Questions d'examen d'admission à l'École polytechnique en 1848

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 220-226
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__220_1>

QUESTIONS D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1848.

1. Étant donné un rectangle, déterminer une ligne telle, que, si on la prend pour unité linéaire et son carré pour unité de surface, le nombre qui exprime la surface du rectangle soit égal au nombre qui en exprime le périmètre.

2. Dans tout système de numération, les carrés des nombres à égale distance de o et de la base sont terminés par le même chiffre : donc il n'existe pas de système de numération dans lequel les carrés des nombres puissent être terminés par tous les chiffres du système.

3. On donne sur une circonférence deux points fixes A et B, et un arc PQ de longueur constante, mais dont les extrémités P, Q se déplacent sur la circonférence; trouver le lieu des rencontres des droites AP et BQ (évidemment deux cercles ; preuve par l'analyse).

4. Calculer le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête. Calculer son angle dièdre. Pourquoi est-il indépendant de l'arête? (*Voir* Merlieux, t. I, p. 471.)

5. Deux quadrilatères sont semblables quand ils ont un angle égal et les côtés proportionnels. Déterminer la surface d'un quadrilatère en fonction d'un angle et de ses côtés (*voir* t. VII, p. 348).

6. On donne un point et une droite, trouver le lieu des centres des cercles passant par le point donné et interceptant sur la droite une corde de longueur donnée.

7. On peut réduire le système de plusieurs forces à deux, de plusieurs manières. Si l'on se donne la direction de l'une des deux, le problème est-il encore indéterminé, est-il toujours possible? (Même question, en donnant l'axe du couple résultant.)

8. Résoudre $\sin x \cdot \sin(x+\alpha) = k$. Quelle relation existe-t-il entre deux racines de cette équation?

9. Construire $xy^2 - yx^2 = 1$ (trois asymptotes et un diamètre passant par l'origine).

10. Toute courbe algébrique qui a un diamètre et une asymptote a une autre asymptote (*voir* Vannson, t. II, p. 398).

11. $y = -x + \sqrt[3]{x^3 + x}$. Déterminer les asymptotes, le coefficient angulaire de la tangente; la courbe a-t-elle un centre? (Asymptote unique.)

12. Peut-on abaisser le degré de $f(x) = 0$, quand on sait que le rapport de deux racines est égal au produit de deux autres?

13. On a un angle droit YOX, une droite AB et une parabole dont l'axe est parallèle à OY, et dont la concavité est tournée vers le bas. Un mobile de masse m se meut d'un mouvement uniforme sur AB, un autre de masse m' se meut sur la parabole, de manière que sa projection sur l'axe des x se meuve d'un mouvement uniforme; trouver le lieu des centres de gravité de ces deux mobiles. Démontrer que sa projection sur l'axe des x a un mouvement uniforme (*voir* t. VII, p. 319).

14. Trouver dans l'hyperbole deux diamètres conjugués de moindre différence.

15. Si deux pyramides triangulaires avaient un angle trièdre symétrique, seraient-elles entre elles comme les produits des trois arêtes de cet angle?

16. On projette un point d'une hyperbole équilatère sur les hypoténuses de triangles rectangles inscrits dans cette hyperbole et ayant ce point pour sommet commun: trouver le lieu des projections.

17. Si deux triangles ABC, abc donnent les rapports égaux, $\text{ABC} : abc :: \overline{\text{AB}}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{\text{AC}}^2 : \overline{ac}^2$, sont-ils semblables?

18. Calculer à 0,1 près $x = \sqrt{17 + 2\sqrt{15}}$ (*voir* Guilmin, t. I). Démontrer que, pour avoir à 0,1 près la racine d'une expression fractionnaire, il suffit d'extraire à 0,1 près la racine de la partie entière.

19. Aux extrémités M, N d'une corde MN normale à la parabole on mène des tangentes MP, NP; trouver le lieu des milieux de PM.

20. $x^3+px^2+qr+r=0$. Former l'équation $\varphi(y)=0$ dont les racines soient liées aux racines a, b, c de la première par la relation $y=\dfrac{c}{a+b-c}$.

21. Démontrer que $\dfrac{\sqrt[3]{7}-1}{2\sqrt[2]{7}+1}$ est incommensurable.

22. Construire $\rho=1+\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$ (*voir* Rispal, t. II, p. 511).

23. Connaissant les traces d'un plan sur deux plans de projection, trouver sa trace sur un nouveau plan vertical?

24. Chercher si la condition d'inscriptibilité du pentagone dépend seulement, comme celle du quadrilatère, de la grandeur des angles. Trois des angles étant donnés, peut-on déterminer les deux autres?

