

GUSTAVE MARQFOY

Solution de la question 45

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 432-433

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__432_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 45

(voir t. I, p. 519):

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Institution Sainte-Barbe.

Trouver le lieu des intersections successives de toutes les ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position, et son conjugué donné de grandeur seulement.

Je prends l'une des ellipses correspondante à une position des deux diamètres donnés. Son équation est

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a' b'^2.$$

Si l'on prend pour nouveaux axes le même axe des x et une perpendiculaire menée par l'origine pour axe des y , l'équation de l'ellipse deviendra, à l'aide des formules de transformation

$$y = \frac{y'}{\sin \theta}, \quad x = x' - y' \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

$$a'^2 y'^2 + b'^2 (x' \sin \theta - y' \cos \theta)^2 = a'^2 b'^2 \sin^2 \theta,$$

ou, en développant,

$$a'^2 y'^2 + b'^2 \sin^2 \theta \cdot x'^2 + b'^2 \cos^2 \theta \cdot y'^2$$

$$- 2 b'^2 x' y' \cdot \sin \theta \cos \theta = a'^2 b'^2 \sin^2 \theta.$$

Cette équation devient, en remplaçant $\sin^2 \theta$ par $\frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta$ par $\frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, et en ordonnant,

$$b'^2 (x'^2 + y'^2 - a'^2) + 2 a'^2 y'^2$$

$$= b'^2 (x'^2 - y'^2 - a'^2) \cos 2\theta + 2 b'^2 x' y' \cdot \sin 2\theta.$$

Pour trouver le lieu des intersections successives des ellipses représentées par cette équation lorsque l'angle 2θ varie, il faut, d'après la règle ordinaire, prendre la dérivée par rapport à 2θ et éliminer cet angle entre l'équation ainsi obtenue et la première.

La dérivée est

$$b'^2 (x'^2 - y'^2 - a'^2) \cdot \sin 2\theta - 2 b'^2 \cdot x' y' \cos 2\theta = 0,$$

et l'angle θ s'élimine en élevant les deux équations au carré, et en ajoutant; on obtient ainsi

$$[b'^2 (x'^2 + y'^2 - a'^2) + 2 a'^2 y'^2]^2$$

$$= b'^4 (x'^2 - y'^2 - a'^2)^2 + 4 b'^4 x'^2 y'^2,$$

ou, toutes réductions faites, et en posant, pour abrégier,

$$A^2 = \frac{b'^2 + 2 a'^2}{2}, \quad B^2 = \frac{b'^2 (b'^2 + 2 a'^2)}{2 (a'^2 + b'^2)},$$

$$A^2 y'^2 + B^2 x'^2 = A^2 B^2,$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.