NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C.-E. PAGE

Programme d'un cours de mécanique élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 14-29

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__14_1>

PROGRAMME D'UN COURS DE MECANIQUE ELEMENTAIRE;

PAR M. C.-E. PAGE

1. La mécanique est la science des mouvements et des forces. On entend par force la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée

Bien que les corps soient toujours mis en mouvement par l'action des forces, néanmoins le mouvement en lui-même, c'est-à-dire le simple fait du changement des situations respectives des différents points d'un système, peut être considéré indépendamment des forces qui le produisent; dans ce cas, son étude appartient à la géométrie. Mais si, tout en faisant abstraction des forces, on fait entrer en considération le temps dans lequel le mouvement s'accomplit, c'est-à-dire si l'on introduit l'idée des vitesses étrangères à la géométrie pure, on a une science distincte formant une première branche de la mécanique, et à laquelle Ampère a donné le nom de *cinématique*.

Du mouvement.

2. Nous disons qu'un corps est en mouvement lorsqu'il change de situation par rapport à un système supposé fixe; mais ce système lui-même peut avoir un mouvement qui nous soit inconnu, ou dont nous fassions abstraction.

Lorsque les différents points d'un système sont liés entre eux d'une manière fixe, comme les différents points d'un corps solide par exemple, on peut supposer que ces points sont rapportés à trois axes rectangulaires par rapport auxquels les coordonnées de chaque point restent tout à fait invariables. Il est bien évident que, pour connaître le mouvement de tout le système, il suffira de connaître le mouvement des trois axes auxquels il est rapporté.

Lorsqu'un système de trois axes rectangulaires se meut, il peut arriver que chacun de ces axes reste constamment parallèle à sa première direction, que le système se meuve d'ailleurs en ligne droite ou en ligne courbe : dans ce cas, on dit qu'il y a mouvement de translation seulement; ou bien, il peut arriver que chacun des axes ne reste pas constamment parallèle à une même direction : dans ce cas, il y a mouvement de rotation. Il est extrêmement important de se faire une idée claire de ces deux espèces de mouvement.

Dans le mouvement de translation, tous les points du système parcourent à chaque instant des lignes égales et parallèles; par suite, le mouvement de tout le système est complétement déterminé quand on connaît le mouvement d'un seul de ses points. Nous commencerons donc par nous occuper du mouvement d'un point.

Mouvement rectiligne uniforme.

3. Le mouvement le plus simple que nous puissions concevoir est celui d'un point qui suit une ligne droite, et qui parcourt des longueurs égales pendant des temps égaux. Ce mouvement est dit *rectiligne et uniforme*.

Lorsque deux points se meuvent d'un mouvement rectiligne et uniforme, et que les longueurs parcourues par chacun d'eux séparément pendant le même temps, ne sont pas égales, on dit qu'ils ont des vitesses différentes. Le rapport de ces vitesses est justement le même que celui des longueurs parcourues pendant le même temps.

Pour comparer les vitesses entre elles, il faut prendre une certaine vitesse pour unité. Si l'on prend pour unité la vitesse du point qui parcourt l'unité de longueur pendant l'unité de temps, une vitesse quelconque aura pour mesure la longueur parcourue pendant l'unité de temps.

Il résulte de la définition même du mouvement uniforme que les chemins parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir; de sorte que si l'on représente par v la vitesse d'un point, c'est-à-dire la longueur parcourue pendant l'unité de temps, on aura, pour le chemin x parcouru pendant le temps t,

$$x = v.t.$$

On peut, au moyen d'une ligne droite, représenter en grandeur et en direction la vitesse dont un point est animé.

On peut encore déterminer par une construction graphique le chemin parcouru pendant un temps t; pour cela, sur une droite indéfinie OX (*Pl. I, fig.* 1), à partir d'un point fixe O, portons une longueur OT, qui contienne l'unité de longueur autant de fois que le temps t contient l'unité de temps; par le point O, élevons une perpendiculaire Om égale à la vitesse v, et construisons un rectangle sur ces deux droites : nous aurons, pour la surface de ce rectangle,

$$Om . OT = v . t.$$

Donc le rectangle contient l'unité de surface autant de fois que le chemin parcouru contient l'unité de longueur.

