NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Question d'examen sur les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 48-50

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__48_1>

QUESTION D'EXAMEN SUR LES FRACTIONS CONTINUES (*).

I. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre nombres positifs entiers rangés par ordre ascendant ; on a les relations d'inégalités suivantes :

1°. $a_1 a_2 - a_3 a_4 < 0$.

2°. $a_3 a_4 - a_1 a_2 > 1$. En effet, soit $a_3 = a_1 + m$, $a_4 = a_2 + n$, $a_3 a_4 - a_1 a_2 = ma_2 + na_1 + mn > 1$.

3°. $a_1 a_3 - a_2 a_4 < 0$.

4°. $a_2 a_4 - a_1 a_3 > 1$, comme pour 2°.

II. Supposons qu'on a la relation

$$a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1. \tag{1}$$

Posons l'équation indéterminée $a_4 y - a_3 x = 1$; les plus petites valeurs positives entières de y et de x sont a_1 et a_2 : s'il existait des valeurs α et β plus petites, on aurait donc

$$a_4 \alpha - a_3 \beta = 1; \quad \text{donc } a_4(\alpha - a_1) = a_3(\beta - a_2);$$

ce qui est évidemment impossible.

(*) M. Serret examinateur.

L'équation $a_3 x - a_4 y = 1$ est satisfaite, en posant $x = a_4 - a_3$, $y = a_3 - a_1$. On démontre de même que ces valeurs positives sont les plus petites qu'on puisse avoir.

Observation. Ces résultats s'énoncent brièvement de cette manière : la congruence $a_4 y - 1 = \dot{a}_3$ a pour racine unique a_1, et la congruence $a_3 x - 1 = \dot{a}_4$ a pour racine a_2; le point leibnitzien placé au-dessus d'un nombre indique un multiple quelconque de ce nombre.

III. Soient $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ deux réduites consécutives d'une fraction continue, et soit p le dernier dénominateur correspondant à la réduite $\frac{t}{u}$. Si p est remplacé par $p - 1$, on a pour réduite $\frac{t-r}{u-s}$; car le quotient entier de $\frac{t}{r}$ est p : donc le quotient entier de $\frac{t-r}{r}$ est $p - 1$; de même pour les dénominateurs.

IV. Conservant la relation (1), réduisons $\frac{a_3}{a_4}$ en fraction continue. Soit $\frac{r}{s}$ l'avant-dernière réduite; il y a deux cas : 1° $\frac{r}{s} > \frac{a_3}{a_4}$, ou bien $ra_4 - sa_3 = 1$. Donc r et s satisfont à l'équation $a_4 y - a_3 x = 1$; mais $r < a_3$, $s < a_4$; donc, d'après II, on a

$$r = a_1 \quad \text{et} \quad s = a_2.$$

Ainsi l'avant-dernière réduite est $\frac{a_1}{a_2}$; 2° $\frac{r}{s} < \frac{a_3}{a_4}$, ou bien $sa_3 - ra_4 = 1$. r et s satisfont à l'équation $a_3 x - a_4 y = 1$, donc, d'après II, $r = a_4 - a_2$, $s = a_3 - a_1$: l'avant-dernière réduite est donc $\frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_2}$. Si l'on diminue d'une unité le dernier dénominateur de la fraction continue, la valeur de cette fraction devient égale (III) à $\frac{a_1}{a_2}$.

V. On parvient à des conclusions analogues, si l'on a la relation $a_2\, a_3 - a_1\, a_4 = 1$, ou bien encore si l'on réduit en fraction continue $\frac{a_3}{a_4}$.