

TERQUEM

Études sur le binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 459-463

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__459_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDES SUR LE BINÔME DE NEWTON.

1. Soit la série

$$\begin{aligned}
 A = & a^f + f a^{f-1} x + \frac{f \cdot f - 1}{2} a^{f-2} x^2 + \frac{f \cdot f - 1 \cdot f - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{f-3} x^3 + \dots \\
 & + F_{n-1} a^{f-n+1} x^{n-1} + F_{n-1} \frac{(f - n + 1)}{n} a^{f-n} x^n + \dots,
 \end{aligned}$$

a, f, x sont des quantités quelconques, réelles ou imaginaires.

Faisons de même

$$\begin{aligned}
 B = & a^g + g a^{g-1} x + \frac{g \cdot g - 1}{1 \cdot 2} a^{g-2} x^2 + \dots \\
 & + G_{n-1} a^{g-n+1} x^{n-1} + G_n \frac{(g - n + 1)}{n} a^{g-n} x^n + \dots
 \end{aligned}$$

séries qu'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
 A = & a^f + F_1 a^{f-1} x + F_2 a^{f-2} x^2 + \dots \\
 & + F_{n-1} a^{f-n+1} x^{n-1} + F_n a^{f-n} x^n + \dots, \\
 B = & a^g + G_1 a^{g-1} x + G_2 a^{g-2} x^2 + \dots \\
 & + G_{n-1} a^{g-n+1} x^{n-1} + G_n a^{g-n} x^n + \dots,
 \end{aligned}$$

on a la loi de formation

$$\begin{aligned}(n-m) F_{n-m} &= (f-n+m+1) F_{n-m-1}, \\ mG_m &= (g-m+1) G_{m-1};\end{aligned}$$

d'où l'on déduit cette relation,

$$(1) \quad \begin{cases} nF_{n-m} G_m = (f-n+m+1) F_{n-m-1} G_m \\ \qquad \qquad \qquad + (g-m+1) G_{m-1} F_{n-m}. \end{cases}$$

Multiplions la série A par la série B; désignons la série produite par C, et faisons

$$f + g = h,$$

on a

$$C = \begin{array}{l} a^k + F_1 \\ + G_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} a^{k-1} a + F_2 \\ \qquad \qquad \qquad F_1 G_1 \\ \qquad \qquad \qquad G_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} a^{k-2} x^2 + \dots + T_{n-1} a^{k-n+1} x^{n-1} + T_n a^{k-n}. \end{array}$$

$$\begin{aligned}T_{n-1} &= F_{n-1} + F_{n-2} G_1 + F_{n-3} G_2 + \dots + F_1 G_{n-2} + G_{n-1}, \\ T_n &= F_n + F_{n-1} G_1 + F_{n-2} G_2 + \dots + F_1 G_{n-1} + G_n.\end{aligned}$$

Dans la relation (1), faisons m égal successivement à 0, 1, 2, 3, ..., n , et remarquant que $G_0 = 1$ et $G_{-1} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}nF_n &= (f-n+1) F_{n-1}, \\ nF_{n-1} G_1 &= (f-n+2) F_{n-2} G_1 + g F_{n-1}, \\ nF_{n-2} G_2 &= (f-n+3) F_{n-3} G_2 + (g-1) F_{n-2} G_1, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ nG_n &= (g-n+1) G_{n-1};\end{aligned}$$

ajoutant ces équations membre à membre, on trouve

$$nT_n = (h-n+1) T_{n-1}$$

Ainsi, la série C a la même loi de formation que la série A, et on l'obtient en remplaçant f par $f+g$ dans la série A; c'est ce qu'on exprime en écrivant

$$(2) \quad C = A.B.$$

Observation essentielle. L'équation (2) désigne pure-

ment une identité *littéraire* entre des *séries* et ne subsiste pas d'une manière absolue pour des valeurs *numériques*; c'est-à-dire que des valeurs numériques quelconques, attribuées à a, f, g, x et substituées dans A, B, C , ne donnent pas C égale au produit AB , même d'une manière approchée : cette dernière égalité ne subsiste que lorsque les séries A, B, C sont toutes trois convergentes. Cette condition en entraîne d'autres pour les valeurs numériques et les renferme dans certaines limites.

