

J. MENTION

Note sur le triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 401-403

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__401_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE

(voir t. IX, p. 324),

PAR M. J. MENTION.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Feu M. Richard m'ayant demandé, à plusieurs reprises, de lui démontrer géométriquement le contact du cercle des neuf points, voici le moyen auquel je suis parvenu il y a quelque temps.

Je me propose de mener, par le milieu d'un des côtés a , un cercle tangent au système (r, α) ou (β, γ) .

Soit F le pied de la bissectrice intérieure passant par le sommet A; ce pied est le centre de similitude interne du système (r, α) ; soient D, D' les points où (r) , (α) touchent le côté a dont le milieu est M et K le pied de la hauteur relative à ce côté. On prouve aisément cette proportion : $FD.FD' = FM.FK$ (voir GERONO, *Annales*, tome III, page 496). Ainsi le cercle cherché passe par le pied de la hauteur. Or je choisis le milieu du côté a parce qu'il est un point de l'axe radical de chacun des systèmes (r, α) , (β, γ) , et me voici amené à cette question spéciale :

« Trouver la position d'une circonférence tangente à » deux circonférences données, et passant par un point » de leur axe radical. »

Cette position se fixe très-nettement en faisant usage d'une solution aussi élégante que peu connue, donnée, pour le cas général, par M. Cauchy, alors élève de l'École Polytechnique (Correspondance sur cette École, tome I, page 193), ce qui conduit au théorème suivant.

2. THÉORÈME. M, un point de l'axe radical de deux

cercles, O, O'; A, A' les points de contact d'une des tangentes communes. Les points B, B' où les lignes MA, MA' coupent les cercles, sont les points où le cercle tangent à (OA, O'A') et passant par M touche les cercles.

Le centre du cercle est situé sur la perpendiculaire abaissée de M sur la tangente commune; et si δ désigne la distance de M à cette tangente, son rayon est égal à $\frac{t^2}{2\delta}$; expression dans laquelle t est la longueur commune des tangentes menées par M aux deux cercles.

Conséquemment, revenant au triangle rectiligne de ci-dessus, la perpendiculaire abaissée de M sur tang (r, α) contient le centre du cercle passant par M tangentielle-ment au système (r, α) ; mais tang (r, α) est perpendiculaire au rayon du cercle circonscrit issu du sommet A (voir 1^{re} partie, corollaire 3). Donc cette perpendiculaire est un rayon du cercle des neuf points. En voilà plus qu'il n'en faut pour établir l'identité du cercle cherché et de celui des neuf points.

Ce procédé, appliqué aux trois systèmes où entre le cercle r , donne le théorème suivant :

Les droites qui joignent les milieux des côtés aux points de contact de tang (α, r) , (β, r) , (γ, r) avec le cercle inscrit se coupent en un même point de ce cercle;

Et trois autres théorèmes analogues relatifs aux cercles ex-inscrits.

3. *Axes radicaux des systèmes (r, α) , (β, γ) ...* Ces six axes sont les parallèles menées par les milieux des côtés du triangle aux six bissectrices. Ainsi les parallèles aux bissectrices externes se coupent au centre radical (z) du système (α, β, γ) ; les parallèles à la bissectrice interne d'un sommet et aux bissectrices externes des deux autres sommets, se coupent en des points z', z'', z''' , centres radicaux des trois systèmes (r, α, β) . De sorte que

ces quatre centres radicaux sont les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle formé par les milieux des côtés du triangle proposé.

Je terminerai par les deux énoncés suivants :

THÉORÈME. *Par les points où le cercle inscrit touche les côtés, menez des parallèles aux bissectrices externes des sommets opposés à ces côtés; le triangle ainsi formé et le triangle $z'z''z'''$ ont pour centre de similitude le point de contact du cercle inscrit et de celui des neuf points.*

THÉORÈME. *Par les points où l'un des trois cercles ex-inscrits (α) touche les prolongements des côtés, menez des parallèles aux bissectrices externes des sommets opposés à ces côtés, et une parallèle à la bissectrice interne du troisième sommet par le dernier point de contact; le triangle ainsi formé et le triangle $zz''z'''$ ont pour centre de similitude le point de contact du cercle ex-inscrit (α) et de celui des neuf points.*
