NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TILLOT

Question d'examen. Équation de l'hyperboloïde de révolution à une nappe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 149-150

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__149_1>

QUESTION D'EXAMEN. ÉQUATION DE L'HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE (*);

Par M. TILLOT,
Professeur de mathématiques à Castres

Trouver la surface décrite par une droite assujettie à rester à une même distance d'une droite fixe, avec laquelle elle forme un angle constant.

Solution. Prenons la droite fixe pour axe des z, et pour plan des xy celui que décrit la plus courte distance entre la droite fixe et la droite mobile. Soient θ l'angle constant et r la plus courte distance donnée; soient

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations de la droite mobile.

(*) MM. Bertrand et Hermite examinateurs.

Faisant $z = 0$, on obtient

(2) $$\alpha^2 + \beta^2 = r^2.$$

La projection de la droite mobile sur le plan xy étant tangente au cercle de la plus courte distance a pour équation

(3) $$\beta y + \alpha x = r^2.$$

et l'on a

(4) $$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Il faut donc éliminer les quatre quantités variables a, b, α, β entre les cinq équations (1), (2), (3), (4).

L'équation (2) devient

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2,$$

et l'équation (3) devient

$$y(y - bz) + x(x - az) = r^2,$$

d'où

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tang}^2 \theta = r^2$$

Remplaçant θ par $\pi - \theta$, l'équation ne change pas, ce qui indique une deuxième génération de la surface par une droite; et si l'on mène par l'axe des z un plan quelconque, la section est une hyperbole, toujours la même, ce qui donne une troisième génération de la surface par une hyperbole tournante.

Nota. Un problème intéressant est celui-ci : *Étant donnée l'équation générale d'une surface du second degré, axes obliques, à quels caractères peut-on reconnaître que la surface est un hyperboloïde de révolution à une nappe?* Le cas général a été traité par M. Bourdon, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II, p. 187 et 250; 1813.