NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PROUHET

Sur les polygones inscrits dans le cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 130-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__130_0>

SUR LES POLYGONES INSCRITS DANS LE CERCLE;

PAR M. E. PROUHET.

I. — *Nombre des conditions auxquelles doivent satisfaire les polygones inscrits.*

Le nombre des conditions nécessaires pour qu'un polygone de n côtés puisse être inscrit dans un cercle est $n-3$. On les obtiendra en exprimant que la circonférence qui passe par trois sommets passe par les $n-3$ autres.

Soient alors

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K,\ L$$

les sommets consécutifs du polygone, supposé convexe. Il suffira, pour trouver les conditions cherchées, d'exprimer que les circonférences circonscrites aux triangles

$$ABC,\ BCD,\ldots,\ IKL$$

ont le même rayon : car si O est le centre de la première, celui de la seconde ne pourra être que le point O, ou son symétrique par rapport à BC. Mais cette dernière supposition est incompatible avec la convexité du polygone.

II. — *Relations entre les diagonales et les angles.*

Désignons par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \lambda$$

les premières diagonales respectivement opposées aux angles

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ L.$$

On sait que le rayon du cercle circonscrit à un triangle a pour valeur l'un des côtés divisé par deux fois le sinus de l'angle opposé. Le rayon du polygone sera donc exprimé à la fois par

$$\frac{\alpha}{2\sin A}, \quad \frac{\beta}{2\sin B}, \quad \frac{\gamma}{2\sin C}, \ldots, \quad \frac{\lambda}{2\sin L};$$

et, par suite, on aura

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin C} = \ldots = \frac{\lambda}{\sin L}.$$

Donc, *dans tout polygone inscrit, les sinus des angles sont proportionnels aux premières diagonales opposées à ces angles.*

III. — *Relations entre les angles et les côtés*

Désignons par

$$a, \ b, \ c, \ldots, \ l$$

les côtés successifs du polygone, de telle sorte que a et b soient ceux qui comprennent l'angle A, et ainsi des autres. On aura

$$\alpha^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A, \quad \beta^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B, \ldots,$$

et, par suite, les équations (1) reviennent aux suivantes :

$$(2) \quad \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos A}{\sin^2 A} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos B}{\sin^2 B} = \frac{c^2 + d^2 - 2cd\cos C}{\sin^2 C} \ldots$$

Ce second système, comme le précédent, renferme $n-1$ relations, tandis que $n-3$ seulement sont nécessaires, d'après ce que nous avons vu plus haut. Deux d'entre elles doivent donc être une conséquence des $n-3$ autres. C'est ce que l'on vérifierait, si la chose en valait la peine, en substituant dans les deux dernières équations du deuxième système, les valeurs de K, L, l, exprimées en fonction des $n-1$ autres côtés et des $n-3$ autres angles. On devrait arriver ainsi à deux identités.

IV. — *Relations entre le rayon et les côtés.*

Désignons par

$$2a',\quad 2b',\quad 2c',\ldots,\quad 2l'$$

les arcs respectivement sous-tendus par les côtés

$$a,\quad b,\quad c,\ldots,\quad l;$$

nous aurons

$$(3)\qquad a = 2\mathrm{R}\sin a',\quad b = 2\mathrm{R}\sin b',\ldots,\quad l = 2\mathrm{R}\sin l',$$

et encore

$$(4)\qquad \sin(a' + b' + c' + \ldots + l') = 0.$$

L'élimination de a', b', c',..., l', entre les équations précédentes, conduira à une relation entre le rayon et les côtés. Le rayon étant connu, il sera aisé de trouver les angles. On a, en effet,

$$\cos \mathrm{A} = \frac{a^2 + b^2 - \alpha}{2ab}.$$

et

$$\alpha = 2\mathrm{R}\sin(a' + b') = 2\mathrm{R}\left(\frac{a}{2\mathrm{R}}\sqrt{1 - \frac{b^2}{4\mathrm{R}^2}} + \frac{b}{2\mathrm{R}}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4\mathrm{R}^2}}\right),$$

ou

$$\alpha = \frac{1}{2\mathrm{R}}\left(a\sqrt{4\mathrm{R}^2 - b^2} + b\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}\right);$$

et il ne restera plus qu'à substituer cette valeur de α dans celle de cos A.

