NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V.-A. LEBESGUE

Arithmologie. Note sur un système d'équations indéterminées

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 46-51

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__46_0>

ARITHMOLOGIE. — NOTE SUR UN SYSTÈME D'EQUATIONS INDÉTERMINÉES

(voir t I, p 387),

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Le système en question est celui-ci :

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \tag{1}$$

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \tag{2}$$

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \tag{3}$$

$$bc + b'c' + b''c'' = 0, \tag{4}$$

$$ca + c'a' + c''a'' = 0, \tag{5}$$

$$ab + a'b' + a''b'' = 0. \tag{6}$$

Ces équations en donnent, comme l'on sait, beaucoup d'autres, dont nous allons rappeler brièvement la déduction, avant de faire connaître deux nouvelles équations dues à M. Jacobi. (*Journal* de M. Crelle, t. XX, p. 46.)

Les équations (5) et (6) donnent, par la résolution, relativement à $\frac{a}{a''}$, $\frac{a'}{a''}$,

$$\frac{b'c'' - b''c'}{a} = \frac{b''c - bc''}{a'} = \frac{bc' - b'c}{a''}:$$

la valeur commune est ∓ 1.

En effet, si l'on élève au carré, et que l'on ajoute terme à terme les fractions résultantes, en vertu de

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$

et de

$$(b'c'' - b''c')^2 + (b''c - bc'')^2 + (bc' - b'c)^2 + (bc + b'c' + b''c'')^2$$
$$= (b^2 + b'^2 + b''^2)(c^2 + c'^2 + c''^2),$$

on aura 1 pour la valeur du carré de la valeur commune. On posera donc

(7) $$\pm a = b'c'' - b''c',$$

(8) $$\pm a' = b''c - bc'',$$

(9) $$\pm a'' = bc' - b'c;$$

d'où, en multipliant par a, a', a'' les deux membres de ces équations, on aura, en sommant,

$$\pm 1 = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c).$$

Si dans ces quatre équations on permute circulairement a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', la dernière équation ne changera pas; ainsi, les équations (7), (8) et (9) entraînent celles-ci :

(10) $$\pm b = c'a'' - c''a',$$

(11) $$\pm b' = c''a - ca'',$$

(12) $$\pm b'' = ca' - c'a;$$

(13) $$\pm c = a'b'' - a''b',$$

(14) $$\pm c' = a''b - ab'',$$

(15) $$\pm c'' = ab' - a'b;$$

(16) $$\pm 1 = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c).$$

Au moyen de ces équations (7) à (15), on vérifie tout de suite ces trois autres :

(17) $$aa' + bb' + cc' = 0,$$

(18) $$aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

(19) $$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

enfin, les équations

(20) $$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

(21) $$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

(22) $$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

s'établissent ainsi :

$$\begin{aligned}(a'^2 + a''^2)(b'^2 + b''^2) &= (1 - a^2)(1 - b^2) = 1 - a^2 - b^2 + a^2 b^2\\ &= 1 - a^2 - b^2 + (a'b' + a''b'')^2,\end{aligned}$$

ou encore

$$(a'b'' - a''b')^2 = 1 - a^2 + b^2,$$

ou bien

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

A ces équations (7) à (22), M. Jacobi a joint deux équations très-remarquables,

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &1^{\circ}.\ a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2 \\ &= a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2. \end{aligned}\right.$$

On a

$$a^2a'^2a''^2 = a'a''(bb'' + cc'')(bb' + cc'),$$

ou bien

$$a^2a'^2a''^2 = a'a''b'b''.b^2 + a'a''c'c''.c^2 + a'b''c.a''bc' + a'bc''.a''b'c.$$

De là, par la permutation tournante,

$$b^2b'^2b''^2 = b'b''c'c''.c^2 + b'b''a'a''a^2 + b'c''a.b''ca' + b'ca''.b''c'a$$
$$c^2c'^2c''^2 = c'c''a'a''b^2 + c'c''b'b''a^2 + c'a''a\ c''ab'' + c'ab''c.c''a'b.$$

Mais

$$\begin{aligned} a^2a'a''(b'b'' + c'c'') &= -a^2a'^2a''^2, \\ b^2b'b''(c'c'' + a'a'') &= -b^2b'^2b''^2, \\ c^2c'c''(a'a'' + b'b'') &= -c^2c'^2c''^2. \end{aligned}$$

On aura donc, par addition,

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2(a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) \\ &= a'b''c.a''bc' + a''bc'.ab'c' + ab'c''.a'bc \\ &\quad + a'bc''.a''b'c + a''b'c.ab''c' + ab''c'.a'bc''. \end{aligned}$$

Un calcul tout semblable donne

$$\Gamma = 2(a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2);$$

de là l'équation (23).

