NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EL. GUILLON

Des quantités négatives. Usage que l'on fait en algèbre des signes + et − ; règles des signes du calcul algébrique ; utilité des conventions relatives au calcul des quantités négatives

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 28-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__28_0>

DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

Usage que l'on fait en algèbre des signes + et —; règles des signes du calcul algébrique; utilité des conventions relatives au calcul des quantités négatives;

PAR M. EL. GUILLON,

Maître surveillant à l'École Normale.

La résolution des problèmes dépend de celle des équations, et la résolution des équations exige que l'on sache effectuer sur les polynômes (parmi lesquels nous comprendrons toujours les monômes) les transformations ou opérations qui constituent le calcul algébrique.

On appelle *polynôme* un assemblage de quantités réunies entre elles par les signes + et —. Chacune de ces quantités, prise avec son signe, s'appelle *un terme du polynôme;* nous appellerons *termes positifs* ceux qui ont le signe +, et *termes négatifs* ceux qui ont le signe — (*). Nous parlerons aussi de valeur absolue d'un terme; nous entendrons par là la valeur de ce terme, abstraction faite de son signe. Pour plus de simplicité dans les énoncés que nous aurons à donner, nous comprendrons la première quantité quand elle n'aura pas de signe, parmi celles qui sont précédées du signe +.

Il semble tout naturel de regarder un polynôme, tel que $a - b + c - d \ldots$, comme représentant un nombre ou une quantité qui doit être obtenue en retranchant b de a, puis en ajoutant c au résultat, etc.; mais alors il faudrait, pour qu'un polynôme représentât une quantité, que

(*) Nous donnons pour un moment cette définition qu'il sera nécessaire de modifier plus tard.

l'ordre des termes fût tel, qu'on ne rencontrât pas de soustraction impossible; car, autrement, ce polynôme ne représenterait rien. Or il serait très-gênant, et sans aucune utilité, de s'astreindre à écrire les termes d'un polynôme dans un ordre plutôt que dans tout autre. Ce qu'il importe de considérer dans un polynôme, ce n'est pas l'ordre de ses termes, mais sa valeur; on appelle ainsi la différence entre la somme des valeurs absolues de ses termes positifs et la somme des valeurs absolues de ses termes négatifs. Ainsi, dans un polynôme, les soustractions indiquées peuvent être impossibles, et même un polynôme peut commencer par un ou plusieurs termes négatifs. Si nous ajoutons que l'on fait usage en algèbre, pour les avantages qu'il en résulte, de polynômes dans lesquels la somme des valeurs absolues des termes positifs est moindre que la somme des valeurs absolues des termes négatifs; que ce qu'il y a à considérer dans de pareils polynômes, c'est leur valeur négative, ou la différence entre les deux sommes dont il s'agit précédée du signe — ; alors nous serons conduits à dire qu'au lieu de regarder dans un polynôme les signes + et — comme indiquant des additions et des soustractions à effectuer, il est préférable de les regarder comme servant à partager les termes en deux classes, dont chacune fournit l'une des deux sommes desquelles dépend le nombre réel ou fictif, ou, comme on dit, positif ou négatif, que nous avons appelé *la valeur du polynôme*.

La question suivante, extrêmement simple, servira à éclaircir ce qui précède :

Un banquier a payé différentes sommes, et il en a reçu d'autres : on demande la somme que définitivement il a déboursée.

Il est bien clair que cette somme n'est autre chose que la valeur, telle que nous l'avons définie, du polynôme dont les termes positifs ont pour valeurs absolues les sommes payées, et dont les termes négatifs ont pour valeurs absolues les sommes reçues. C'est de cette valeur seulement qu'on doit s'occuper, et nullement de l'ordre dans lequel on écrit les termes du polynôme.