Ainsi les seuls côtés d'un polygone inscriptible suffisent à le déterminer, pourvu que l'ordre dans lequel ces côtés se succèdent soit connu. Si cet ordre n'était pas donné, on pourrait, dans le même cercle et avec les mêmes côtés, inscrire un nombre de polygones égal à la moitié du nombre des permutations de n choses, c'est-à-dire

3.4.5...n. Je dis la moitié, parce qu'il est visible que deux permutations inverses donneront deux polygones inversement superposables.

Au reste, *tous les polygones inscrits dans le même cercle et qui ont les mêmes côtés sont équivalents;* car les rayons menés aux sommets les décomposent en un même nombre de triangles égaux deux à deux, et dont l'ordre seul diffère.

V. — *Côté en fonction explicite des autres côtés et du rayon. — Polygones à côtés rationnels.*

L'équation (4) revient à la suivante :

$$l = 2\,\mathrm{R}\sin(a' + b' + \ldots + k'); \tag{5}$$

et si du second membre développé, d'après la formule connue, on fait disparaître les arcs a', b',..., à l'aide des relations (3), on aura ainsi la valeur de l exprimée en fonction explicite des autres côtés et du rayon.

Comme cette fonction ne renferme que des radicaux de la forme $\sqrt{4\,\mathrm{R}^2 - b^2}$, que l'on sait rendre rationnels, il en résulte qu'on pourra trouver des polygones inscrits dont les côtés et le rayon soient exprimés par des nombres rationnels et même entiers.

Pour donner un exemple de ce genre de recherches, fort en vogue au temps de Frénicle et de Fermat, supposons qu'il s'agisse d'un triangle dont les côtés soient a, b, c, et faisons d'abord $\mathrm{R} = 1$; nous aurons

$$c = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{4 - b^2} + b\sqrt{4 - a^2}\right).$$

Soient p et q des nombres entiers tellement choisis, que l'on puisse avoir

$$2p = \alpha^2 + \alpha'^2, \quad 2q = \beta^2 + \beta'^2.$$

Il suffira, pour résoudre le problème en nombres rationnels, de poser

$$a = \frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{2\alpha\alpha'}{p}, \quad b = \frac{\beta^2 - \beta'^2}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{2\beta\beta'}{q},$$

et, si l'on veut des nombres entiers, de prendre

$$R = pq, \quad \text{ou} \quad 2pq.$$

On pourra facilement s'élever de là au cas général, et démontrer que dans les polygones ainsi obtenus, les diagonales et la surface sont également représentées par des nombres rationnels.

VI. — *De la possibilité de former un polygone inscriptible avec des droites données.*

Il est, sans doute, très-difficile, et le plus souvent tout à fait impossible d'exprimer le rayon d'un polygone en fonction explicite des côtés : car cette impossibilité existe déjà pour $n = 7, 9, 11$, etc., dans le cas très-simple où tous les côtés sont égaux. La complication des calculs empêchera même, en général, qu'on forme l'équation à coefficients rationnels d'où dépend ce rayon.

Cependant, *le problème qui consiste à former avec des droites, données de longueur, un polygone inscriptible convexe, admet une solution, et une seule, pourvu que le plus grand des côtés donnés soit moindre que la somme de tous les autres.*

Pour le démontrer, soient AB le plus grand des côtés donnés et O le centre d'une circonférence circonscrite à AB. A partir du point B, inscrivons dans l'arc BMA, les uns à la suite des autres, les $n - 1$ autres côtés, dont le dernier aboutisse en N, et appelons, pour abréger, ligne polygonale la ligne formée par ces côtés.

Quelque grande que soit la ligne polygonale, on peut toujours concevoir le point O pris au-dessus de AB, et assez loin pour que la ligne polygonale soit inscrite tout entière dans l'arc BMA, et que, par conséquent, le point N soit au-dessus de AB.

Si, maintenant, les conditions précédemment établies continuant à subsister, on fait mouvoir le point O jusqu'à AB et au-dessous, il est visible que le point N approchera continuellement de la droite AB; je dis même qu'il finira par passer au-dessous. En effet, l'arc BMA va sans cesse en diminuant, et sa longueur, qui a pour limite la droite AB, finira par être inférieure à la ligne polygonale, puisque cette dernière est, par hypothèse, plus grande que AB. Dès lors cette ligne, ne pouvant être inscrite dans un arc plus petit qu'elle-même, aboutira nécessairement au-dessous de AB.

