de* 4,2483, *lisez* 0,42483.

Page 180, ligne 17, *au lieu de* 114, *lisez* 168.

Page 180, ligne 22, *au lieu de* $+0,0000234$, *lisez* $-0,00004056$.

Page 180, ligne 24, *au lieu de* 3,513, *lisez* 0,3513.

Page 180, ligne 24, *au lieu de* $+0,234$, *lisez* $-0,4056$.

Page 180, ligne 26, *au lieu de* $-0,001713$, *lisez* $+0,002971$.

Page 180, ligne 26, *au lieu de* 4287, *lisez* 8971.

Page 182, ligne 14, *au lieu de* $P_{\frac{n-1}{2}}$, *lisez* $P_{\frac{n+1}{2}}$

Page 418, ligne 6, *au lieu de* $\frac{d^2z}{dx}$, *lisez* $\frac{d^2z}{dx^2}$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.