Composition des vitesses.

4. Les deux axes ox, oy (*fig.* 2), formant un système mobile, se meuvent d'un mouvement de translation, c'est-à-dire en restant constamment parallèles à eux-mêmes dans le plan des axes fixes OX, OY. Le mouvement est rectiligne et uniforme; la vitesse est représentée en grandeur et en direction par la droite OC. Un point mobile placé en A est animé, par rapport aux axes mobiles ox, oy, d'une vitesse représentée en grandeur et en direction par la droite Aq; cherchons quelle est la vitesse du point mobile par rapport au système fixe.

En vertu de la vitesse du système, le point A parcourant pendant l'unité de temps une droite Ap égale et parallèle à OC, la droite Aq se trouve transportée parallèlement à elle-même en pR, et le point mobile parcourant cette droite se trouve en R. Les chemins parcourus parallèlement à Aq sont évidemment dans le même rapport que ceux parcourus suivant Aq; d'où il suit que le point mobile reste constamment sur la droite AR, qui représente en grandeur et en direction la vitesse résultante. Les deux vitesses Ap et Aq se nomment *vitesses composantes*. La résultante serait exactement la même en supposant le système animé de la vitesse Aq, et le point animé de la vitesse Ap. Le point mobile peut être considéré comme animé de deux vitesses ayant des directions différentes.

On a donc ce théorème fondamental : *La résultante de deux vitesses est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses composantes.*

On peut supposer le point animé d'autant de vitesses différentes que l'on voudra. Pour cela, il suffit de concevoir un second système animé d'une certaine vitesse par rapport au premier, et ainsi de suite. En substituant à deux de ces vitesses leur résultante, on aura une composante de moins; en continuant de la même manière, on finira par obtenir la résultante de toutes ces vitesses.

La construction et la démonstration sont exactement les mêmes en supposant les vitesses dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, au lieu d'être dans un même plan.

Il est facile de démontrer que la résultante de trois vitesses, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les trois vitesses composantes.

Par la même raison qu'on peut composer trois vitesses en une seule, on peut décomposer une vitesse en trois autres. On a coutume de faire cette décomposition suivant trois axes rectangulaires : chacune des composantes est la projection de la résultante sur l'axe correspondant.

Mouvement varié.

5. Dans le mouvement uniforme, la vitesse reste constante; mais on peut très-bien concevoir qu'elle change pendant le mouvement et varie suivant une certaine loi avec le temps. Quand deux quantités sont ainsi liées entre elles, de manière que lorsqu'une d'elles varie, l'autre varie aussi, on dit qu'elles sont fonction l'une de l'autre. Nous supposerons donc la vitesse fonction du temps, et nous chercherons la solution de ce problème : *Étant donnée la loi suivant laquelle la vitesse varie en fonction du temps, déterminer les chemins parcourus à chaque instant.*

Pour cela, sur une droite infinie aX (*fig.* 3), à partir d'un point fixe a, portons des longueurs proportionnelles aux temps (en prenant une unité de longueur pour chaque unité de temps) ; par le point a élevons une perpendiculaire ab, justement égale à la vitesse du point mobile à l'origine du mouvement; puis, supposons que cette perpendiculaire glisse le long de la droite aX, en variant de longueur suivant la même loi que la vitesse.

L'extrémité de la perpendiculaire mobile décrit une certaine ligne courbe, dont la forme représente la loi suivant laquelle la vitesse varie, et la perpendiculaire elle-même engendre une portion de surface comprise entre la droite aX et la courbe $b\,b'b''$,... qui est justement égale au chemin parcouru pendant le temps correspondant.