Dans la question précédente on ne pouvait demander quelle était la somme que le banquier avait définitivement déboursée, qu'en supposant que le banquier avait déboursé plus qu'il n'avait reçu; si le contraire avait eu lieu, on aurait eu à se demander quelle était définitivement la somme reçue. Cette somme n'eût été autre chose que la valeur du polynôme dont les termes positifs auraient eu pour valeurs absolues les sommes reçues, et dont les termes négatifs auraient eu pour valeurs absolues les sommes payées. Ce polynôme aurait pu s'obtenir au moyen de celui que l'on a été conduit à considérer dans l'autre problème, en changeant dans ce dernier polynôme les signes de tous ses termes. Si l'un des deux problèmes est possible, l'autre ne l'est pas; si l'un des polynômes a une valeur, l'autre n'en a pas. Si l'on veut s'exprimer de la manière que nous avons fait connaître, on dira : Si l'un des polynômes est positif, l'autre est négatif. Ce que nous voulons surtout faire remarquer ici, c'est que, si le polynôme dont la valeur ferait connaître la somme cherchée, dans le cas où il serait positif, se trouve être négatif, sa valeur est juste égale absolument et de signe contraire à celle du polynôme qu'on aurait dû écrire; d'où résulte qu'on aurait pu se borner à considérer l'un de ces deux polynômes, et l'on eût connu par le signe de sa valeur et par sa valeur absolue, 1° quelle était celle des deux questions qui était possible; 2° quel était le résultat cherché. La question qu'on s'était proposée est possible, si le polynôme qu'elle conduit à considérer est positif, et sa valeur fait connaître la somme cherchée. La question qu'on s'était proposée est impossible, et c'est l'autre qui est possible, si le polynôme considéré est négatif; et, en supprimant le signe de sa valeur, on obtiendra le résultat que l'on devait chercher.

On aurait pu proposer une question plus générale que chacune des deux précédentes et qui les aurait comprises toutes deux : on aurait pu demander, non pas quelle était la somme définitivement déboursée ou reçue, mais quelle était la variation survenue dans la somme possédée par le banquier. Cette variation eût été, pour un ensemble de cas particuliers, la valeur d'un certain polynôme, et, pour d'autres cas, la valeur du polynôme de signes contraires.

Quand on résout des problèmes généralement, il arrive souvent, comme dans l'exemple ci-dessus, que pour un ensemble de cas particuliers on est conduit à considérer certains polynômes, et ces polynômes changés de signes pour d'autres cas particuliers. On peut alors ne considérer qu'une seule espèce de polynômes, et déduire des résultats des calculs effectués comme ils devraient l'être si ces polynômes étaient positifs, les solutions qui conviennent aux cas où ils sont négatifs. Ce qui constitue le calcul algébrique, c'est non-seulement l'ensemble des règles au moyen desquelles on peut trouver un polynôme qui soit en réalité, par rapport à des polynômes positifs, une somme, une différence, etc., mais encore l'ensemble des règles à l'aide desquelles on peut, au moyen des résultats d'opérations effectuées sur certains polynômes, obtenir ceux qui fourniraient d'autres polynômes qui se déduiraient des premiers, soit par le changement des signes de tous leurs termes, soit encore par d'autres changements dont il sera question bientôt. On conçoit qu'il y aura de l'utilité à soumettre les polynômes négatifs aux mêmes calculs que les polynômes positifs, si, des résultats auxquels on sera conduit, on peut facilement déduire ceux que l'on a besoin de connaître. C'est, comme nous le verrons, ce qui a lieu effectivement.

Avant d'apprendre à effectuer des opérations sur les polynômes, il importe de faire connaître quelques propriétés de leurs valeurs. De la définition que nous avons donnée, résulte que la valeur d'un polynôme n'est pas altérée quand on augmente ou qu'on diminue d'un même nombre deux termes, dont l'un est positif et l'autre négatif; par suite, on peut, sans altérer la valeur d'un polynôme, supprimer un terme, positif ou négatif, pourvu qu'on diminue la valeur absolue d'un terme négatif ou positif de la valeur absolue du premier. Ainsi les deux termes $+ 7$ et $- 4$ pourront être remplacés par le terme $+ 3$; les deux termes $- 7$ et $+ 4$ pourraient être remplacés par le terme $- 3$.

Plus généralement, tant de termes d'un polynôme qu'on voudra peuvent être remplacés par un seul, qui est la différence entre la somme des valeurs absolue des termes positifs et la somme des valeurs absolues des termes négatifs, cette différence étant précédée du signe des termes qui ont fourni la plus grande somme.

