

DIEU

**Règle pour la résolution en nombres entiers de l'équation  $ax + by = c$**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 9 (1850), p. 67-70

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1850\\_1\\_9\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_67_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RÈGLE POUR LA RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE  
L'ÉQUATION  $ax + by = c$**

( voir t. III, p. 97, et t. IV, p. 146 );

PAR M. DIEU,

Docteur ès sciences mathématiques et agrégé de l'Université (Dijon).

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres entiers premiers entre eux,  $a < b$ , et  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}, r_n$  les restes successifs formés par la recherche du plus grand commun diviseur de  $b$  et de  $a$ .

On démontre que la solubilité en nombres entiers de l'équation

(1)  $ax + by = \pm c$

dépend de celle des équations

(2) 
$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 y + at_1 = \pm c, \\ r_2 t_1 + r_1 t_2 = \pm c, \\ \dots \dots \dots \\ r_k t_{k-1} + r_{k-1} t_k = \pm c, \\ \dots \dots \dots \\ r_n t_{n-1} + r_{n-1} t_n = \pm c; \end{array} \right.$$

de sorte qu'il est nécessaire et suffisant que la dernière des équations (2) soit soluble en nombres entiers, pour que celles qui la précèdent le soient aussi.

La condition nécessaire et suffisante de solubilité de la dernière équation (2) étant évidemment que

$r_n = 1,$

celle de l'équation (1) est que  $a$  et  $b$  soient premiers entre

eux, et l'on étend cette conclusion aux cas où les coefficients de  $x$  et de  $y$  auraient des signes quelconques, par un raisonnement fort simple, qu'il est inutile de rappeler ici.

$r_n$  étant égal à 1, si l'on représente par  $q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}$  les quotients de la recherche du plus grand commun diviseur de  $a$  et de  $b$ , les équations (1) et (2) peuvent être remplacées par les  $n + 1$  équations

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} t_{n-1} = -q_{n+1} t_n \pm c, \\ t_{n-2} = -q_n t_{n-1} + t_n, \\ \dots \dots \dots \dots \\ t_{i-1} = -q_i t_{i-1} + t_i, \\ \dots \dots \dots \dots \\ t_1 = -q_2 t_2 + t_2, \\ y = -q_1 t_1 + t_1, \\ x = -q_1 y + t_1; \end{array} \right.$$

et si l'on élimine entre elles les  $n - 1$  indéterminées,  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ , on aura deux équations entre  $x, y$  et  $t_n$ .

Cette élimination s'exécute par des substitutions successives, et il résulte de la forme des équations (3), qu'elle doit conduire à

$$y = B. (\pm c) + B' t_n,$$

et

$$x = A. (\pm c) + A' t_n;$$

$A'$  et  $B'$  étant des fonctions de tous les quotients  $q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}$ , et  $A$  et  $B$  des fonctions des  $n$  premiers quotients seulement.

Or, avec un peu d'attention, on reconnaît que les coefficients  $A$  et  $B$  s'obtiendront par la règle suivante :

*Écrivez sur une ligne 1, et dans un ordre inverse à celui dans lequel on les obtient, les quotients de la*

recherche du plus grand commun diviseur de  $a$  et de  $b$ , en exceptant le dernier de ces quotients.

Répétez, sur une ligne parallèle à celle-là, les deux premiers nombres 1 et  $q_n$ ; multipliez le deuxième nombre  $q_n$  par le troisième nombre  $q_{n-1}$  de la première ligne, et ajoutez au produit le premier nombre 1 de la seconde ligne; puis, continuez de la même manière, jusqu'à ce que vous ayez autant de nombres sur la seconde ligne que sur la première; de sorte que si  $N_m$  et  $N_{m+1}$  sont le  $m^{\text{ème}}$  et le  $(m+1)^{\text{ème}}$  nombres de la seconde ligne, le suivant sera

$$N_{m+1} \times q_{n-m} + N_m.$$

Le dernier nombre calculé pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant qu'il occupera un rang impair ou un rang pair, sera le coefficient A; et l'avant-dernier, pris avec un signe contraire, sera le coefficient B.

Quant aux nombres précédents, pris de même avec le signe + ou avec le signe —, suivant leur rang respectif, ce sont les coefficients de  $\pm c$  dans les expressions de  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  en fonctions de  $t_n$ ; mais on n'en a pas besoin.

Cela s'applique, avec une légère modification, au calcul de A' et de B', et l'on pourrait prouver, par cette voie, que

$$A' = \pm b \quad \text{et} \quad B' = \mp a.$$

Dans le cas où l'équation à résoudre serait de la forme

$$ax - by = \pm c,$$

il suffirait de changer le signe de la valeur obtenue pour  $b$  par l'application de la règle précédente.

Enfin, si  $a$  était supérieur à  $b$  au lieu d'être moindre, on appliquerait le dernier nombre à l'inconnue  $y$ , et l'avant-dernier à l'inconnue  $x$ . Exemple :

$$785x - 432y = 739$$

Les quotients fournis par la recherche du plus grand commun diviseur sont

$$1, 1, 4, 2, 7, 2 \text{ et } 2.$$

Il faut donc écrire

$$1, 2, 7, 2, 4, 1, 1,$$

d'où l'on tire, par la règle ci-dessus,

$$1, 2, 15, 32, 143, 175, 318.$$

Le dernier nombre étant de rang impair, il faudrait le prendre avec le signe + si le coefficient de  $y$  était positif; mais, comme ce coefficient est négatif, on doit changer le signe : on aura donc la solution particulière

$$x = -175.739, \quad y = -318.739;$$

d'où

$$x = -235002 + 432t, \quad y = -129325 + 785t,$$

que l'on réduit à

$$x = -157 + 432t, \quad y = -287 + 785t,$$

en remplaçant  $t$  par  $299 + t$  (\*)