NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LORIEUX

Théorème proposé au concours général de 1849

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 369-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__369_0>

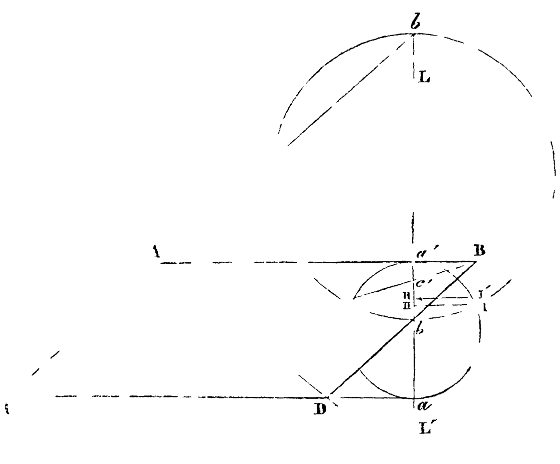
THÉORÈME PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1849

(Mathématiques élémentaires; voir p. 31.)

RÉDIGÉ PAR M. E. LORIEUX,
Élève du lycée Monge.

Étant donné un parallélogramme ABCD, on mène une droite LL′ perpendiculaire à ses deux côtés opposés AB, CD, laquelle rencontre le premier côté en a', et le prolongement du second en a; cette droite rencontre les deux autres côtés AC, BD en b' et b, et les deux diagonales BC, AD en c' et c.

On demande de prouver que les circonférences des cercles décrits sur les trois segments aa', bb', cc', comme diamètres, ont les mêmes points d'intersection.



On pourra examiner si le théorème aurait encore lieu dans le cas où la droite LL′ serait oblique aux deux côtés AB, CD, au lieu de leur être perpendiculaire.

Construisons deux des cercles, par exemple ceux qui ont pour diamètres aa' et bb'. Soit I un de leurs points d'intersection. Abaissons de ce point sur $b'c$ la perpendiculaire IH. Dans le cercle $a'\mathrm{I}a$, $a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} = \overline{\mathrm{IH}}^2$: dans le cercle $b'\mathrm{I}b$, $b'\mathrm{H} \times b\mathrm{H} = \overline{\mathrm{IH}}^2$. Donc

$$a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} = b'\mathrm{H} \times b\mathrm{H}.$$

Or

$$b'\mathrm{H} = b'a' + a'\mathrm{H}, \quad \text{et} \quad b\mathrm{H} = a\mathrm{H} - ab$$

Remplaçons ces lignes par leurs valeurs dans l'équation précédente, nous aurons

$$\begin{aligned} a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} &= (b'a' + a'\mathrm{H})(a\mathrm{H} - ab) \\ &= b'a' \times a\mathrm{H} + a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} - b'a' \times ab - a'\mathrm{H} \times ab, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en réduisant,

$$b'a' \times a\mathrm{H} = b'a' \times ab + a'\mathrm{H} \times ab$$

Mais $a\mathrm{H} = aa' - a'\mathrm{H}$ Substituant, il vient

$$b'a'(aa' - a'\mathrm{H}) = b'a' \times ab + a'\mathrm{H} \times ab,$$

ou bien

$$(1) \qquad a'\mathrm{H}(ab + b'a') = b'a'(aa' - ab) = a'b' \times a'b.$$

Les triangles $\mathrm{D}ab$, $a'b\mathrm{B}$ sont semblables, puisque les lignes $\mathrm{A}a'$ et CD sont parallèles. Ils donnent la proportion

$$ab : a'b :: \mathrm{D}a : a'\mathrm{B}$$

Par suite

$$\begin{aligned} aa' : ab &:: \mathrm{D}a + a'\mathrm{B} : \mathrm{D}a \\ : a'b & \qquad\qquad\qquad : a'\mathrm{B}, \end{aligned}$$

d'ou

$$ab = \frac{aa' \times \mathrm{D}a}{\mathrm{D}a + a'\mathrm{B}} \quad \text{et} \quad a'b = \frac{aa' \times a'\mathrm{B}}{\mathrm{D}a + a'\mathrm{B}}$$