En effet, supposons que la vitesse, au lieu de varier d'une manière continue, reçoive des accroissements brusques à des intervalles sensibles, le mouvement sera uniforme entre deux accroissements consécutifs, et le chemin parcouru pendant un de ces intervalles sera représenté par la surface d'un petit rectangle ayant pour base la longueur qui représente l'instant correspondant, et pour hauteur la perpendiculaire qui représente la vitesse au commencement de cet instant. Le chemin total parcouru pendant un certain nombre de ces instants sera représenté par la somme des rectangles correspondants.

Il est facile de se convaincre que plus les intervalles qui séparent les accroissements successifs deviennent petits, plus la somme des rectangles qui représente le chemin parcouru s'approche de se confondre avec la surface terminée par la courbe; d'où l'on peut conclure qu'à la limite, lorsque la vitesse varie d'une manière continue, le chemin parcouru se trouve rigoureusement représenté par cette surface.

La question se trouve donc ramenée à mesurer la portion de surface limitée par deux perpendiculaires extrêmes et comprise entre la droite et la courbe.

Quelquefois la nature de la courbe permet d'obtenir une expression rigoureuse de cette mesure; mais, dans tous les cas, on peut la calculer avec autant d'approximation qu'on veut.

Soit $ab\,b_6 a_6$ (*fig.* 3) la portion de surface à mesurer : on divise la base aa_6 en un certain nombre de parties égales; par chaque point de division, on élève une perpendiculaire. Chaque petit arc de courbe compris entre deux perpendiculaires peut être considéré comme une droite; par suite, chaque portion de surface peut être considérée comme un trapèze. On a donc pour la somme de ces trapèzes

$$\frac{1}{2}\,aa_1(a'b' + 2a''b'' + 2a'''b''' + 2a^{\text{iv}}b^{\text{iv}} + \ldots + a^{\text{vi}}b^{\text{vi}}).$$

Il est évident que cette expression est d'autant plus approchée que l'intervalle aa' est plus petit.

Mouvement uniformément varié.

6. Le cas le plus simple du mouvement varié est celui dans lequel la vitesse croît proportionnellement au temps. Ce mouvement est appelé *uniformément varié*.

Soit OX (*fig.* 4) la droite sur laquelle on porte des longueurs proportionnelles aux temps : à l'origine, la vitesse est nulle; au bout d'une seconde, elle est représentée par la perpendiculaire ab, que nous appellerons g; au bout de deux secondes, elle est $2g$, etc. Enfin, au bout du temps T, on a pour la vitesse acquise

$$v = gT.$$

Puisque la perpendiculaire varie proportionnellement au temps, son extrémité engendre la droite obr, et le chemin x, parcouru au bout du temps T, a pour mesure la surface d'un triangle dont la base est égale à T et la hauteur à v : donc

$$x = \frac{1}{2} vT;$$

par suite,

$$x = \frac{1}{2} gT^2.$$

7. Par conséquent, dans le mouvement uniformément varié, le chemin parcouru au bout d'un certain temps T est égal au chemin parcouru pendant le même temps avec une vitesse moitié de la vitesse acquise au bout de ce temps. De plus, les chemins parcourus sont entre eux comme les carrés des temps employés à les parcourir. C'est ce qui résulte immédiatement de la construction. En effet, les chemins x et x', correspondants aux temps T et T', sont représentés par les surfaces des triangles semblables dont T et T' sont les bases, et ces surfaces sont comme les carrés des bases.

Il est facile de voir que si, à l'origine, la vitesse, au lieu d'être nulle, était égale à V, on aurait

$$v = V + gT, \quad x = VT + \frac{1}{2} gT^2.$$

Si, au lieu d'être croissante, la vitesse était décroissante, on aurait

$$v = V - gT,$$

et

$$x = VT - \frac{1}{2} gT^2.$$

Mouvement curviligne.

