

J. MENTION

Note sur le triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 324-327

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__324_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE;

PAR M. J. MENTION.

Le but de cette Note est de mettre en lumière certaines propriétés déjà connues, et d'en signaler d'autres non encore remarquées.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Les points où les bissectrices coupent le cercle circonscrit sont les milieux des distances des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits (I, I', I'', I'''). On le reconnaît directement, ou, si l'on veut, c'est une conséquence de la propriété du cercle des neuf points.

Bobillier (*Géométrie*, § 5, proposition VI) s'est servi de cette propriété pour donner la valeur de la distance des centres du cercle inscrit et du cercle circonscrit, vérifiée par Simon Lhuilier (*Annales de Gergonne*, tome I, page 149) assez péniblement. Mais personne ne me paraît en avoir tiré le parti que voici.

Les milieux de II' et $I''I'''$ étant sur un même diamètre, comme les distances de ces milieux au côté a sont égales à $\frac{1}{2}(\alpha - r)$ et $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, (r, α, β, γ longueurs des rayons des cercles inscrits et ex-inscrits), il faut en conclure $4R = \alpha + \beta + \gamma - r$, où R est le rayon du cercle circonscrit.

$R-d, R+d$ sont aussi des expressions de ces distances : d'où les égalités $2R = 2d + \alpha - r$, $2R = \beta + \gamma - 2d$ et

deux autres de même espèce, dans lesquelles d, d', d'' représentent les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés a, b, c . Ajoutant ensemble les égalités d'une même espèce et tenant compte de la valeur ci-dessus de $\alpha + \beta + \gamma - r$, on arrive à $d + d' + d'' = R + r$.

C'est un théorème dû à Carnot (*Géométrie de position*, n° 137), et M. de Lafrémoire, dans son ouvrage, a donné la démonstration de Carnot (page 282). Les égalités précédentes donnent lieu à quelques remarques que je passe sous silence.

2. THÉORÈME. *Les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle et du point de rencontre de ses hauteurs sur les droites qui joignent les pieds de celles-ci, sont des rayons du cercle circonscrit au triangle ou de l'un des cercles circonscrits aux triangles dont les sommets sont le point de rencontre des hauteurs et deux des sommets du triangle proposé.*

A un sommet donné, dans chacun des quatre triangles, correspond la perpendiculaire sur la droite joignant les pieds des hauteurs issues des deux autres sommets.

Application aux triangles (I'I''I''', II'I''', ...). Les douze rayons des cercles inscrit et ex-inscrits perpendiculaires au côté du triangle, sont des rayons des cercles circonscrits aux triangles (I'I''I''', II'I'''). Si (a, α) désigne le rayon du cercle α perpendiculaire au côté a , il faut ainsi grouper ces douze rayons :

$(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)$	passent par le cercle circonscrit à	I'I''I'''
$(\alpha, r), (c, \beta), (b, \gamma)$	id.	II'I'''
$(b, r), (c, a), (a, \gamma)$	id.	II'I''''
$(c, r), (a, \beta), (c, \alpha)$	id.	II'I''''

Corollaire. L'aire d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle formé par les droites joignant les pieds des per-

pendiculaires. M. de Pistoris (*Annales*, t. V, p. 453) arrive difficilement à cette expression.

Pour les trois autres triangles (AHB, ...), il n'y a qu'à mettre dans cet énoncé le *demi-périmètre diminué de l'une des droites*. H est le point de rencontre des trois hauteurs.

Application. Les surfaces des quatre triangles formés dans (I'I''I''') sont $2pR$, $2(p-a)R$, $2(p-b)R$, $2(p-c)R$.

THÉORÈME. *La bissectrice d'un angle divise en deux parties égales l'angle formé d'un rayon du cercle circonscrit et de la hauteur partant d'un même sommet.*

Application. Construire un triangle, connaissant les longueurs d'une hauteur, d'une médiane et d'une bissectrice issues d'un même sommet.

3. *Des tangentes communes.* Outre les côtés, il y a encore six tangentes communes aux systèmes de deux des cercles (r, α, β, γ) dont les centres de similitude sont les pieds des six bissectrices.

Tang (r, α) représente la tangente commune aux cercles (r) et (α), etc.

Du théorème précédent, je déduis fort aisément :

Corollaire. Ces six tangentes sont parallèles deux à deux et perpendiculaires aux rayons du cercle circonscrit issus des sommets. Ainsi de tang (r, α) et tang (β, γ). Alors, ces tangentes sont parallèles aux lignes joignant les pieds des perpendiculaires : ce qu'on voit directement.

Les tangentes (r, α), (β, γ) coupent le côté a aux points où les bissectrices partant de A le rencontrent. Quant aux côtés b, c , on rabattra sur chacun d'eux, à la suite du sommet A et dans la direction de ses côtés pour la première tangente, dans la direction inverse pour la seconde, les longueurs c, b .

A cause de cela, j'appellerai ces deux tangentes, l'une

tangente commune directe relativement au sommet A, et l'autre tangente commune inverse relativement au sommet A.

THÉORÈME. *La droite joignant deux points de contact du cercle inscrit, la droite joignant les pieds de deux perpendiculaires, et celle enfin qui joint les points de rencontre de deux bissectrices avec les côtés opposés, vont concourir en un même point.*

Soit A le sommet mis de côté dans l'énoncé. Pour démontrer le théorème, on remarquera que la droite des pieds est parallèle à la tangente commune inverse relativement au sommet A, que celle-ci et *la droite des points de rencontre des deux bissectrices*, coupent le côté *a* au même point, et enfin que *la droite des points de contact* est parallèle à la bissectrice externe de l'angle A.