Les triangles semblables $b'Ca$ et $Ab'a'$ donnent

$$a'b' : b'a :: Aa' : Ca.$$

On a, par conséquent,

$$aa' : a'b' :: Ca - Aa' : Aa',$$

d'où

$$a'b' = \frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'}.$$

Remplaçons, dans l'équation (1), ab, $a'b'$ et $a'b$ par leurs valeurs

$$a'H\left(\frac{aa' \times Da}{Da + a'B} + \frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'}\right) = \left(\frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'}\right)\left(\frac{aa' \times a'B}{Da + a'B}\right),$$

ou bien

$$a'H[Da(Ca - Aa') + Aa'(Da + a'B)]$$
$$= a'A[aa'(Da + a'B) - aa' \times Da],$$

ou bien encore

$$a'H(Da \times Ca + Aa' \times a'B) = aa' \times Aa' \times a'B,$$

d'où l'on tire

$$a'H = \frac{aa' \times Aa' \times a'B}{Da \times Ca + Aa' \times a'B}$$

Traçons maintenant le cercle qui a cc' pour diamètre; soit I' un de ses points d'intersection avec le cercle dont le diamètre est aa'. Du point I' abaissons sur $b'c$ la perpendiculaire I'H', et calculons $a'H'$ comme nous avons calculé $a'H$. Pour cela, nous remarquerons qu'en changeant b en c et b' en c' dans l'équation (1), nous avons l'équation

(2) $$a'H'(ac + a'c') = a'c' \times a'c.$$

Les triangles $a'C'B$, $c'Ca$ sont semblables, puisque les lignes AB et CD sont parallèles. Ils donnent la proportion

$$a'c' : c'a :: a'B : Ca,$$

d'où

$$aa' : ca' :: a'B + Ca : a'B, \quad \text{et} \quad a'c' = \frac{aa' \times a'B}{a'B + Ca}.$$

Les triangles semblables Dac, Aca' donnent

$$ca : ca' :: Da : Aa'.$$

Par suite

$$\begin{aligned} aa' : ca &:: Aa' - Da : Da \\ : ca' & \qquad\qquad : Aa', \end{aligned}$$

d'où

$$ca = \frac{aa' \times Da}{Aa' - Da}, \quad \text{et} \quad ca' = \frac{aa' \times Aa'}{Aa' - Da}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$a'H'\left[\left(\frac{aa' \times Da}{Aa' - Da}\right) + \left(\frac{aa' \times Aa'}{a'B + Ca}\right)\right] = \left(\frac{aa' \times aB}{a'B + Ca}\right)\left(\frac{aa' \times Aa'}{Aa' - Da}\right),$$

ou bien

$$a'H'[Da(a'B + Ca) + a'B(Aa' - Da)] = aa'(a'B \times Aa'),$$

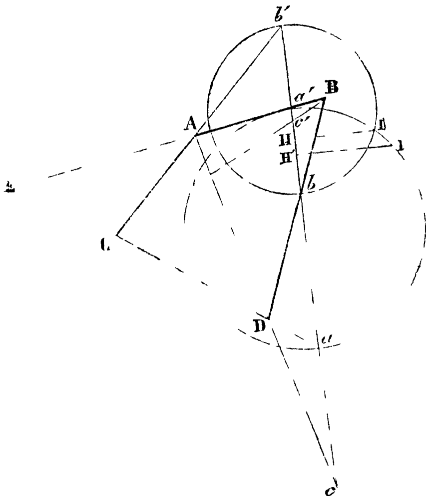
d'où l'on tire

$$a'H' = \frac{aa' \times a'B \times Aa'}{Da \times Ca + a'B \times Aa'}.$$

C'est la valeur que nous avions trouvée pour $a'H$. Donc le point H' coïncide avec le point H. Mais les points I et I' d'intersection se trouvent à la fois sur la perpendiculaire élevée en ce point et sur le cercle dont le diamètre est aa'. Donc ces deux points coïncident aussi. Il en est de même pour les points situés de l'autre côté, qui sont symétriques.

Pour trouver les équations (1) et (2), nous n'avons fait aucune hypothèse, si ce n'est que sur trois segments quelconques d'une ligne comme diamètres, nous avions décrit trois cercles, et que des points d'intersection nous avions abaissé une perpendiculaire sur cette ligne. Pour obtenir les valeurs de $a'H$ et de $a'H'$, nous ne nous sommes servi que du parallélisme des côtés AB et CD, et nullement de celui des deux côtés AC et BD, pas plus que de la perpendicularité de la ligne aa' sur les côtés AB, CD. Ces deux conditions de l'énoncé sont donc inutiles, et compliquent la question quand, suivant les règles de la méthode, on cherche à les faire entrer dans la démonstration. Il aurait fallu donner un trapèze ABCD et une sécante quelconque aa'.

Le parallélisme même des deux côtés AB, CD est-il une simplification? La démonstration n'est-elle pas aussi simple quand il s'agit d'un quadrilatère quelconque? Alors, en effet, tout se borne à considérer un seul triangle. Dans le cas d'un trapèze ou d'un parallélogramme, le sommet de ce triangle est à l'infini.



