

A. FANIEN

Sur le calcul de π

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 190-192

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__190_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE CALCUL DE π

(voir t. I, p. 190, t. II, p. 188, t. III, p. 13 et 58, t. IV, p. 156 t. IX, p. 12)

PAR M. A. FANIEN,
 Professeur à Redon (Ille-et-Vilaine).

La méthode simple et facile de Lacroix donne

$$c_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2c)^2}},$$

c désignant le côté du polygone régulier inscrit de n côtés ;
 c_1 le côté du polygone de $2n$ côtés, et le diamètre étant pris pour 1. On tire de là

$$c_m = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{4 - (2c)^2}}}}.$$

Le nombre des radicaux superposés est $m + 1$. On démontre que

$$C_1 - c_1 < \frac{1}{8} (C - c),$$

et, par suite,

$$C_m - c_m < \frac{1}{8^m} (C - c),$$

C_1, \dots, C_m désignant les côtés des polygones circonscrits semblables. Donc P, P_1, \dots, P_m ; p, p_1, \dots, p_m désignant les périmètres, on a

$$P_m - p_m < \frac{n \cdot 2^m (C - c)}{8^m} = \frac{P - p}{4^m}.$$

Donc $\frac{1}{10^k}$ désignant l'approximation demandée pour π , on devra avoir

$$\frac{P - p}{4^m} < \frac{1}{10^k},$$

d'où

$$4^m > 10^k (P - p),$$

ou, par logarithmes,

$$m > \frac{k + \log(P - p)}{\log 4}.$$

Ainsi, n étant 6, on a

$$P = 2\sqrt{3}, \quad p = 3, \quad P - p = 2\sqrt{3} - 3 < 1, \quad \log 4 > 0,6,$$

d'où

$$m > \frac{k}{0,6} = \frac{10k}{6}.$$

Par exemple, pour $k = 6$, on prendra $m = 10$, et, par suite, dans l'expression c_m , on devra prendre onze radicaux pour que le périmètre p_m soit la valeur approchée de π à $\frac{1}{10^6}$.

Mais, dans l'expression

$$p_m = 2^m \cdot n \quad c_m = 2^{m-1} \cdot n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{4 - (2c)^2}}}},$$

le radical devant être multiplié par $2^{m-1} \cdot n$ pour avoir p_m , et par suite π à moins de $\frac{1}{10^6}$, ce radical doit être évalué

à moins d'une fraction plus petite que $\frac{1}{2^{m-1} \cdot n \cdot 10^6}$. Ainsi,

pour $n = 6$, $k = 6$, $m = 10$, on a

$$\frac{1}{2^9 \cdot 6 \cdot 10^6} > \frac{1}{10^{10}}.$$

D'autre part, on sait qu'en extrayant la racine de 3 à $\frac{1}{10^{10}}$

et la racine de $2 + \sqrt{3}$, à moins de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{10}}$, on a $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$,

à moins de $\frac{1}{10^{10}}$, et ainsi de suite. Donc l'expression

$$p_m = 2^{m-1} \cdot 6 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{3}}}}$$

donne π en prenant onze radicaux et extrayant les racines carrées successives avec l'approximation indiquée plus haut.

Pour $k = 8$, on a $m > \frac{80}{6}$ ou $m = 14$; approximation $\frac{1}{2^{13} \cdot 6 \cdot 10^8} > \frac{1}{10^{13}}$. Donc en prenant quinze radicaux et extrayant les racines à moins de $\frac{1}{10^{12}}$, on aura π à moins de $\frac{1}{10^8}$.

D'ailleurs on a la formule remarquable (*)

$$\pi = 2^{m-1} n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

Les quatre méthodes dites des périmètres, des isopérimètres, des surfaces et des surfaces équivalentes ne sont que des transformations apparentes de la méthode précédente, et, par suite, on leur accorde peut-être une trop grande importance dans les examens.
