NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUG. JUBÉ

Solution de la question 198

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 376-377

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__376_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 198

(voir t. VII, p. 448),

PAR M. EUG. JUBÉ,
Professeur au lycée de Saint-Omer

PROBLÈME. *Trouver la courbe enveloppe de toutes les hyperboles équilatères concentriques et coupant orthogonalement une même droite donnée.*

Solution. Je prends pour origine le centre commun des hyperboles, et pour axe des x une parallèle à la droite donnée. Celle-ci aura pour équation $y = a$, et l'équation d'une quelconque des hyperboles sera de la forme

$$x^2 - y^2 + Axy = B.$$

Une normale en un point $x'y'$ aura pour équation

$$y - y' = \frac{Ax' - 2y'}{2x' + Ay'}(x - x'),$$

et pour que cette ligne soit la droite donnée $y = a$, il faut que $Ax' - 2a = 0$ (le dénominateur ne pouvant pas être infini), ce qui donne $A = \frac{2a}{x'}$. Comme le point (a, x') est sur l'hyperbole, on a

$$x'^2 - a^2 + Aax' = B, \quad \text{d'où} \quad x'^2 + a^2 = B.$$

(*) A paraître prochainement une solution élémentaire très-simple par voie de vérification de la question élémentaire.

Une quelconque des hyperboles équilatères, qui ont la droite donnée pour normale, sera donc déterminée par le point où cette ligne la coupe orthogonalement, et aura pour équation

$$x^2 - y^2 + \frac{2a}{x'} yx = x'^2 + a^2.$$

En différentiant par rapport à x', et éliminant cette variable entre l'équation de l'hyperbole et sa dérivée, on obtient pour l'équation de l'enveloppe

$$x^2 - y^2 - a^2 = 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}.$$