8. Lorsqu'un point est animé d'un mouvement varié par rapport à un système mobile, et que ce système est lui-même animé d'un mouvement uniforme ou varié par rapport à un système fixe, le point décrit une ligne courbe.

Par exemple, le système mobile ox, oy (*fig.* 5) est animé, par rapport au système fixe OX, OY, d'un mouvement rectiligne et uniforme ; la vitesse est représentée en grandeur et ~~en~~ direction par la droite OK. Un point mobile, primitivement situé en A, est animé, par rapport au système mobile ox, oy, d'un mouvement uniformément varié, dirigé suivant Aq; la vitesse g, acquise au bout de l'unité de temps, étant égale à Ap, cherchons le chemin décrit par le point mobile par rapport au système fixe.

En vertu du mouvement uniforme du système, le point A parcourt sur la droite AZ, parallèle à OK, des longueurs proportionnelles aux temps. La droite Aq se trouve transportée parallèlement à elle-même, tandis que le point mobile parcourt sur cette droite des longueurs proportionnelles aux carrés du temps. Il s'ensuit que les distances $A'q'$, $A''q''$, etc., mesurées parallèlement à Aq, sont entre elles comme les carrés des distances AA', AA'', etc., mesurées sur AZ. Cette condition suffit pour déterminer la courbe, et la fait reconnaître pour une parabole.

Il serait facile de multiplier les exemples de ce mode de génération des courbes.

De la tangente.

9. Lorsqu'un point se meut en ligne courbe, sa vitesse change à chaque instant de direction. Cette vitesse est la résultante des vitesses dont le point est animé. Par conséquent, on peut la construire quand on connaît le mode de génération de la courbe. La droite qui indique la direction de la résultante est la tangente. De là résulte un moyen commode de construire la tangente. Cette construction est connue sous le nom de *méthode des tangentes de Roberval.*

Dans la courbe que nous venons de déterminer, construisons la tangente au point m (*fig.* 5); la vitesse du point mobile suivant mc, parallèle à AZ, est constante et égale à OK. La vitesse suivant mb, parallèle à Aq, est double de mi; car nous savons que, dans le mouvement uniformément varié, la vitesse acquise est représentée par une longueur double du chemin parcouru (7). Construisons le parallélogramme sur les droites mi et mb; la diagonale mR est la tangente.

Mouvement de rotation.

10. Le mouvement de rotation le plus simple que nous puissions concevoir est celui d'un système qui tourne autour d'un axe fixe OZ (*fig.* 6).

Chaque point décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et le centre situé sur cet axe.

Lorsqu'un point se meut en ligne courbe, sa vitesse est constamment dirigée suivant la tangente à cette courbe Par conséquent, la vitesse d'un point quelconque A du système est dirigée perpendiculairement au rayon OA et à l'axe OZ.

Tous les points, étant liés entre eux d'une manière invariable, décrivent à chaque instant des arcs semblables. Comme leurs vitesses sont dans le rapport des arcs qu'ils décrivent en même temps, et que ces arcs sont dans le rapport des rayons, il s'ensuit que les vitesses de s différents points sont entre elles comme les distances de ces points à l'axe.

Il suit de là que si l'on représente par ω la vitesse du point dont la distance à l'axe est égale à l'unité de longueur, on aura $r.\omega$ pour la vitesse d'un point dont la distance à l'axe est r.

Cette vitesse ω du point dont la distance à l'axe est égale à l'unité se nomme *vitesse angulaire*.

La rotation autour d'un axe fixe est parfaitement déterminée pour un instant donné, quand on connaît la vitesse angulaire correspondante et le sens de la rotation.

La vitesse angulaire s'indique en portant sur l'axe, à partir d'un point fixe O, une longueur proportionnelle à cet axe. Le sens de la rotation s'indique par le sens dans lequel on convient de porter cette longueur comme positive à partir de l'origine. Ainsi, par exemple, on conviendra qu'en se supposant placé suivant l'axe, les pieds à l'origine, les points du système doivent paraître marcher de droite à gauche.