L'équation suivante est plus compliquée. Si l'on fait

$$\begin{aligned} p &= ab'c'' + a'b''c + a''bc', & q &= ab''c' + a'bc'' + a''b'c, \\ r &= ab'b'' + a'b''b + a''bb', & s &= ac'c'' + a'c''c + a''cc', \\ r' &= bc'c'' + b'c''c + b''cc', & s' &= ba'a'' + b'a''a + b''aa', \\ r'' &= ca'a'' + c'a''a + c''aa', & s'' &= cb'b'' + c'a''b + c''bb'; \end{aligned}$$

on aura l'équation (24) suivante,

$$(p-q)^2 = 15(a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) + (r-s)^2 + (r'-s')^2 + (r''-s'')^2 + (p+q)^2;$$

ou bien, en vertu de l'équation (23),

$$(24) \qquad (p-q)^2 + a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2 = (4aa'a'')^2 + (4bb'b'')^2 + (4cc'c'')^2 + (r-s)^2 + (r'-s')^2 + (r''-s'')^2 + (p+q)^2.$$

Pour vérifier l'équation (24), on remarquera que l'on a

$$(p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq,$$
$$(r-s)^2 = (r+s)^2 - 4rs, \quad r+s = -3aa'a'';$$

d'où

$$(r-s)^2 = 9a^2a'^2a'' - 4rs.$$

De même

$$(r'-s')^2 = 9b^2b'^2b'' - 4r's',$$
$$(r''-s'')^2 = 9c^2c'^2c'' - 4r''s''.$$

De sorte qu'en divisant par 4, l'équation (24) donne

$$rs + r's' + r''s'' = 6(a^2a'^2a'' + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) = 3\Gamma + pq.$$

Or on trouve

$$rs = \Gamma + a^2b'b''c'c'' + a'^2b''bc''c + a''^2bb'cc',$$
$$r's' = \Gamma + b^2c'c''a'a'' + b'^2c''ca''a + b''^2cc'aa',$$
$$r''s'' = \Gamma + c^2a'a''b'b'' + c'^2a''ab''b + c''^2aa'bb',$$

d'où, par l'addition,

$$rs + r's' + r''s'' = 3\Gamma + pq.$$

Voir Journal de M. Crelle, t. XXX, p. 46.

N. B. L'équation (16) donne

$$p - q = \pm 1.$$

Rien de plus facile que de trouver les solutions réelles du système (1) à (6), à trois indéterminées.

D'abord, les équations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

donnent, en posant

$$a'' = \cos\gamma,$$

puisque $a''^2 < 1$,

$$a = \sin\gamma \sin\varphi, \quad a' = \sin\gamma\cos\varphi, \quad a'' = \cos\gamma,$$
$$b'' = \sin\gamma\sin\psi, \quad c'' = \sin\gamma\cos\psi;$$

les équations (2) à (6) deviennent

$$b^2 + b'^2 = 1 - \sin^2\gamma\sin^2\psi, \quad c^2 + c'^2 = 1 - \sin^2\gamma\cos^2\psi,$$
$$b\sin\varphi + b'\cos\varphi = -\cos\gamma\sin\psi,$$
$$c\sin\varphi + c'\cos\varphi = -\cos\gamma\cos\psi,$$
$$bc + b'c' = -\sin^2\gamma\sin\psi\cos\psi.$$

On tire de là

$$(b^2 + b'^2)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - (b\sin\varphi + b'\cos\varphi)^2$$
$$= 1 - \sin^2\gamma\sin^2\psi - \cos^2\gamma\sin^2\psi;$$

ou bien

$$(b\cos\varphi - b'\sin\varphi)^2 = \cos^2\psi,$$

ou encore

$$b\cos\varphi - b'\sin\varphi = i\cos\psi; \quad (i = \pm 1).$$

D'ailleurs

$$b\sin\varphi + b'\cos\varphi = -\cos\gamma\sin\psi,$$

de là

$$b = -\cos\gamma\sin\varphi\sin\psi + i\cos\varphi\cos\psi,$$
$$b' = -\cos\gamma\cos\varphi\sin\psi - i\sin\varphi\cos\psi.$$

On a aussi

$$c\cos\varphi - c'\sin\varphi = i'\sin\psi, \quad (i' = \pm 1),$$
$$c\sin\varphi + c'\cos\varphi = -\cos\gamma\cos\psi;$$

de là

$$c = -\cos\gamma\sin\varphi\cos\psi + i'\cos\varphi\sin\psi,$$
$$c' = -\cos\gamma\cos\varphi\cos\psi - i'\sin\varphi\sin\psi.$$

Ces valeurs réduisent l'équation

$$bc + b'c' = -\sin^2\gamma\sin\psi\cos\psi$$

à

$$u' + \sin \varphi + \cos^2 \varphi = 0,$$

donc

$$u' = -1.$$

Ainsi i et i' sont de signes contraires. On a donc la solution générale (*).