Or de la nature du mouvement de N il résulte que ce point ne peut venir au-dessous de AB sans passer par le point A. Il arrivera donc un moment où le point N sera en A, et, par conséquent, il existera un polygone inscrit convexe, et un seul ayant pour côtés les droites données.

C. Q. F. D.

Si l'on rapproche cette conclusion de ce que nous avons dit au § IV, on en tirera ce théorème :

Deux polygones inscrits et convexes, ayant les mêmes côtés, sont égaux ou équivalents, selon que ces côtés sont disposés dans le même ordre ou dans un ordre différent.

VII. — *Des polygones inscrits de $2n$ côtés.*

On sait que dans un quadrilatère inscrit les angles opposés sont supplémentaires. Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale et qui appartient à tous les polygones inscrits de $2n$ côtés.

Soit P un polygone de cette espèce. Par l'un des sommets A, que nous regarderons comme le premier, menons des diagonales à tous les sommets de rang pair. L'inspection de la figure et la propriété citée plus haut montrent que l'angle A est égal à la somme des suppléments des $n-1$ autres angles de rang impair. Donc la somme des angles de rang impair est égale à $2(n-1)$ angles droits. Comme la même chose peut se dire des angles de rang pair, on a donc ce théorème :

Dans tout polygone inscrit de $2n$ côtés, la somme des angles de rang pair est égale à la somme des angles de rang impair.

De là résulte que si, dans un pareil polygone, on connaît $2n-2$ angles, les deux autres seront déterminés par le théorème précédent et par le théorème connu sur la somme des angles d'un polygone convexe.

Donc si deux polygones inscrits de $2n$ côtés ont $2n-1$ côtés respectivement parallèles, ce qui suppose $2n-2$ angles égaux deux à deux, les angles restants seront égaux, et, par suite, les deux derniers côtés seront parallèles.

Ou, en d'autres termes :

Si un polygone de $2n$ côtés demeure constamment inscrit dans le même cercle, et que $2n-1$ de ses côtés se meuvent chacun parallèlement à lui-même, le dernier côté se mouvra *aussi parallèlement à lui-même.*

On s'élèvera facilement de là à un théorème plus général sur les polygones de $2n$ côtés, inscrits dans une conique et dont $2n-1$ pivotent autour de points fixes situés sur une même droite. (Poncelet.)

VIII. — *Des polygones inscrits de $2n+1$ côtés.*

Dans les polygones inscrits de $2n+1$ côtés, il ne peut exister entre les angles d'autre relation que celle qui fait dépendre leur somme de leur nombre. Car, s'il en était autrement, la propriété précédente s'appliquerait aussi à ces polygones, et $2n$ côtés se mouvant parallèlement à eux-mêmes, il devrait en être de même du $(2n+1)^{ième}$. Mais, dans un pareil déplacement, si le premier côté se rapproche du centre, le deuxième s'en éloignera, le troisième s'en rapprochera, et ainsi de suite; de sorte que le $(2n+1)^{ième}$ devrait aussi se rapprocher du centre, ce qui est impossible puisque le $(2n+1)^{ième}$ est consécutif au premier.

Mais les polygones de $2n+1$ côtés jouissent d'une propriété qui leur est particulière.

Soient AB et AL le premier et le dernier côté d'un polygone inscrit qui en a $2n+1$. Faisons mouvoir parallèlement à eux-mêmes tous ces côtés, excepté le dernier. La diagonale BL, faisant partie d'un polygone de $2n$ côtés, devra, en vertu du théorème démontré plus haut, venir en B'L', parallèle à BL; mais déjà, par hypothèse, AB vient en A'B', parallèle à AB. Donc les angles ABL, A'B'L' sont égaux; donc AL = A'L'. Ainsi :

Lorsqu'un polygone de $2n+1$ côtés est constamment inscrit dans un cercle, si $2n$ côtés se meuvent parallèlement à eux-mêmes, le dernier côté conservera une grandeur constante.

Ce théorème peut aussi être généralisé. (Poncelet.)