Nous passons actuellement à l'exposé des règles à suivre pour effectuer les opérations algébriques. On a donné à ces opérations les noms d'*addition*, *soustraction*, etc., parce que les résultats qu'elles fournissent, lorsque l'on ne considère que des polynômes positifs, sont analogues à ceux que l'on obtient par les opérations de l'arithmétique.

De l'addition.

On appelle *somme de plusieurs polynômes positifs*, un autre polynôme qui a pour valeur la somme des valeurs des premiers.

Il est facile de déduire de cette définition la règle suivante :

Pour obtenir la somme de plusieurs polynômes positifs, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres, en conservant à chaque terme son signe. Il faut se rappeler que le premier terme d'un polynôme, quand il n'a pas de signe, est rangé parmi ceux qui ont le signe $+$.

Cette règle on l'étend, soit à l'addition de polynômes dont les uns sont positifs et les autres négatifs, soit à l'addition de polynômes tous négatifs; c'est-à-dire que l'on convient de regarder dans tous les cas comme la somme de plusieurs polynômes, un autre polynôme déduit de ceux-ci selon la règle énoncée.

Il résulte évidemment de cette convention et des remarques que nous avons faites sur la valeur d'un polynôme, qu'un polynôme qui est la somme de plusieurs autres, parmi lesquels il s'en trouve de négatifs, a pour valeur la différence entre la somme des valeurs absolues de ceux qui sont positifs et la somme des valeurs absolues de ceux qui sont négatifs, cette différence étant précédée du signe des polynômes qui ont fourni la plus grande somme. Si les polynômes ajoutés étaient tous négatifs, on trouverait pour leur somme un polynôme négatif, dont la valeur absolue serait la somme des valeurs absolues des polynômes ajoutés.

De la soustraction.

La soustraction a pour but, étant donnés la somme de deux polynômes et l'un de ceux-ci, de trouver l'autre. On donne au résultat de cette opération le même nom qu'en arithmétique.

On obtiendra un polynôme qui soit la différence de deux autres, en écrivant à la suite du polynôme dont on veut soustraire, le polynôme à soustraire, après avoir changé les signes de tous les termes de ce dernier. Il est clair, en effet, que, si au résultat ainsi obtenu, on ajoute le polynôme soustrait, on obtiendra le polynôme dont on soustrait. On peut remarquer que, soustraire un polynôme, revient à ajouter le polynôme de signes contraires, et, comme l'on sait, les résultats auxquels conduit l'addition, cette remarque permettra de dire ceux auxquels conduit la soustraction.

De la multiplication.

La multiplication a pour but, deux polynômes étant donnés, d'en trouver un troisième qui soit le produit des deux premiers. On appelle produit de deux polynômes positifs un autre polynôme dont la valeur soit le produit des valeurs des deux premiers.

Soit d'abord proposé de trouver le produit d'un binôme $a+b$ ou $a-b$ par un monôme m; que m soit entier, fractionnaire ou incommensurable, il est facile de voir que le produit est $am+bm$ dans le premier cas, et $am-bm$ dans le second.

Soit actuellement proposé de multiplier un polynôme positif $a-b-c+d-e$ par un monôme m; le produit s'obtiendra en multipliant dans ce polynôme chacun des nombres a, b, c, etc., par m. En effet, soit P la valeur du polynôme proposé : le produit que nous cherchons doit être égal à Pm; mais si l'on représente par P' la valeur de l'ensemble des termes du polynôme P, à l'exception d'un seul, $-e$, de telle façon que P soit égal au binôme $P'-e$, le produit cherché sera égal à $(P'-e)m=P'm-em$. De même, si l'on désigne par P'' la valeur de l'ensemble des termes de P', à l'exception d'un seul, $+d$, de façon que $P'=P''+d$, on aura

$$P'm = P''m + dm,$$

et, par suite,

$$Pm = P''m + dm - em.$$

En continuant ainsi, on finira par obtenir la relation

$$Pm = am - bm - cm + dm - em,$$

qui est celle à laquelle nous voulions parvenir.