D'après cette convention, les longueurs étant comptées comme positives du point O vers le point Z, le mouvement aurait lieu dans le sens indiqué par la flèche. Pour indiquer une rotation en sens contraire, il suffirait de porter l'axe en sens contraire suivant OY.

Composition des vitesses angulaires, axe instantané.

11. Supposons qu'un corps tourne autour de l'axe op (*fig.* 7) avec une vitesse angulaire ω proportionnelle à la longueur op, tandis que le plan poq tourne autour de l'axe oq avec une vitesse angulaire ω' proportionnelle à la longueur oq, de sorte qu'on ait

$$\omega : \omega' :: op : oq.$$

Cherchons quelles sont les vitesses des différents points du système. Pour cela, considérons un de ces points m au moment où il passe dans le plan poq; abaissons sur les axes les perpendiculaires mb et ma.

En vertu de la rotation autour de l'axe op, le point m est animé d'une vitesse $mb.\omega$ perpendiculaire au plan poq. En vertu de la rotation autour de l'axe oq, le point m est animé d'une vitesse $ma.\omega'$ perpendiculaire au plan poq; de plus, tant que le point m est situé dans l'angle poq, ces deux vitesses sont dirigées en sens contraire. On a donc, pour la vitesse du point m,

$$v = ma.\omega' - mb.\omega.$$

Cette vitesse est nulle lorsque les perpendiculaires mb et ma sont en raison inverse des vitesses angulaires. Or il est facile de voir que le lieu des points qui satisfont à cette condition est la diagonale OR du parallélogramme construit sur les axes op et oq.

En effet, du point R abaissons sur les axes les perpendiculaires Ri et RG; les triangles semblables nous donnent

$$\mathrm{R}i : \mathrm{R}g :: oq : op :: \omega' : \omega,$$

donc

$$\mathrm{R}i.\omega - \mathrm{R}g.\omega' = 0.$$

Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la diagonale, indéfiniment prolongée, sont dans le même rapport; donc, tous les points situés sur la direction de cette diagonale ont une vitesse nulle.

Tous les points situés sur une même droite parallèle à la diagonale OR ont des vitesses égales et parallèles : en effet, par le point m menons md parallele à OR; par le point d, où elle rencontre l'axe op, menons dc parallèle à oq : nous aurons

$$ma = mc + ca,$$

d'ou, pour la vitesse du point m,

$$v = mc.\omega' - mb.\omega + ca.\omega'.$$

Or, à cause des triangles semblables, et d'après ce qui vient d'être démontré, on a

$$mc.\omega' - mb.\omega = 0;$$

donc

$$v = ca\ \omega'.$$

La longueur ca reste évidemment la même pour tous les points situés sur md.

Deux points situés à des distances égales de part et d'autre de la diagonale ont des vitesses égales et dirigées en sens contraire.

En effet, considérons un point n de l'axe op (*fig.* 8) et un point m du corps mobile au moment où il rencontre l'axe oq; prenons les distances om et on proportionnelles aux axes, de sorte qu'on ait

$$om : on :: oq : op.$$

Les perpendiculaires ma et nb, abaissées sur la diagonale, sont égales.

Des points m et n abaissons sur les axes les perpendiculaires mc et nd; les triangles semblables donnent

$$mc : nd :: om : on :: oq : op :: \omega' : \omega,$$

d'où

$$mc\ \omega = nd.\omega'.$$

Mais $mc.\omega$ est la vitesse du point m, et $md.\omega'$ la vitesse du point n, et ces vitesses sont dirigées en sens contraires.

De tout ce qui précède, il résulte évidemment que les vitesses de tous les points du mobile situés dans le plan poq sont les mêmes que si la rotation avait uniquement lieu autour d'un axe dirigé suivant la diagonale OR.

