

UMPFENBACH

**Sur la généralisation du théorème de
Pythagore. D'après M. Umpfenbach,
professeur à Giessen**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__400_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE,

D'APRÈS M. UMPFENBACH,

Professeur à Giessen.

(Journal de M. Crelle, tome XXVI, page 92; 1843.)

THÉORÈME. Soient ABC un triangle plan; a, b, c les côtés respectivement opposés; A est constant. On a la relation constante $a^n = b^n + c^n$, où n est constant.

On aura nécessairement $n = 2$, et $A = \frac{1}{2} \pi$.

Démonstration. La relation donnée fournit celle-ci :

$$\sin^n A = \sin^n B + \sin^n (A + B).$$

Faisant varier B , le membre à droite doit rester constant, et, par conséquent, les dérivées par rapport à B doivent être nulles. Les deux premières dérivées donnent

$$\begin{aligned} \sin^{n-1} B \cos B + \sin^{n-1} (A + B) \cos (A + B) &= 0, \\ (n - 1) \sin^{n-2} B \cos^2 B - \sin^n B \\ + n - 1 \sin^{n-2} (A + B) \cos^2 (A + B) - \sin^n (A + B) &= 0; \end{aligned}$$

remplaçant $\cos^2 B$ et $\cos^2 (A + B)$ par $1 - \sin^2 B$ et $1 - \sin^2 (A + B)$, et faisant les réductions, on obtient

$$(n - 1) [\sin^{n-2} B + \sin^{n-2} (A + B)] = n \sin^n A.$$

Cette équation devant subsister, quel que soit B , on doit donc avoir $n = 2$; alors

$$2 = 2 \sin^2 A, \quad \sin^2 A = 1, \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} \pi. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Le théorème de Pythagore n'est donc pas susceptible d'être généralisé.

Observation. Ce théorème a donc, dans la géométrie, quelque analogie avec le théorème de Fermat, dans l'arithmologie.