Nous nous sommes appuyés, dans la démonstration précédente, sur ce que le produit du binôme $a - b$ par m, et, par suite, le produit du binôme $-b + a$ par m, est $am - bm$, dans le cas où b est plus petit que a. Dès lors, pour que cette démonstration ne soit pas en défaut, il est nécessaire que les binômes $P' - e$, $P'' + d$, etc., soient tous positifs; mais c'est ce qui a lieu nécessairement quand on suppose, comme nous l'avons fait, que le polynôme multiplicande est positif, puisque ces binômes ont tous pour valeur celle de ce polynôme. Donc il est toujours vrai de dire que le produit d'un polynôme positif $a - b - c + d - e$ par un monôme positif m s'obtient en multipliant dans ce polynôme chacun des nombres a, b, etc., par m.

Si l'on remarque qu'on peut, sans altérer la valeur d'un produit, changer l'ordre de ses facteurs, on conclura que le produit d'un monôme m par un polynôme positif $a - b - c + d - e$ s'obtiendra en multipliant dans le polynôme chacun des nombres a, b, etc., par m.

Supposons maintenant qu'on ait à multiplier un polynôme positif $a - b - c + d - e$ par un polynôme positif $m - n + p - q$. Si P représente la valeur du polynôme multiplicande, le produit cherché sera égal à $P(m - n + p - q) = Pm - Pn + Pp - Pq$; mais le produit Pm s'obtiendra en multipliant dans le multiplicande les valeurs absolues de ses termes par m. Le produit Pn s'obtiendra d'une manière analogue, et $-Pn$ ne sera autre chose que la valeur de ce produit changé de signe; de sorte que, dans l'expression trouvée plus haut du produit cherché, on peut remplacer $-Pn$ par le polynôme qu'on obtient en multipliant dans le polynôme de signes contraires à ceux du multiplicande, les nombres a, b, etc., par m. En continuant ainsi, on arrive à cette règle générale :

Les termes du produit de deux polynômes positifs s'obtiennent, quant à leurs valeurs absolues, en multipliant les valeurs absolues des termes du multiplicande par les valeurs absolues des termes du multiplicateur; quant à leurs signes, ce sont les signes des termes du multiplicande ou les signes contraires, selon que le terme du multiplicateur, par la valeur absolue duquel on a multiplié, a le signe + ou le signe —.

La partie de cette règle relative aux signes des termes du produit peut être exprimée autrement; on peut dire : Selon que la valeur absolue d'un terme du produit est le produit des valeurs absolues de deux termes qui ont le même signe ou des signes différents, ce terme du produit a le signe + ou le signe —. On énonce souvent cette partie de la règle d'une manière abrégée, comme il suit :

+ par + donne +.
+ par — donne —.
— par + donne —,
— par — donne +.

De même que nous sommes convenus de regarder comme la somme de plusieurs polynômes, parmi lesquels il s'en trouve de négatifs, un autre polynôme obtenu au moyen des premiers, comme si tous ceux-ci étaient positifs, de même nous conviendrons de regarder comme le produit de deux polynômes, quand l'un d'eux est négatif ou qu'ils le sont tous deux, un troisième polynôme déduit des premiers, selon la règle énoncée plus haut. Il faudra en outre, de même aussi qu'à propos de l'addition, pour que l'on puisse tirer parti de cette nouvelle convention, étudier les résultats auxquels elle conduit, dans le but de connaître la relation qui existe entre ces résultats et ceux que l'on obtiendrait si les polynômes négatifs étaient remplacés par ceux de signes contraires.

L'étude dont nous parlons se borne à peu près à remarquer que, en acceptant la convention dont il s'agit, un produit de deux facteurs change de signe et conserve la même valeur absolue, lorsqu'on change les signes de tous les termes de l'un de ces facteurs ; de là on déduit que, si l'on change les signes des deux facteurs, le produit ne change pas du tout. On peut énoncer ce résultat autrement et dire que le produit de deux facteurs a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues de ces facteurs, et qu'il est positif ou négatif, selon que les deux facteurs ont le même signe ou des signes différents.