Soit ABCD un quadrilatère quelconque, et répétons les mêmes constructions. Soit E le point d'intersection des deux côtés AB et CD prolongés. Les équations (1) et (2) subsistent toujours. Il nous faut, comme précédemment, calculer les lignes ab, $b'a'$ et $a'b$ pour obtenir la valeur de a'H. Au lieu des triangles semblables, nous prendrons ici les transversales BD et Cb' par rapport au triangle Eaa'. La première nous donne

(M) $$ab \times a'\mathrm{B} \times \mathrm{ED} = \mathrm{EB} \times ba' \times \mathrm{D}a,$$

d'où

$$\frac{ab}{ab'} = \frac{\mathrm{BE} \times \mathrm{D}a}{a'\mathrm{B} \times \mathrm{DE}}.$$

Quand AB et CD sont parallèles, les segments BE, DE sont infinis et, par conséquent, égaux; il reste $\frac{ab}{a'b'} = \frac{\mathrm{D}a}{a'\mathrm{B}}$, ou la proportion que nous avaient donnée les triangles semblables Dab, ab'B. Nous poserons ce rapport égal à K. Ajoutons 1 aux deux membres, $\frac{ab + ba'}{ba'} = \mathrm{K} + 1$. Mais $ab + ba' = aa'$; donc

$$\frac{aa'}{ba'} = \mathrm{K} + 1, \quad \text{et} \quad ba' = \frac{aa'}{\mathrm{K} + 1}.$$

Nous avons aussi

$$ab = aa' - ba' = aa' - \frac{aa'}{\mathrm{K}+1} = \frac{aa'.\mathrm{K}}{\mathrm{K} + 1}.$$

La transversale Cb' nous donne

(N) $$a'b' \times \mathrm{AE} \times \mathrm{C}a = b'a \times \mathrm{A}a' \times \mathrm{CE},$$

d'où

$$\frac{ab'}{a'b'} = \frac{\mathrm{C}a \times \mathrm{AE}}{\mathrm{A}a' \times \mathrm{CH}},$$

rapport que nous poserons égal à R. Retranchant 1 de part et d'autre, il vient

$$\frac{b'a - a'b'}{a'b'} = \mathrm{R} - 1.$$

Mais $ab' - b'a' = aa'$; donc

$$\frac{aa'}{a'b'} = \mathrm{R} - 1, \quad \text{et} \quad a'b' = \frac{aa'}{\mathrm{R} - 1}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1), nous aurons

$$a'\mathrm{H}\left(\frac{aa'.\mathrm{K}}{\mathrm{K}+1}+\frac{aa'}{\mathrm{R}-1}\right)=\frac{\overline{aa'}^2}{(\mathrm{K}+1)(\mathrm{R}-1)}.$$

On peut diviser le tout par aa' et réduire cette équation, qui devient

$$a'\mathrm{H}(\mathrm{K}.\mathrm{R}+1)=aa',\quad \text{d'où}\quad a'\mathrm{H}=\frac{aa'}{\mathrm{K}.\mathrm{R}+1}.$$

Remplaçons K et R par leurs valeurs, et nous avons

$$a'\mathrm{H}=\frac{aa'\times\mathrm{CE}\times\mathrm{DE}\times\mathrm{A}a'\times\mathrm{B}a'}{\mathrm{AE}\times\mathrm{BE}\times\mathrm{C}a\times\mathrm{D}a+\mathrm{CE}\times\mathrm{DE}\times\mathrm{A}a'\times\mathrm{B}a'}.$$

Si nous prenons le cercle décrit sur cc' comme diamètre, les transversales AC et BC par rapport au même triangle Eaa' nous donneront deux équations qui correspondront, la première à l'équation (M), la seconde à l'équation (N). La transversale Ac nous donne

$$(\mathrm{M}')\qquad ac\times\mathrm{DE}\times\mathrm{A}a'=ca'\times\mathrm{D}a\times\mathrm{AE}.$$

La transversale BC nous donne

$$(\mathrm{N}')\qquad a'c'\times a\mathrm{C}\times\mathrm{BE}=c'a\times\mathrm{CE}\times\mathrm{B}a'$$

Nous avons en outre

$$ac'+c'a=aa'\quad\text{et}\quad a'c-ac=aa'.$$

Les équations (M') et (N') ne diffèrent des équations (M) et (N) que parce que B est changé en A et A en B. Tout étant du reste symétrique, la valeur de a'H' ne différera de celle de a'H que par ce seul changement. Mais, malgré ce changement, la valeur de a'H reste la même; donc le point H' coïncide avec le point H, et les trois cercles ont les mêmes points d'intersection.

Nota. La question n'a pas été résolue au grand concours, et aucun prix décerné. Comme nous l'avons déjà observé en 1847 et 1848, la question élémentaire est plus difficile que celle des mathématiques supérieures. D'ailleurs, pourquoi confisquer toute la science au bénéfice de la géométrie analytique? Pourquoi ne pas proposer à la classe supérieure des questions de géométrie supérieure, de géométrie de l'espace (*)? TM.