

**Nouvelle démonstration de l'irréductibilité
de l'équation $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = 0$
; p étant un nombre premier. D'après M.
L. Kronecker, étudiant à Berlin**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 419-421

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_419_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLE DÉMONSTRATION

De l'irréductibilité de l'équation $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = 0$;
 p étant un nombre premier;

D'APRÈS M. L. KRONECKER,
Étudiant à Berlin.

(Journal de M. Crelle, tome XXIX, page 250; 1845.)

1. *Lemme.* p étant un nombre premier, soit α une racine imaginaire de l'équation $x^p - 1 = 0$; a, a_1, \dots, a_{p-1} sont p nombres entiers donnés; faisant

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1} = f(x),$$

et

$$a + a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} = f(1) = A, \quad f(\alpha) f(\alpha^2) \dots f(\alpha^{p-1}) = B.$$

On sait que B est un nombre rationnel entier; on aura

$$B = A^{p-1} = \dot{p} (*).$$

Démonstration. Posant

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{p-1} = f(x),$$

(*) Je désigne par le point leibnitzien placé au-dessus d'un nombre le multiple de ce nombre.

on aura

$$f(x)f(x^2)\dots f(x^{p-1}) = M_0 + M_1x + M_2x^2 + \dots + M_nx^n + \dots$$

Faisant successivement x égal à $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}$, le membre à gauche devient d'abord A^{p-1} , et pour les autres racines le produit reste toujours égal à B ; il n'y a de changement que dans l'ordre des facteurs. Donc la somme de ces membres à gauche est $A^{p-1} + (p-1)B$. Prenons dans le membre à droite le terme général M_nx^n , la somme sera

$$M_n[1 + \alpha^n + \alpha^{2n} + \dots + \alpha^{(p-1)n}].$$

On sait que lorsque n n'est pas un multiple de p , ce qui multiplie M_n est nul; et lorsque n est un multiple de p , ce coefficient est égal à p ; donc

$$A^{p-1} + (p-1)B = p(M_0 + M_p + M_{2p} + \dots);$$

de là

$$B - A^{p-1} = p. \quad C. Q. F. D.$$

THÉORÈME II. *La fonction $X = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$, où p est un nombre premier, ne peut être le produit de deux fonctions rationnelles à coefficients entiers.*

Démonstration. Soit

$$X = \varphi(x) \psi(x),$$

φ et ψ sont des fonctions rationnelles à coefficients entiers; ils ne peuvent avoir des coefficients fractionnaires (t. III, p. 47); faisant $x = 1$, on obtient

$$p = \varphi(1) \psi(1);$$

il faut que l'une de ces deux valeurs $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ soit égale à l'unité et l'autre à p . Supposons donc $\varphi(1) = 1$; α étant une racine imaginaire quelconque de $X = 0$, on a, d'après le lemme,

$$\varphi(\alpha) \varphi(\alpha^2) \dots \varphi(\alpha^{p-1}) - 1 = p;$$

car

$$A = \varphi(1) = 1.$$

En prenant pour α une racine commune à $X = 0$ et $\varphi(x) = 0$, on aurait donc $-1 = \dot{p}$, résultat absurde; donc, etc.

Remarque. Ce théorème fondamental est dans les *Disquisitiones arithmeticae*, p. 599, § CCCXLI; et l'on en trouve aussi une démonstration dans Legendre. Celle de M. Kronecker semble la plus simple.