IX. — *Conditions de similitude des polygones inscrits.*

Deux polygones de $2n+1$ côtés, équiangles entre eux, ne peuvent être inscrits dans le même cercle. S'il en était autrement, on pourrait, en faisant tourner l'un d'eux autour du centre, l'amener à avoir ses côtés respectivement parallèles à ceux du second, et nous venons de voir qu'il est impossible que deux polygones de cette espèce, inscrits dans le même cercle, aient tous leurs côtés respectivement parallèles.

Un polygone inscrit de $2n+1$ côtés est donc déterminé quand on connaît ses angles et le rayon, et ne dépend ainsi que d'un seul élément linéaire. Donc :

Deux polygones inscrits d'un nombre impair de côtés sont semblables quand ils ont les mêmes angles disposés dans le même ordre ou dans un ordre inverse.

Deux polygones de $2n$ côtés, inscrits dans le même cercle et équiangles entre eux, peuvent être amenés à coïncider quand deux côtés homologues sont égaux. Un polygone de cette espèce ne dépend donc que de deux éléments linéaires : un côté et le rayon. Donc :

Deux polygones inscrits d'un nombre pair de côtés et équiangles entre eux sont semblables quand le rapport de deux côtés homologues est égal au rapport des rayons.

X. — *Des polygones inscrits de $4n+2$ et de $4n$ côtés.*

THÉORÈME. *Dans un polygone inscrit de $4n+2$ côtés, si $2n$ côtés sont respectivement parallèles à leurs opposés, les deux côtés restants seront parallèles.*

Soient AL et A'L' les deux côtés dont le parallélisme n'est pas supposé. Les diagonales AL' et LA' forment, avec les côtés non représentés dans la figure, deux polygones inscrits de $2n+1$ côtés chacun, dont $2n$ côtés sont, par hypothèse, respectivement parallèles. Donc, en vertu d'un théorème déjà démontré (VIII), $A'L = AL'$; donc AL est parallèle à A'L'. C. Q. F. D.

THÉORÈME. *Dans un polygone inscrit de $4n$ côtés, si $2n-1$ de ces côtés sont respectivement parallèles à leurs opposés, les côtés restants seront égaux.*

La démonstration étant analogue à la précédente, nous ne nous y arrêterons pas.

Nous ferons remarquer ici que le premier théorème conduit facilement à un autre plus général, déjà donné dans ce recueil (t. VI, p. 356), et qui comprend, comme cas particulier, l'hexagramme de Pascal.

XI. — *Des polygones inscrits de* $2^m.3$ *côtés.*

On sait que la surface d'un triangle a pour mesure le produit de ses côtés, quand on prend pour unité deux fois le diamètre du cercle circonscrit.

Considérons un hexagone inscrit dans un cercle. Joignons les sommets de rang impair. L'hexagone sera ainsi partagé en quatre triangles, et il est facile de voir, d'après la propriété citée, que le produit des trois triangles contigus au périmètre, divisé par la surface du triangle intérieur, est égal au produit des côtés de l'hexagone.

Si l'on avait joint les sommets de rang pair, on serait arrivé au même résultat.

On a donc le théorème suivant :

Si dans un hexagone inscrit on joint les sommets de rang impair, et les sommets de rang pair; que, dans le premier cas, on désigne par A, B, C *les surfaces des triangles contigus au périmètre, et par* D *la surface du triangle intérieur; que, dans le second cas, on désigne par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues, on aura*

$$\frac{ABC}{D} = \frac{A'B'C'}{D'}.$$

On arrivera, par de semblables considérations, à cet autre théorème.

Dans un polygone inscrit de $2^m.3$ côtés, joignons les sommets de rang pair ou ceux de rang impairs.

Dans le polygone de $2^{m-1}.3$ côtés, ainsi obtenu, joignons encore les sommets de rang pair ou ceux de rang impair.

Continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à un triangle.

Soient P_1 le produit des triangles compris entre le premier et le second polygone; P_2 le produit des triangles compris entre le deuxième et le troisième,... P_m le dernier triangle, *le rapport*

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots}{P_2 P_4 P_6 \ldots}$$

sera constant, quelle que soit des 2^m *manières dont il est possible de décomposer ainsi le polygone, celle que l'on aura réalisée.*

Les deux propriétés précédentes, étant projectives, conviennent également aux polygones inscrits dans les coniques.