Janfroid

Solution du problème 202

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 377-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__377_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 202

(voir t. VIII, p. 45),

PAR M. JANFROID,
Bachelier ès sciences mathématiques.

Si deux paraboles, qui ont une tangente commune et un foyer commun, se coupent sous un angle constant, leur point d'intersection décrira une circonférence de cercle.

Je prends pour axe des x une droite passant par le foyer commun et perpendiculaire à la tangente commune, et pour axe des y une perpendiculaire à l'axe des x au foyer F.

L'équation focale d'une parabole, le foyer étant l'origine, est

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2) = (k'y + kx - p)^2,$$

ou, en divisant tous les termes par k^2, et posant $\frac{k'}{k} = m$ et $\frac{p}{k'} = n$,

$$(y^2 + x^2)(1 + m^2) = (my + x - n)^2.$$

Soit $x = -a$ l'équation de la droite AA'; la condition de tangence à cette droite est

$$n + 2a = 0,$$

alors l'équation de la parabole est

$$(1) \qquad (y^2 + x^2)(1 + m^2) = (my + x + 2a)^2.$$

Soit

$$(2) \qquad (y^2 + x^2)(1 + m'^2) = (m'y + x + 2a)^2$$

l'équation d'une seconde parabole, ayant le même foyer F, et tangente aussi à la droite AA'.

Exprimons que ces deux courbes se coupent toujours sous le même angle. Pour cela, soient x, y les coordonnées de leur point d'intersection, le coefficient angulaire de la tangente en ce point à (1) est

$$\alpha = -\frac{m^2x - my - 2a}{y - mx - 2am},$$

et à (2)

$$\alpha' = -\frac{m'^2 - m'y - 2a}{y - m'x - 2am'}.$$

Soit V la tangente de l'angle constant sous lequel les tangentes doivent se couper, on devra avoir

$$\frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'} = \mathrm{V}.$$

Remplaçant et développant, on a

$$(3) \quad \frac{(m - m')[(m + m')xy - y^2 - mm'x^2 - 2a(1 + mm')x - 4a^2]}{(1 + mm')[y^2 - (m + m')xy + mm'x^2 + 4a^2] - 2a(m - m')^2x} = \mathrm{V}$$

L'équation (1) développée donne

$$(4) \qquad m^2 - \frac{2y(x + 2a)}{x^2}m + \frac{y^2 - 4a(a + x)}{x^2} = 0.$$

Et comme l'équation (2) donnerait la même équation en m', il s'ensuit que les deux racines de (4) sont les valeurs de m et de m'; on en tire

$$m + m' = \frac{2y(x + 2a)}{x^2}, \quad mm' = \frac{y^2 - 4a(a + x)}{x^2},$$

$$m - m' = \frac{4}{x^2}\sqrt{a(y^2 + x^2)(x + a)}.$$

Substituant dans (4), on trouve, en supprimant le facteur commun et élevant au carré,

$$\left(x - \frac{2a}{V^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2(1 + V^2)}{V^4}.$$

On a ainsi un cercle dont les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{2a}{V^2}, \quad y = 0, \quad \text{et} \quad R = \frac{2a\sqrt{1 + V^2}}{V^2}.$$

Si l'angle est droit, le rayon du cercle devient nul, et l'on a $x^2 + y^2 = 0$, ce qui donne l'origine.

Si l'angle diminue, le rayon augmente et le centre s'éloigne; et si l'angle est nul, le rayon est infini et le centre se trouve à l'infini.