25. Deux mobiles se meuvent sur deux droites données, l'un vers la droite, l'autre vers la gauche; on demande le lieu des intersections successives des droites qui les joignent (*voir* t. VI, p. 401).

26. Un arc de section conique étant donné, trouver à quelle courbe il appartient.

27. Construire, avec la règle et le compas, les angles x et y déterminés par les équations

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{n},\qquad x+y=\alpha.$$

28. Trouver les diviseurs du troisième degré de la

forme $x^3 + px^2 + qx + r$ d'une équation du sixième degré. L'équation à laquelle on arrive peut-elle s'abaisser? (*Voir* Durville, t. IV, p. 339 et 439.)

29. Quelle serait l'expression de la surface d'un fuseau, si l'on prenait le carré du rayon pour unité de surface?

30. Trouver le lieu des pôles de tous les cercles d'une sphère passant par deux points fixes.

31. A est le sommet d'une parabole, P est un point de son axe : une ellipse est-elle déterminée par la condition d'avoir AP pour un de ses axes et d'avoir un double contact avec la parabole; et si l'on donne le point de contact R, le problème est-il possible et déterminé?

32. Si deux triangles sphériques ont les angles égaux et les côtés proportionnels, ils doivent être sur des sphères de rayons différents, et leurs surfaces sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

33. Équation de la corde de contact des tangentes menées du point (x', y') à la conique

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

34. Peut-il exister dans le plan de deux courbes un point qui ait la même corde de contact dans les deux cercles?

35. Plus courte distance de deux droites dont les projections horizontales sont parallèles.

36. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ représente des ellipses où b est variable; d'un point α, β on mène des tangentes à toutes ces ellipses, trouver le lieu de leurs points de contact.

37. Si α, β, γ sont racines de $f(x) = 0$, démontrer que

$$f'(\alpha) f'(\beta) f'(\gamma) \ldots f'(\lambda) = k(\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \gamma)^2 \ldots$$

38. Calculer le logarithme de 2 à $\frac{1}{n}$ près, base 10 (*voir* Guilmin, t. V, p. 429).

39. Lieu des points de rencontre des droites divisant un trapèze en parties égales. Le trouver géométriquement.

40. Trouver la somme des carrés des n premiers nombres naturels; son expression est toujours un nombre entier.

41. Construire $x^6 + x^3y = y^3$; transformer en équation polaire.

42. Lieu des centres des ellipses tangentes à deux droites données et ayant un foyer commun (une droite).

43. Construire avec la règle et le compas un carré équivalent à un décagone régulier donné, ou réciproquement.

44. Étant donné un quadrilatère, on en construit un autre dont les côtés sont parallèles à ceux du premier et équidistants; quelle doit être cette distance pour que le rapport des rectangles soit un nombre donné?

45. Ramener l'équation de la parabole à la forme

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a.$$

46. Quand un cercle coupe une conique en quatre points, les bissectrices des angles des droites qui joignent ces points deux à deux sont parallèles aux axes de la courbe.

47. Quand une courbe a deux diamètres, elle en a au moins trois.

48. Si une équation $f(x) = 0$ a une racine commune avec $x^3 - 10 = 0$, $f(x)$ est divisible par $x^3 - 10$ (*voir* Wantzel, t. IV, p. 57).

49. Deux courriers parcourent, avec des vitesses données, deux droites AB, A′B′; quand leur distance sera-t-elle minimum (*voir* t. VI, p. 401)?

50. Si le système métrique était perdu et qu'on vînt à trouver dans une fouille un parallélipipède rectangle sur

lequel serait écrit *poids, p kilogrammes,* pourrait-on en déduire la longueur du mètre et le système métrique?

Nota. Ces questions, calquées sur le programme, quoique faites par des hommes d'un mérite incontestable, reflètent l'état sénile de notre enseignement universitaire : rien sur les transversales; rien sur les rapports projectifs, harmoniques, anharmoniques, involutifs; rien sur les méthodes métamorphiques, polarité réciproque, perspectives, homologiques, homographiques, etc.; rien sur l'*homofocalité,* désormais si utile en physique; rien sur le calcul infinitésimal; une timide question sur les polaires déguisées en cordes de contact. Conséquences déplorables d'un programme suranné (*).