Umpfenbach

Sur la généralisation du théorème de Pythagore. D'après M. Umpfenbach, professeur à Giessen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__400_0>

SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE,

D'APRÈS M. UMPFENBACH,
Professeur à Giessen.

(Journal de M. Crelle, tome XXVI, page 92; 1843.)

THÉORÈME. *Soient* ABC *un triangle plan; a, b, c les côtés respectivement opposés;* A *est constant. On a la relation constante $a^n = b^n + c^n$, où n est constant. On aura nécessairement* $n = 2$, et $A = \frac{1}{2}\pi$.

Démonstration. La relation donnée fournit celle-ci :

$$\sin^n A = \sin^n B + \sin^n (A + B).$$

Faisant varier B, le membre à droite doit rester constant, et, par conséquent, les dérivées par rapport à B doivent être nulles. Les deux premières dérivées donnent

$$\sin^{n-1} B \cos B + \sin^{n-1} (A + B) \cos (A + B) = 0,$$
$$(n - 1) \sin^{n-2} B \cos^2 B - \sin^n B$$
$$+ \overline{n - 1} \sin^{n-2} (A + B) \cos^2 (A + B) - \sin^n (A + B) = 0;$$

remplaçant $\cos^2 B$ et $\cos^2 (A + B)$ par $1 - \sin^2 B$ et $1 - \sin^2 (A + B)$, et faisant les réductions, on obtient

$$(n - 1) [\sin^{n-2} B + \sin^{n-2} (A + B)] = n \sin^n A.$$

Cette équation devant subsister, quel que soit B, on doit donc avoir $n = 2$; alors

$$2 = 2 \sin^2 A, \quad \sin^2 A = 1, \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\pi. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le théorème de Pythagore n'est donc pas susceptible d'être généralisé.

Observation. Ce théorème a donc, dans la géométrie, quelque analogie avec le théorème de Fermat, dans l'arithmologie.
