Théorie des lunules géométriquement carrables, d'après M. Th. Clausen, à Altona

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 395-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__395_1>

THÉORIE DES LUNULES GÉOMÉTRIQUEMENT CARRABLES,

D'APRÈS M. TH. CLAUSEN, à Altona.

(Journal de M. Crelle, tome XXI, page 375; 1841.)

Soient deux secteurs de cercle *équivalents* et ayant même corde AB, les centres C et C′ étant du même côté de la corde commune; il est évident que l'aire comprise entre les deux arcs de cercle formant *lunule* est égale à l'aire du quadrilatère ABCC′.

Faisons

$$AC = r;\quad \text{angle } ACB = 2m\alpha;\quad AC' = r';\quad \text{angle } AC'B = 2n\alpha;$$

on a évidemment les deux équations

$$r^2 m = r'^2 n;\quad r\sin m\alpha = r'\sin n\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$(1)\qquad n^{\frac{1}{2}}\sin m\alpha = m^{\frac{1}{2}}\sin n\alpha.$$

Si m et n sont des nombres entiers, cette dernière équation s'exprime rationnellement en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ (*voir* t. V, p. 223). Il s'agit donc de savoir quand cette équation est susceptible d'une solution *géométrique*.

Voici quelques cas :

(*a*) $m = 1; \quad n = 2;$

on obtient les lunules connues d'Hippocrate.

(*b*) $m = 1; \quad n = 3;$

l'équation (1) devient

$$\sqrt{3}\sin\alpha = \sin 3\alpha;$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1);$$

radical géométriquement construisible; on a, à peu près,

$$AC'B = 68^\circ,5; \quad ACB = 205^\circ,6.$$

(*c*) $m = 2; \quad n = 3;$

on a

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \frac{4\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha + 2} = \frac{3}{2};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{33} - 1}{8};$$

$$AC'B = 107^\circ,2; \quad ACB = 160^\circ,9 \text{ environ.}$$

(*d*) $m = 1; \quad n = 5;$

on a

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{-1 + \sqrt{(5 + 4\sqrt{5})}}{4};$$

$$AC'B = 46^\circ,9; \quad ACB = 234^\circ,4 \text{ environ.}$$

(*e*) $m = 3; \quad n = 5;$

on a

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{4\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{5}{3}};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = -1 + \sqrt{\frac{5}{8}} + \sqrt{\frac{20}{3} + \sqrt{\frac{20}{3}}};$$

$$\text{AC}'\text{B} = 100^\circ{,}8; \quad \text{ACB} = 168^\circ \text{ environ.}$$

Dans tous ces radicaux, il n'y a qu'un seul signe applicable à la question. Ainsi, outre la lunule d'Hippocrate, on a encore quatre nouvelles lunules géométriquement carrables. En existe-t-il encore d'autres?

Note. En projetant orthogonalement les lunules circulaires, on obtient des lunules elliptiques carrables. Si sur les côtés d'un polygone *équilatère* d'un nombre pair de côtés, on construit des segments égaux, alternativement à l'intérieur et à l'extérieur, on construit un polygone formé de côtés curvilignes, et ayant évidemment même aire que le polygone rectiligne.