NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

De la plus courte distance de deux droites ; application aux surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 236-242

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__236_2>

DE LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES; APPLICATION AUX SURFACES;

PAR M. LEBESGUE.

1. On prend ordinairement pour équations des deux droites dont on cherche la plus courte distance

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta; \quad x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta';$$

le calcul perd sa symétrie et se trouve, en réalité, tout aussi long que si l'on eût pris les équations

$$(1)\qquad \frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}=\rho,$$

$$(2)\qquad \frac{x-\alpha'}{a'}=\frac{y-\beta'}{b'}=\frac{z-\gamma'}{c'}=\rho'.$$

Menons, en effet, par l'origine une droite

$$(3)\qquad \frac{x}{a_1}=\frac{y}{b_1}=\frac{z}{c_1};$$

elle sera perpendiculaire aux droites (1), (2) si l'on a les équations

$$a_1 a + b_1 b + c_1 c = 0,\quad a_1 a' + b_1 b' + c_1 c' = 0:$$

d'où

$$\frac{a_1}{bc'-b'c}=\frac{b_1}{ca'-c'a}=\frac{c_1}{ab'-a'b}:$$

et comme on peut remplacer dans (3) a_1, b_1, c_1 par des quantités proportionnelles, on fera

$$(4)\qquad a_1 = bc'-b'c,\quad b_1 = ca'-c'a,\quad c_1 = ab'-a'b.$$

Pour avoir maintenant l'équation d'une parallèle à la droite (3) et qui coupe les droites (1) et (2), on fera passer par la droite (2), et la droite $\frac{x-x'}{a_1}=\frac{y-\beta'}{b_1}=\frac{z-\gamma'}{c_1}=\rho''$ qui coupe (2) et est parallèle à (3), un plan

$$(5)\qquad A(x-\alpha')+B(y-\beta')+C(z-\gamma')=0,$$

de sorte que A, B, C, ou des quantités proportionnelles, seront déterminées par les équations

$$Aa'+Bb'+Cc'=0,\quad Aa_1+Bb_1+Cc_1=0;$$

d'où l'on tire

$$A=b'c_1-c'b_1,\quad B=c'a_1-a'c_1,\quad C=a'b_1-b'a_1.$$

Comme l'équation (5) peut prendre la forme

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(x-\alpha)+\mathrm{B}(y-\beta)+\mathrm{C}(z-\gamma)\\ &=\mathrm{A}(\alpha'-\alpha)+\mathrm{B}(\beta'-\beta)+\mathrm{C}(\gamma'-\gamma) \end{aligned}$$

en vertu des équations (1), l'on aura

$$x-\alpha=\rho a,\quad y-\beta=\rho b,\quad z-\gamma=\rho c;$$

de là, par l'équation précédente,

$$(6)\qquad \rho=\frac{\mathrm{A}(\alpha'-\alpha)+\mathrm{B}(\beta'-\beta)+\mathrm{C}(\gamma'-\gamma)}{\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}c}=\frac{\mathrm{A}(\alpha'-\alpha)+\mathrm{B}(\beta'-\beta)+\mathrm{C}(\gamma'-\gamma)}{a_1^2+b_1^2+c_1^2},$$

et, par suite,

$$(7)\qquad x=\alpha+\rho a,\quad y=\beta+\rho b,\quad z=\gamma+\rho c$$

pour les coordonnées du point de rencontre de la droite (1) avec la droite perpendiculaire aux droites (1) et (2).

Si l'on faisait passer un plan

$$\mathrm{A}_1(x-\alpha)+\mathrm{B}_1(y-\beta)+\mathrm{C}_1(z-\gamma)=0$$

par la droite (1) et la droite

$$\frac{x-\alpha}{a_1}=\frac{y-\beta}{b_1}=\frac{z-\gamma}{c_1},$$

on trouverait semblablement

$$\mathrm{A}_1=bc_1-cb_1,\quad \mathrm{B}_1=ca_1-ac_1,\quad \mathrm{C}_1=ab_1-ba_1;$$

d'où

$$(8)\qquad \rho'=\frac{\mathrm{A}_1(\alpha-\alpha')+\mathrm{B}_1(\beta-\beta')+\mathrm{C}_1(\gamma-\gamma')}{\mathrm{A}_1a'+\mathrm{B}_1b'+\mathrm{C}_1c'}=\frac{\mathrm{A}_1(\alpha'-\alpha)+\mathrm{B}_1(\beta'-\beta)+\mathrm{C}_1(\gamma'-\gamma)}{a_1^2+b_1^2+c_1^2},$$

et, par suite, pour les coordonnées x', y', z' du point de rencontre de la droite (2) avec la perpendiculaire commune aux droites (1) et (2)

(9) $\quad x' = \alpha' + \rho' a', \quad y' = \beta' + \rho' b', \quad z' = \gamma' + \rho' c'.$

La plus courte distance δ des deux droites sera donnée par l'équation

$$\delta^2 = (\alpha' - \alpha + \rho' a' - \rho a)^2 + (\beta' - \beta + \rho' b' - \rho b)^2 + (\gamma' - \gamma + \rho' c' - \rho c)^2.$$

Or la substitution donne

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha + \rho' a' - \rho a &= a_1 [a_1(\alpha' - \alpha) + b_1(\beta' - \beta) + c_1(\gamma' - \gamma)],\\
\beta' - \beta + \rho' b' - \rho b &= b_1 [\quad id. \qquad id. \quad],\\
\gamma' - \gamma + \rho' c' - \rho c &= c_1 [\quad id. \qquad id. \quad];
\end{aligned}$$

de là

(10) $$\pm \delta = \frac{(\alpha' - \alpha) a_1 + (\beta' - \beta) b_1 + (\gamma' - \gamma) c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