Observation II. Lorsque f et g sont des nombres entiers positifs, les séries A, B, C deviennent des polynômes d'un nombre fini de termes, et alors l'équation (2) subsiste d'une manière absolue pour des valeurs numériques quelconques.

2. Désignons la série A par $\varphi(f)$; la relation (2) peut s'écrire ainsi :

$$\varphi(f) \varphi(f_1) = \varphi(f + f_1);$$

et de là

$$(3) \quad \varphi(f) \varphi(f_1) \varphi(f_2) \dots \varphi(f_n) = \varphi(f + f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

Observation. Cette démonstration de la formule fondamentale (3) due à Euler est donnée par Weingartner (*), d'après Hindenbourg.

3. Faisons $f = f_1 = f_2 = \dots$, on a

$$(4) \quad [\varphi(f)]^n = \varphi(nf),$$

n est un nombre essentiellement positif et entier.

4. Posons $f = 1$, alors

$$\varphi(f) = \varphi(1) = a + x;$$

donc

$$(a + x)^n = \varphi(n),$$

relation qui démontre le binôme pour un exposant entier positif.

(*) *Lehrbuch der combinatoischen analysis*, tome II, page 24; 1801.

5. Soit $f = \frac{p}{q}$, p et q sont des nombres entiers positifs. Faisons $n = q$; alors

$$\left[\varphi \left(\frac{p}{q} \right) \right]^q = \varphi(p).$$

Mais, d'après le paragraphe précédent,

$$\varphi(p) = (a + x)^p;$$

donc

$$\left[\varphi \left(\frac{p}{q} \right) \right]^q = (a + x)^p.$$

Cela veut dire que si, dans la série A, on remplace f par $\frac{p}{q}$, et qu'on multiplie cette série $q - 1$ fois par elle-même, il ne reste qu'un nombre $p + 1$ de termes donnés par $(a + x)^p$; la dernière équation peut s'écrire ainsi,

$$(5) \quad (a + x)^{\frac{p}{q}} = \varphi \left(\frac{p}{q} \right);$$

c'est le binôme pour le cas des exposants positifs fractionnaires.

6. On a

$$\varphi(f)\varphi(-f) = \varphi(0) = 1;$$

donc

$$\varphi(-f) = \frac{1}{\varphi(f)}.$$

Donc, f étant une fraction rationnelle, on a

$$\varphi(-f) = (a + x)^{-f},$$

binôme pour les exposants négatifs.

Observation. Ainsi, si l'on fait sur le polynôme $(a + x)^p$ les mêmes opérations que pour l'extraction de la racine d'indice q , on obtient une série infinie dont la loi de formation est celle du binôme : de même, lorsqu'on

divise l'unité par le polynôme $(a + x)^p$, on obtient la série $\varphi(-p)$.

7. PROBLÈME. a, x étant des quantités réelles et f une fraction, ou un nombre rompu, dans quel cas la série \mathbf{A} est-elle convergente?

Solution. u_n désignant le $n^{\text{ième}}$ terme, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f - n + 1}{n + 1} \frac{x}{a}.$$

Si $n = \infty$, ce rapport devient égal à $\frac{-x}{a}$; cette série s'approche donc de la progression géométrique qui a pour rapport $\frac{-x}{a}$ (voir tome VII, page 108); elle est donc convergente si $\frac{x}{a} < 1$, et alors $(x + a)^f$ est la somme de la série; si x et a sont de même signe, cette somme est tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de $(x + a)^f$; et si x et a sont de signes différents, la somme reste constamment au-dessous de $(x + a)^f$; si $x = a$, la série devient

$$a^f \left[1 + f + \frac{f \cdot (f-1)}{1 \cdot 2} + \frac{f \cdot (f-1) \cdot (f-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right].$$

Si f est positif, la série est convergente pour toute valeur de f comprise entre -1 et $+\infty$, car on a alors

$$1 + f + \frac{f \cdot (f-1)}{1 \cdot 2} + \dots = 2^f;$$

si $x = -a$, alors la série devient

$$a^f \left(1 - f + \frac{f \cdot (f-1)}{1 \cdot 2} + \dots \right),$$

série convergente pour toute valeur positive de f . Pour toute autre valeur de x, a, f , la série est divergente et n'a plus aucune somme.