On déduit facilement de là que le produit de tant de facteurs qu'on veut a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des facteurs, qu'il est positif s'il n'y a aucun facteur négatif ou s'il y en a un nombre pair, et qu'il est négatif dans le cas où le nombre des facteurs négatifs est impair.

De la division.

La division a pour but, étant donnés le produit de deux polynômes et l'un de ceux-ci, de trouver l'autre.

La division n'étant que l'opération inverse de la multiplication, la règle des signes pour la division est une conséquence immédiate de celle qui est relative à la multiplication. Nous nous dispenserons dès lors d'entrer ici dans aucun détail.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent permettra, lorsqu'on sera arrivé à un résultat par des opérations effectuées sur des polynômes négatifs, d'en déduire celui qu'on aurait obtenu avec des polynômes de signes contraires. Ce sont surtout les remarques faites dans la multiplication et celles analogues qu'on aurait pu faire dans la division, qui, pour cet usage, ont des applications. Il est très-facile de déduire des résultats fournis par ces deux opérations effectuées sur des polynômes, parmi lesquels il s'en trouve de négatifs, ceux que l'on aurait obtenus avec des polynômes tous positifs, car il ne peut y avoir de différence entre les premiers et les seconds résultats que dans les signes, nullement dans les valeurs absolues.

Quand on résout des problèmes généralement, non-seulement il arrive, comme nous l'avons dit, qu'on doit considérer à la fois des polynômes et les polynômes de signes contraires, mais il arrive aussi très-souvent qu'après avoir considéré certains polynômes, et effectué sur eux des transformations telles que des réductions de termes semblables, des additions, etc., on doit considérer d'autres polynômes qui se déduiraient des premiers par le changement de signe d'une ou de plusieurs des lettres qui y entrent, et effectuer sur ces nouveaux polynômes les mêmes calculs que sur les premiers. Dans ce cas, on peut aussi se dispenser de recommencer les calculs; car il suffira, pour obtenir les résultats correspondants aux nouveaux polynômes, de changer, dans les résultats fournis par les premiers, le signe de la quantité ou des quantités qui doivent en être changées pour que les premiers polynômes deviennent égaux aux seconds. Nous entendons par changer une lettre de signe, la lettre a par exemple, remplacer partout $+a$ ou a simplement par $-a$, et inversement, ou, ce qui revient au même, comme il est facile de le vérifier, nous entendons remplacer partout a par $-a$. Cela revient encore à changer les signes de tous les termes où a entre à des puissances impaires, et à conserver ceux de tous les termes qui ne contiennent pas a, ou qui le contiennent à des puissances paires. Il est bon de remarquer que, si deux polynômes ne diffèrent que par le signe d'une lettre, ils se réduiront à la même expression quand on remplacera cette lettre, dans l'un par un certain nombre, et dans l'autre par le même nombre, précédé du signe —.

Occupons-nous de la démonstration de la proposition ci-dessus énoncée. Nous examinerons successivement la réduction des termes semblables, l'addition et la soustraction, la multiplication et enfin la division.

1°. Soient P un polynôme renfermant des termes semblables, P' ce polynôme réduit; soient P_1 ce que devient P (qui est supposé renfermer la lettre a) quand on y change a en $-a$; P'_1 le polynôme P_1 réduit : je dis qu'on obtiendrait P'_1 en changeant dans P', a en $-a$. En effet, supposons qu'il y ait dans P plusieurs termes semblables renfermant a à une même puissance paire; en changeant dans P a en $-a$, on obtiendra le polynôme P_1, où tous ces termes se retrouveront identiquement, et ils donneront, par leur réduction, dans P' et dans P'_1, deux termes identiques; mais celui de ces termes qui se trouve dans P' ne changera pas si l'on change a en $-a$ dans ce polynôme, et il fournira, par conséquent, le terme qui doit se trouver dans P'_1. Il résulte de ce raisonnement que tous les termes de P'_1 qui renferment a à des puissances paires seront fournis par ceux de P' quand on y change a en $-a$. Supposons, en second lieu, qu'il y ait dans P des termes semblables renfermant tous a à une même puissance impaire; en changeant dans P a en $-a$, tous ces termes changeront de signe, et le terme réduit de P' se trouvera, dans P'_1, changé de signe; mais si l'on change dans P' a en $-a$, le terme réduit dont il s'agit donnera celui qui doit se trouver dans P'_1. On voit par là que tous les termes de P'_1 qui renferment a à des puissances impaires seront fournis par ceux de P' quand on y changera a en $-a$. Donc, en définitive, le polynôme P'_1 n'est autre chose que le polynôme P′, quand on a changé dans ce dernier a en $-a$.