2. Si les points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont infiniment voisins et que les coefficients a, b, c diffèrent infiniment peu des coefficients a', b', c', de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha + d\alpha + \frac{d^2\alpha}{2} + \ldots & a' &= a + da + \frac{d^2 a}{2} + \ldots,\\
\beta' &= \beta + d\beta + \frac{d^2\beta}{2} + \ldots & b' &= b + db + \frac{d^2 b}{2} + \ldots,\\
\gamma' &= \gamma + d\gamma + \frac{d^2\gamma}{2} + \ldots & c' &= c + dc + \frac{d^2 c}{2} + \ldots;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
a_1 &= (bdc - cdb) + \tfrac{1}{2}(bd^2c - cd^2b) + \ldots,\\
b_1 &= (cda - adc) + \tfrac{1}{2}(cd^2a - ad^2c) + \ldots,\\
c_1 &= (adb - bda) + \tfrac{1}{2}(ad^2b - bd^2a) + \ldots.
\end{aligned}$$

le numérateur de δ deviendra

$$d\alpha(bdc - cdb) + d\beta(cda - adc) + d\gamma(adb - bda),$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} d\alpha(bd^2c - cd^2b) + d\beta(cd^2a - ad^2c) + d\gamma(ad^2b - bd^2a) \\ d^2\alpha(bdc - cdb) + d^2\beta(cda - adc) + d^2\gamma(adb - bda)\end{array}\right],$$

+ des termes infiniment petits du quatrième ordre.

Or le dénominateur de δ est un infiniment petit du premier ordre; il suit de là que δ sera aussi un infiniment petit du premier ordre.

Mais s'il arrive que l'on ait

$$(A)\quad d\alpha(bdc - cdb) + d\beta(cda - adc) + d\gamma(adb - bda) = 0,$$

le numérateur de δ perdra de plus les termes du troisième ordre, qui ne sont autres que la moitié de la différentielle de

$$d\alpha(bdc - cdb) + d\beta(cda - adc) + d\gamma(adb - bda).$$

Dans ce cas, δ est au plus un infiniment petit du troisième ordre: quand cela arrive, on dit, pour abréger, que les deux droites se rencontrent.

Ainsi l'équation (A) exprime que les deux droites infiniment voisines

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}, \quad \frac{x-\alpha'}{a'} = \frac{y-\beta'}{b'} = \frac{z-\gamma'}{c'}$$

se rencontrent.

3. *Application.* Soit une surface d'équation

$$(a)\qquad F(x,\ y,\ z) = 0,$$

l'équation différentielle étant

$$(b)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

La normale, au point x, y, z de la surface, aura pour équations

$$\frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z}.$$

Pour que cette normale soit rencontrée par celle qui est menée par le point $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, comme X, Y, Z deviennent $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, la condition de rencontre sera

$$(c)\qquad \begin{aligned} &dx(YdZ - ZdY) + dy(ZdX - XdZ) \\ &+ dz(XdY - YdX) = 0. \end{aligned}$$

Les équations (a), (b), (c) déterminent les lignes que Monge a nommées *lignes de courbure*.

Pour avoir l'équation telle qu'il l'a donnée, on posera

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0;$$

de là

$$X = \frac{df}{dx} = p, \quad Y = \frac{df}{dy} = q, \quad Z = -1,$$

$$dX = r\,dx + s\,dy, \quad dY = s\,dx + t\,dy, \quad dZ = 0:$$

la substitution donne

$$s\,dx^2 - s\,dy^2 + (pt - qs)\,dy\,dz + (ps - qr)\,dz\,dx + (t - r)\,dx\,dy = 0$$

Si l'on remplace dz par $p\,dx + q\,dy$, on trouvera, en changeant tous les signes,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [s(1 + q^2) - pqt] + [r(1 + q^2) - t(1 + p^2)] \left(\frac{dy}{dx}\right) - [s(1 + p^2) - pqr] = 0:$$

c'est l'équation ordinaire.

L'équation (c) est très-commode pour la détermination des propriétés des lignes de courbure. Ce sera l'objet d'un Mémoire particulier: la présente Note a seulement pour but de faire connaître l'équation (c) qui semble, par sa symétrie, devoir passer dans les éléments, qu'elle soit d'ailleurs nouvelle ou non, ce que j'ignore.

4. I. La remarque qui termine le n° 2 est de M. Bouquet (*voir* la note 3^e du *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Duhamel).

II. Si la droite qui passe par les points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ fait, avec les axes, des angles λ, μ, ν, et que la perpendiculaire commune aux deux droites fasse, avec les mêmes axes, des angles λ', μ', ν';

si, de plus, on pose

$$R = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\gamma' - \gamma)^2},$$

on aura

$$\alpha' - \alpha = R\cos\lambda,$$
$$\beta' - \beta = R\cos\mu,$$
$$\gamma' - \gamma = R\cos\nu.$$

et la formule (10) se réduira à

$$\pm\delta = R(\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu') = R\cos U,$$

en appelant U l'angle de la perpendiculaire commune et de la droite qui passe par les points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$.

On aurait donc pu partir de la formule évidente

$$\pm\delta = R\cos U$$

pour trouver l'équation (10)