E. DOULIOT

Troisième solution de la question 201

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 248-250
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__248_1>

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 201

(Voir p. 206 et 208),

PAR M. E. DOULIOT,

Externe du lycée Monge, classe de M. Vincent.

1. *Lemme*. Étant donné un parallélogramme ABDE, si par un point C, pris sur la diagonale DA, ou sur son prolongement, on mène une droite qui coupe en N et T les côtés adjacents AB, DB, et en N′ et T′ les côtés EA, ED, on aura

$$CN.CT = CN'.CT' \qquad (\textit{fig. } 17, \textit{ Pl. II});$$

et réciproquement, si sur la transversale II′ l'on a

$$CN.CT = CN'.CT',$$

le point C est sur la diagonale.

Démonstration. Les deux triangles ACN, DCT′ étant semblables, on a

$$CN : CT' :: CA : CD$$

De même, les deux triangles ACN', DCT étant semblables, on a

$$CN' : CT :: CA : CD ;$$

donc

$$CN.CT = CN'.CT'.$$

Remarque. Le point C sera toujours compris entre deux nombres pairs de points d'intersections; ceci est évident, quand le point C est intérieur au parallélogramme. Si le point C est extérieur, en faisant tourner la droite autour du point C, de manière à éloigner le point T', on voit que dès qu'elle sera parallèle à DE elle le sera aussi AB; elle ne peut donc pas rencontrer une de ces droites dans le sens de CT, et l'autre dans le sens de CT'. Donc le point C sera en dehors des quatre points d'intersections, ou il en aura deux de chaque côté.

La réciproque se démontre par la réduction à l'absurde.

2. Théorème. (*Fig.* 18, *Pl. II.*) *Soient* P, P' *deux points appartenant respectivement à deux ellipses homofocales, tels, que les tangentes menées à ces courbes en* P *et* P' *se coupent à angle droit; en désignant par* I *le point de leur intersection, et par* C *le centre commun des ellipses, la droite* CI *divisera en deux parties égales la distance* PP'.

Strebor.

Démonstration. Je mène les normales PK, P'K; la figure PKP'I est un rectangle, et le théorème sera démontré si l'on prouve que le point C est sur la diagonale IK. Soient N, N', T, T' les points où les normales et les tangentes rencontrent l'axe, on a

$$C^2 = CN.CT \quad \text{et} \quad C^2 = CN'.CT';$$

donc

$$CN.CT = CN'.CT'.$$

Donc, en vertu du lemme, le point C est sur la diagonale.

Comme on s'est appuyé sur une propriété commune à l'ellipse et à l'hyperbole, et dans laquelle les tangentes et les normales entrent d'une manière symétrique, on voit que le théorème est applicable à deux coniques homofocales quelconques.