

C.-E. PAGE

**Programme d'un cours de mécanique
élémentaire, troisième article**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 368-374

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_368_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE,

TROISIEME ARTICLE (voir page 243 de ce volume),

PAR M. C.-E. PAGE.

Du centre des moyennes distances pris pour centre de rotation.

25. Ce qui précède suffit pour démontrer que dans tout système, il existe un centre des moyennes distances; c'est-à-dire un point tel, que la somme des distances de tous les autres points du système à un plan quelconque passant par ce point est nulle. Maintenant, nous allons démontrer que, lorsque le centre des moyennes distances est pris pour centre de rotation, la somme des projections sur une droite quelconque de toutes les vitesses dues à la rotation est toujours nulle.

Les vitesses dues à la rotation sont toutes perpendi-

culaires à l'axe instantané; par conséquent, leurs projections sur cet axe sont nulles. Nous n'avons donc à nous occuper que des projections sur une direction perpendiculaire à l'axe.

Par un des points A du système (*fig. 1*), menons perpendiculairement à l'axe instantané un plan qui le rencontre en O . La vitesse Am due à la rotation est située dans ce plan, perpendiculairement au rayon OA . En appelant ω la vitesse angulaire, on a

$$Am = OA \cdot \omega.$$

Projetons cette vitesse Am sur une droite OX perpendiculaire à l'axe. Soit pq cette projection; nous aurons

$$pq = mn.$$

Les triangles semblables OAp , Amn donnent

$$mn : Am :: Ap : OA;$$

d'où

$$pq = mn = \frac{Am \cdot Ap}{OA}.$$

Remplaçons Am par sa valeur $OA \cdot \omega$; il vient

$$pq = Ap \cdot \omega.$$

Cette projection reste la même sur toute droite parallèle à OX ; donc, pour un point quelconque, la projection sur une droite parallèle à OX de la vitesse due à la rotation, est égale au produit de la vitesse angulaire ω par la distance de ce point à un plan mené par l'axe instantané et par la droite OX . La somme des projections est égale au produit de la vitesse angulaire par la somme des distances de tous les points du système à ce plan. Or si l'axe instantané et, par suite, le plan sont assujettis à passer par le centre des moyennes distances, la somme des distances est nulle; donc la somme des projections est nulle.

Puisque la somme des projections est nulle sur l'axe instantané et sur une direction perpendiculaire à cet axe, elle est nulle sur une direction quelconque.

Nous pouvons donc conclure que, quel que soit le mouvement d'un système, la vitesse du centre des moyennes distances est la moyenne des vitesses de tous les autres points du système; par conséquent le mouvement de ce point représente le mouvement général de translation.

Cette propriété du centre des moyennes distances est la base d'un des principes fondamentaux de la mécanique.

Vitesses virtuelles.

26. Le mot virtuel veut dire : qui existe en germe; ainsi l'on doit entendre par vitesse virtuelle d'un point, une vitesse dont ce point n'est pas actuellement animé, mais qu'il est susceptible de prendre.

Par exemple, si un corps est assujéti à se mouvoir d'un mouvement de translation suivant une seule direction, les vitesses virtuelles de tous ses points sont égales entre elles et parallèles à cette direction.

Si un corps est assujéti à se mouvoir d'un mouvement de translation suivant une direction quelconque, les vitesses virtuelles de tous ses points sont égales et parallèles entre elles; on indique que la direction et la vitesse du mouvement de translation peuvent être quelconques, en faisant varier arbitrairement les projections des vitesses virtuelles sur trois axes rectangulaires fixes.

Si un corps est assujéti à tourner autour d'un axe fixe, la vitesse virtuelle de chaque point est perpendiculaire à l'axe et au rayon, et les vitesses virtuelles des différents points sont entre elles comme les distances de ces points à l'axe.

Si un corps est assujéti à tourner autour d'un point

fixe, la vitesse virtuelle de chaque point est décomposée en trois composantes dues aux vitesses angulaires autour de trois axes rectangulaires. On indique que la direction et la grandeur de l'axe instantané sont quelconques, en faisant varier arbitrairement les trois vitesses angulaires composantes.

Si un corps entièrement libre peut se mouvoir d'une manière quelconque dans l'espace, la vitesse virtuelle de chaque point se décompose en deux composantes, l'une due au mouvement possible de rotation autour d'un point, l'autre due au mouvement possible de translation de ce point. On indique que les vitesses de translation et de rotation peuvent être quelconques, en faisant varier arbitrairement les projections sur trois axes rectangulaires fixes, de l'axe instantané et de la vitesse de translation.

Des machines.

27. Les machines peuvent être envisagées sous plusieurs points de vue différents ; dans cette première partie de la mécanique, où nous ne nous occupons que du mouvement considéré indépendamment des causes qui le produisent, nous adopterons la définition suivante : les machines sont des corps ou des assemblages de corps assujettis à se mouvoir suivant certaines conditions et destinés à transmettre et à modifier les mouvements qui leur sont communiqués.