Il ne reste plus qu'à déterminer la vitesse angulaire autour de cet axe; représentons cette vitesse par Ω. Du point p abaissons sur la diagonale et sur l'axe oq les perpendiculaires pk et ph; la vitesse du point p sera $pk.\Omega$. D'un autre côté, nous avons pour la vitesse de ce même point $ph.\omega'$: donc

$$ph.\omega' = pk.\Omega,$$

d'où

$$\Omega : \omega' :: ph : pk.$$

Or $ph = gk$, et les triangles semblables ORg, pkR donnent

$$Rg : pk :: OR : oq;$$

donc

$$\Omega : \omega' :: OR : oq.$$

Ce qui fait voir que la vitesse angulaire Ω est proportionnelle à la longueur de la diagonale OR.

Les points que nous avons considérés dans le plan poq, étant invariablement liés avec tous les autres points du mobile, les entraînent avec eux dans leur mouvement; nous pouvons donc conclure ce théorème:

Si un corps tourne autour d'un premier axe, tandis que cet axe lui-même tourne autour d'un second, les vitesses de tous les points du mobile à un instant donne sont les mêmes que si, à cet instant, le mobile tournait uniquement autour d'un axe représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux premiers.

12. Le corps tourne autour de l'axe *op*; par conséquent, les points de ce corps qui passent dans le plan *poq* changent à chaque instant. Le plan *poq* tourne lui-même autour de l'axe *oq*; il en résulte que l'axe OR, qui est toujours situé dans ce plan, se déplace continuellement dans l'intérieur du corps mobile et dans l'espace: pour cette raison, on l'a nommé *axe instantané de rotation.*

Si les mouvements de rotation sont uniformes, c'est-à-dire si les vitesses angulaires ω et ω' restent constantes, la diagonale OR fait constamment le même angle avec l'axe fixe *oq*, en tournant autour de lui elle engendre un cône droit à base circulaire qui est fixe dans l'espace. Elle fait aussi constamment le même angle avec l'axe mobile *op*, et comme tous les points du corps viennent passer successivement dans le plan, elle trace dans l'intérieur du corps la surface d'un second cône droit à base circulaire dont le sommet coïncide avec le sommet du cône fixe.

Si l'on suppose tous les points du mobile liés à la surface du second cône; puis si l'on suppose que ce cône roule sans glisser sur le cône fixe, on aura une représentation exacte du mouvement. On voit qu'à chaque instant, le système tourne autour de l'arête de contact des deux cônes; cette arête est justement l'axe instantané de rotation : on voit clairement comment cet axe se déplace continuellement dans l'espace et dans l'intérieur du système mobile.

Si les rotations autour des deux axes ne sont pas uniformes, les vitesses angulaires ω et ω' variant à chaque instant, les angles que la diagonale fait avec les axes varient en même temps. L'axe instantané décrit encore deux surfaces coniques, l'une fixe dans l'espace, l'autre dans l'intérieur du système mobile; mais ces deux surfaces ne sont plus des cônes droits à bases circulaires : néanmoins, on a toujours une représentation complète du mouvement, en supposant que le cône mobile roule sans glisser sur le cône fixe.

13. Lorsqu'on sait trouver la résultante des vitesses angulaires de rotation autour de deux axes, on peut trouver la résultante des vitesses angulaires autour d'autant d'axes qu'on voudra.

Supposons (*fig.* 9) qu'un corps tourne autour d'un axe *op*, tandis que cet axe tourne autour d'un second axe *oq* et que ce second tourne autour d'un troisième *on*.

Faisons abstraction de la rotation autour de *on*; nous aurons un axe instantané représenté par la diagonale *os*. En composant la vitesse angulaire autour de cet axe avec la vitesse angulaire autour de *on*, nous aurons un axe instantané représenté par la diagonale OR du parallélipipède construit sur les trois axes *op*, *oq*, *on*.

Il est facile de voir que l'axe instantané engendre encore deux surfaces coniques, et qu'on a une représentation complète du mouvement en faisant rouler une de ces surfaces sur l'autre.