2°. Soient P, Q, R, etc., différents polynômes, S leur somme, P′, Q′, R′, etc., ce que deviennent P, Q, R, etc., quand on y change a en $-a$, S la somme des nouveaux polynômes ; je dis que S′ n'est autre chose que ce que devient S quand on y change a en $-a$. La proposition serait évidente, d'après la règle qu'on suit pour trouver la somme de plusieurs polynômes, si dans S et S′ ne se trouvait effectuée aucune réduction ; mais il résulte de la démonstration précédente que, s'il en est ainsi avant la réduction, il en est encore ainsi après. Donc, etc.

La soustraction revenant à l'addition, nous croyons inutile de démontrer la proposition pour le cas où la transformation opérée serait une soustraction.

3°. Soient P et Q deux polynômes, V leur produit, P′ et Q′ ce que deviennent P et Q quand on y change a en $-a$, V′ le produit des nouveaux polynômes ; je dis que V′ n'est autre chose que ce que devient V quand on y change a en $-a$. Pour démontrer ce résultat, nous considérerons dans chaque facteur deux espèces de termes, ceux qui ne renferment pas a ou qui renferment cette lettre à des puissances paires, et ceux qui renferment a à des puissances impaires. Nous désignerons, pour le polynôme P, l'ensemble des premiers termes par A, et l'ensemble des autres par B, de sorte que le premier polynôme ne sera autre chose que A + B ; de même, nous représenterons le polynôme Q par C + D. Il est clair que les polynômes P′ et Q′ seront représentés, l'un par A — B, et l'autre par C — D. Dès lors le produit V sera représenté par AC + BC + AD + BD, et le produit V′ par AC — BC — AD + BD. Or, si l'on change dans V, a en $-a$, les termes du groupe représenté par AC, ne renfermant pas la lettre a, ou la renfermant à des puissances paires, ne changeront pas de signe et donneront le même groupe de termes qui se trouve dans V'. On peut dire la même chose des termes du groupe BD. Les termes du groupe AD renferment a à des puissances impaires et changent de signe par le changement de a en $-a$; ils fourniront donc les termes du groupe $-$AD, qui se trouvent dans V'. De même, le groupe $+$BC de V fournira le groupe $-$BC de V'. Donc V' n'est autre chose que ce que devient V quand on y change a en $-a$.

S'il s'agissait d'un produit de plus de deux facteurs, la proposition serait également vraie, et la démonstration précédente serait facile à généraliser.

4°. La division n'étant que l'opération inverse de la multiplication, il en résulte que la proposition est vraie aussi pour un quotient. Toutefois il y a lieu d'examiner le cas où la division ne se ferait pas exactement.

Soient M, N deux polynômes, Q leur quotient, et R le reste de division; soient M', N' ce que deviennent M, N quand on y change a en $-a$, Q' et R' le quotient et le reste correspondants à ces nouveaux polynômes : je dis que Q', R' ne sont autre chose que ce que deviennent Q, R quand on y change a en $-a$. En effet, de la relation

$$M = NQ + R$$

il résulte

$$M' = N'Q'' + R'',$$

en désignant par Q'' et R'' ce que deviennent Q, R quand on y change a en $-a$; mais alors Q'' et R'' sont le nouveau quotient et le nouveau reste, c'est-à-dire que ces polynômes sont les mêmes que Q' et R'.   C. Q. F. D.

Une puissance n'étant qu'un produit, on doit regarder comme démontré que, si deux polynômes se déduisent l'un de l'autre par le changement de signe d'une lettre, il en est de même de leurs puissances de même degré; par suite, il en est de même aussi de leurs racines d'un même degré.

