

GUSTAVE MARQFOY

Solution de la question 135

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 51-55

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__51_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 155

(VOIR T. V, p. 672)

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Elevé en mathématiques supérieures

PROBLEME. *Trouver la relation qui doit exister entre le côté et la base d'un triangle isocèle, pour que la bissectrice de l'angle à la base ait un rapport donné avec le côté du triangle.* (VIETE.)

Solution. Soit ABC un triangle isocèle dans lequel AB, AC sont les côtés égaux, BK étant la bissectrice ;

$$AB = a,$$

$$BC = b.$$

Pour obtenir cette relation, il faut, dans $BK : AB :: m : n$, exprimer BK en fonction de a et de b . Or

$$\begin{aligned} BK : BC &:: \sin C : 3 \sin \frac{C}{2} - 4 \sin \frac{C}{2}. \\ &:: 2 \cos \frac{C}{2} : 4 \cos^2 \frac{C}{2} - 1; \end{aligned}$$

() On trouve des relations du genre de celles qui ont été indiquées par M. Lebesgue, dans un Mémoire de M. Catalan sur la transformation des variables dans les intégrales multiples inséré parmi ceux de l'Académie de Bruxelles.

donc

$$\text{BK} = \frac{2b \cdot \cos \frac{C}{2}}{4 \cos^2 \frac{C}{2} - 1},$$

$$\cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b+2a}{a}};$$

donc

$$\text{BK} = \frac{ab \sqrt{\frac{b+2a}{a}}}{b+a},$$

et la relation cherchée sera

$$nb \sqrt{\frac{b+2a}{a}} = m(b+a).$$

1°. Supposons $m=n$; alors $b \sqrt{\frac{b+2a}{a}} = b+a$, ou, en développant, $b^3 + ab^2 - 2a^2b - a^3 = 0$. Divisant par a^3 , et observant que $\frac{b}{a} = 2 \cos C$, les valeurs de $\cos C$ seront données par l'équation

$$8x + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Or la figure indique que, pour $m=n$, c'est-à-dire lorsque $\text{BK} = a$, l'angle $C = \frac{2\pi}{7}$.

Voyons si le résultat fourni par la trigonométrie s'accorde avec le calcul précédent.

On a l'équation

$$64x - 112x + 56x - 7x - 1 = 0,$$

dans laquelle

$$x = \cos \frac{2\pi}{7} \quad (\text{voir t. V, p. 350}).$$

et cette équation a pour racines les cosinus des angles

$$\frac{2\pi}{7}, \quad \frac{4\pi}{7}, \quad \frac{6\pi}{7}, \quad \frac{8\pi}{7}, \quad \frac{10\pi}{7}, \quad \frac{12\pi}{7}, \quad \frac{14\pi}{7}.$$

Or

$$\cos \frac{14\pi}{7} = 1;$$

donc elle admet la racine $+1$, et si nous divisons son premier membre par $x - 1$, le quotient sera

$$(1) \quad 64x^6 + 64x^5 - 48x^4 - 48x^3 + 8x^2 + 8x + 1.$$

Ce quotient égalé à zéro admettra les six autres racines : mais

$$\begin{aligned} \cos \frac{6\pi}{7} &= \cos \frac{8\pi}{7}, \\ \cos \frac{4\pi}{7} &= \cos \frac{10\pi}{7}, \\ \cos \frac{2\pi}{7} &= \cos \frac{12\pi}{7}; \end{aligned}$$

donc le quotient (1) est un carré, et si nous extrayons sa racine, nous trouvons

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0,$$

qui est précisément l'équation fournie par le premier calcul. On voit donc, qu'à l'exception de la racine $+1$, ces deux équations admettent les mêmes racines.

2°. $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$. La relation devient $a^2 - b^2 - ab = 0$; d'où l'on tire l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui doit donner les valeurs de $\cos C$. En la résolvant, on trouve

$$r' = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \quad r'' = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}).$$

Or

$$\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) = \cos 72^\circ, \quad \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) = \cos 2 \cdot 72.$$

De ces deux valeurs, la première seule convient, puisque $2 \cdot 72 > 90^\circ$.

Donc $C = 72^\circ$. On le vérifie immédiatement sur la figure.

Ce résultat s'accorde avec celui qui est fourni par la trigonométrie. En effet, l'équation qui donne $\cos \frac{2\pi}{7}$ est

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0.$$

Ses racines sont les cosinus des angles

$$\frac{2\pi}{5}, \quad \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{6\pi}{5}, \quad \frac{8\pi}{5}, \quad \frac{10\pi}{5};$$

donc elle admet la racine $+1$.

Le quotient de son premier membre par $x - 1$ est

$$(\varrho) \quad 16x^4 - 16x^3 - 36x^2 - 36x + 1;$$

mais

$$\cos \frac{8\pi}{5} = \cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{2\pi}{5},$$

$$\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \left(2\pi - \frac{4\pi}{5} \right) = \cos \frac{4\pi}{5}.$$

donc le quotient (ϱ) est un carré, et si nous extrayons la racine, nous obtenons l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui est celle qui a été fournie par le calcul précédent.

$$3^\circ. \text{ Si } a = b, \quad \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

Note. Le même élève nous a adressé de très-bonnes solutions, parvenues trop tard, de la question élémentaire du grand concours, et de la question 214^{me}.