On conçoit qu'au moyen de points fixes et d'obstacles convenablement placés, on puisse restreindre les mouvements possibles de manière à établir entre les différentes parties d'un assemblage de corps, une dépendance telle, que si l'une de ces parties reçoit un certain mouvement, une autre partie prenne le mouvement qu'on veut obtenir. Il faut donc que les obstacles soient tellement disposés,

qu'ils établissent une relation déterminée entre les vitesses virtuelles des différents points mobiles.

Les mouvements dont on a le plus ordinairement besoin dans les arts, et ceux dont on peut disposer, sont le mouvement rectiligne continu et alternatif, et le mouvement circulaire continu et alternatif. La plupart des machines ont pour but de transmettre un de ces mouvements en changeant sa direction et sa grandeur, ou de transformer un de ces mouvements en un autre.

Sous le rapport seul de la transmission des mouvements, les machines offrent encore une mine inépuisable à l'esprit de recherches et d'invention, leur étude forme une des branches les plus intéressantes de la géométrie descriptive. Nous nous bornerons ici à l'indication sommaire de quelques machines simples qui constituent ordinairement les organes élémentaires des machines composées.

Du levier.

Le levier est une verge inflexible assujettie à tourner autour d'un point fixe.

Si l'on se borne à ne considérer que les points mobiles situés sur une même droite passant par le point fixe, il est facile de voir que leurs vitesses virtuelles sont toutes parallèles entre elles et dans le rapport des distances au point fixe.

Mais si l'on considère des points dans toutes les positions possibles, on doit entendre par levier un corps de forme quelconque assujetti à tourner autour d'un point fixe. Alors, sa théorie rentre dans la théorie générale de la rotation autour d'un point.

Dans les machines composées, on désigne ordinairement sous le nom de levier, tout organe formé d'une verge inflexible droite ou courbe, assujettie à tourner

autour d'un axe fixe et destinée à transmettre un mouvement circulaire autour de cet axe. La vitesse virtuelle de chaque point est dirigée perpendiculairement à l'axe et au rayon et proportionnelle à ce rayon.

Du treuil.

Le treuil (tour ou cabestan) est un cylindre assujéti à tourner autour de son axe et sur lequel s'enroule une corde qui transmet le mouvement. On met le cylindre en jeu au moyen d'une roue concentrique d'un diamètre plus grand. Si l'on prend deux points situés, l'un sur la circonférence de la roue, l'autre sur la corde, on voit que la vitesse virtuelle du premier est à celle du second comme le rayon de la roue est au rayon du cylindre, ou (en tenant compte de l'épaisseur de la corde) comme le rayon de la roue est au rayon du cylindre augmenté du rayon de la corde.

Le treuil sert à transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne, ou à transmettre un mouvement de rotation d'un axe à un autre: pour cela, il faut que la corde d'un treuil s'enroule sur la roue d'un autre.

Si l'on imagine une série de treuils tels, que la corde du premier s'enroule sur la roue du deuxième, la corde du deuxième sur la roue du troisième, et ainsi de suite; puis qu'on compare les vitesses virtuelles de deux points situés, l'un sur la roue du premier treuil, l'autre sur la corde du dernier, on verra que la vitesse virtuelle du premier point est à la vitesse virtuelle du second comme le produit des rayons des roues est au produit des rayons des cylindres.

Pour transmettre le mouvement de rotation autour d'axes différents, au lieu de treuils, on fait plus souvent usage de roues dentées; c'est-à-dire de roues tangentes l'une à l'autre et garnies de dents à leurs circonférences, de manière que l'une ne puisse tourner sans entraîner l'autre. Les roues dentées sont fréquemment employées dans la

composition des machines, leurs dispositions varient à l'infini; mais il est presque toujours extrêmement facile de déterminer les vitesses virtuelles des points mobiles entre lesquels elles établissent une dépendance.

Les autres principaux organes élémentaires qui entrent dans la composition des machines, sont : les plans inclinés, les vis, les poulies, les excentriques, les bielles, les balanciers, etc. ; nous n'entreprendrons pas la description de ces machines qui nécessiterait des développements étendus et de nombreuses figures. Le peu que nous avons vu suffit pour faire comprendre comment, lorsqu'on connaît dans une machine la disposition des points fixes et des obstacles, on peut déterminer les relations qui existent entre les vitesses virtuelles des points mobiles. Cette relation entre les vitesses virtuelles renferme presque toute la théorie de la machine, non-seulement sous le rapport de la transmission des mouvements, mais encore, comme on le verra plus tard, sous le rapport de l'équilibre des forces et de la transmission du travail mécanique (*).

(*Suite.*)