Les démonstrations précédentes supposent que les nouveaux polynômes se déduisent des primitifs par le changement de signe d'une seule des lettres qui y entrent; mais les démonstrations correspondantes au cas où plusieurs lettres seraient changées de signe ne différeraient guère de celles que nous avons données, et nous croyons inutile de nous y arrêter.

La proposition qui nous occupe est donc actuellement démontrée pour tous les résultats obtenus par des réductions de termes semblables, des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, des élévations à des puissances, des extractions de racines. Elle est très-importante à cause de ses applications. Dans les questions où l'on aurait dû considérer des polynômes de deux espèces, on pourra, à l'aide de cette proposition, n'en considérer que d'une seule; ceux-ci représenteront les deux espèces : l'une, en y considérant certaines lettres comme représentant simplement des quantités; l'autre, en y considérant ces mêmes lettres comme représentant des quantités précédées du signe —, ou des quantités négatives. On pourra souvent ainsi réduire plusieurs formules en une seule, et plusieurs opérations du même genre aussi en une seule. On pourra encore réduire le nombre des équations à résoudre pour avoir la solution complète d'un problème. Imaginons que les solutions d'un problème général soient données en partie par une équation et en partie par une autre équation qui ne différerait de la première que par le signe de l'inconnue (*):

(*) Cela arrive dans un grand nombre de problèmes, en particulier dans le problème des courriers, où les solutions sont données, pour un ensemble de cas particuliers, par une certaine équation, et, pour d'autres cas particuliers, par une autre équation qui ne diffère de la première que les solutions négatives de l'une de ces questions étant débarrassées du signe —, satisferont à l'autre, et réciproquement ; de sorte que, si l'on connaît les solutions positives et négatives de l'une, il sera inutile de considérer l'autre, car on connaîtra les solutions positives des deux. Or toutes les transformations que l'on effectuera sur l'une des équations, et qui n'altéreront pas les solutions positives, n'altéreront pas non plus les solutions négatives. Pour le prouver, considérons les deux équations dont on doit chercher les solutions positives, ces équations ne différant l'une de l'autre que par le signe de l'inconnue, il en sera de même de leurs équivalentes obtenues par des transformations analogues ; les solutions négatives de l'une des transformées seront toujours, après la suppression du signe —, les solutions positives de la transformée correspondante, et, par conséquent, les transformations qui n'altèrent pas les solutions positives d'une équation n'altèrent pas non plus les solutions négatives. De là on conclut que, si l'on parvient, par ces transformations, à trouver une formule qui donne la valeur de l'inconnue, cette formule fera aussi bien connaître les valeurs négatives que les valeurs positives de cette inconnue. Ceci sera facilement compris quand on aura résolu quelques équations, car alors on connaîtra quelles sont les transformations dont il est question.

Pour avoir un énoncé abrégé de la proposition précédente, et en même temps plus approprié aux usages que l'on fait des quantités négatives, nous dirons :

Si certaines lettres doivent être regardées comme néga-

---

par le signe de l'inconnue. Cela arrive aussi dans le problème suivant : *Trouver sur une droite les points tels que leurs distances à deux points de cette droite soient, l'une moyenne proportionnelle entre l'autre et la distance de ces derniers.*

tives dans certains polynômes, il en est de même dans les résultats obtenus avec ces polynômes.

Remarque. Avec cette extension que nous donnons à la notation algébrique, et qui consiste à faire représenter à une lettre aussi bien une quantité négative qu'une quantité positive, un terme qui a le signe + ne représente pas toujours une quantité positive, et un terme qui a le signe — n'est pas toujours un terme négatif. Un terme sera dit *positif* ou *négatif*, selon qu'il se réduira à un nombre positif ou négatif, après avoir remplacé les lettres qui y entrent par les valeurs particulières, positives ou négatives, qu'on leur attribue. Du reste, tous les énoncés que nous avons donnés précédemment subsistent, en entendant ainsi les expressions de terme positif, terme négatif (*voir* tome III, pages 318-321).