TERQUEM

Théorèmes et problèmes élémentaires sur le foyer et la directrice de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 121-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__121_0>

THÉORÈMES ET PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES SUR LE FOYER ET LA DIRECTRICE DE LA PARABOLE.

Remarque. Nous mettrons ici quelques théorèmes qu'on trouve partout, uniquement pour compléter ce travail.

PROBLÈME I. *Étant donnés deux points et le foyer d'une parabole, trouver une équation de cette conique.*

Solution. Soient A, B, F les deux points et le foyer donnés, prenons ce foyer pour origine; soient y', x', y'', x'' les coordonnés des points A et B, les axes étant rectangulaires: l'équation de la courbe est

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2) = (k'y + kx - l)^2 \text{ (\textit{voir} t. II, p. 427).}$$

Faisons

$$x'^2 + y'^2 = r'^2, \quad x''^2 + y''^2 = r''^2.$$

Faisons, de plus, $\frac{k}{k'} = v$; nous aurons

$$(1) \qquad y' + vx' - \frac{l}{k'} = r'\sqrt{1 + v^2},$$

$$(2) \qquad y'' + vx'' - \frac{l}{k'} = r''\sqrt{1 + v^2}.$$

Retranchant membre à membre et faisant disparaître le radical, nous obtiendrons

$$v^2[(x' - x'')^2 - (r' - r'')^2] + 2v(y' - y'')(x' - x'') = (r' - r'')^2(y' - y'')^2;$$

d'où

$$v[(r' - r'')^2 - (x' - x'')^2] = (x' - x'')(y' - y'') \pm (r' - r'')\sqrt{2(v'v'' - x'x'' - y'y'')}.$$

1re *Observation.* Lorsque l'angle AFB est aigu, on peut toujours prendre les axes de manière que les quatre coordonnées des deux points soient positives; par conséquent, r' et r'' doivent être de même signe. Donc v n'a que deux valeurs toujours réelles, car $v'v'' > x'x'' + y'y''$, et de même $\frac{l}{k'}$; on parvient au même résultat lorsque l'angle AFB n'est pas aigu.

2e *Observation*. Si l'on prend FA pour axe des x, les valeurs de v seront données en parties du triangle FAB.

3e *Observation*. La solution géométrique revient à mener des tangentes communes aux deux cercles décrits des points A et B comme centres, avec les rayons FA et FB; les deux cercles se coupant au point F, il n'y a que deux tangentes, lesquelles sont les directrices des deux paraboles qui répondent à la question.

4e *Observation*. Lorsque les deux points et le foyer sont sur la même droite, la parabole se réduit à cette droite, et la directrice, perpendiculaire à cette droite, passe par le foyer. Les points de la droite sont alors à égale distance du foyer et de la directrice; ce qui caractérise la parabole.

Problème II. *Étant donnés le foyer et un point d'une parabole, trouver 1° le lieu du sommet; 2° l'enveloppe de la directrice.*

Solution. Conservons la même notation. L'équation de la directrice est $y + vx - \frac{l}{k'} = 0$; l'équation de l'axe principal est $vy - x = 0$. Éliminant v entre ces deux équations, après avoir remplacé $\frac{l}{k'}$ par sa valeur tirée de l'équation (1), on a pour le lieu du point où l'axe rencontre la directrice, l'équation

$$(y^2 + x^2 - yy' + xx')^2 = r'^2 (y^2 + x^2),$$

équation d'une *aplanétique* (tome IX, page 426). C'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du cercle $(y-y')^2+(x-x')^2=\nu^2$ sur les tangentes à ce cercle. C'est aussi une épicycloïde (*v.* t. III, p. 124). L'origine est un point conjugué à la courbe, comme cela doit être; ce point disparaît. En passant aux coordonnées polaires, on a

$$z\cos 2\varphi - y'\sin\varphi + x'\cos\varphi = \pm \nu',$$

équation d'une courbe facile à construire. Il est évident que le lieu du sommet est une courbe semblable à celle-ci, de dimension moitié moindre et semblablement située relativement au foyer.

Directrice. Éliminant $\frac{l}{k'}$ de l'équation de la directrice, on obtient

$$(a) \qquad [y-y'+\nu(x-x')]^2 = r'^2(1+\nu^2);$$

prenant la dérivée relativement à ν, on a

$$(b) \qquad [y-y'+\nu(x-x')](x-x') = \nu r'^2;$$

d'où

$$\nu = \frac{(y-y')(x-x')}{r'^2-(x-x')^2}.$$

Élevant l'équation (b) au carré et combinant cette nouvelle équation avec l'équation (a), on déduit

$$\nu^2 = \frac{(x-x')}{r'^2-(x-x')^2}, \qquad 1+\nu^2 = \frac{r'^2}{r'^2-(x-x')^2};$$

substituant ces diverses valeurs dans l'équation (a), on obtient

$$(y-y')^2+(x-x')^2 = r'^2.$$

L'enveloppe des directrices est donc le cercle décrit du point donné comme centre avec un rayon égal à r'.

Observation. Nous donnons ce calcul comme exercice, car les résultats sont intuitifs et s'obtiennent immédiatement.

Problème III. *Étant donnés le foyer, un point d'une parabole et une droite tangente, trouver une équation de cette conique.*

Solution. Même notation que ci-dessus, et de plus $dy + ex + f = 0$ l'équation donnée de la tangente; on a la relation

$$\frac{l}{k'}(d^2 + e^2) + 2f(d + ve) = 0 \text{ (t. II, p. 108)}.$$

Cette équation et l'équation (1) font connaître, par des équations du second degré, les valeurs de v et de $\frac{l}{k'}$ qui déterminent l'équation de la courbe.

Observation. On peut choisir les axes de telle sorte qu'on ait $e = 0$: l'on trouve alors $\frac{l}{k'} = -\frac{2f}{d}$; c'est l'ordonnée du point où la directrice rencontre l'axe des y, c'est-à-dire la parallèle à la tangente menée par le foyer, ordonnée qui est double de l'ordonnée $-\frac{f}{d}$ du point où la tangente rencontre l'axe des y. Substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$y' + vx' + \frac{2f}{d} = r'\sqrt{1 + v^2},$$

résultats auxquels on peut parvenir immédiatement.

Problème IV. *Étant donnés le foyer et une tangente, trouver l'enveloppe de la directrice et le lieu du sommet.*

Solution. Abaissant du foyer une perpendiculaire sur la tangente, le pied de la perpendiculaire est le point enveloppe des tangentes au sommet; donc le lieu du sommet est une circonférence décrite sur la perpendiculaire comme diamètre. Prolongeant la perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même, on obtient le point enveloppe des directrices.

Problème V. *Étant donnés le foyer et deux tangentes, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Conservons mêmes axes, même origine, même notation qu'au problème I. L'équation de la courbe est

$$(y^2 + x^2)(1 + v^2) = \left(y + vx - \frac{l}{k'}\right)^2.$$

Soient $dy + ex + f = 0$, $d'y + e'x + f' = 0$ les équations des deux tangentes; on a donc les deux relations

$$\frac{l}{k'}(d^2 + e^2) + 2f(d + ve) = 0,$$

$$\frac{l}{k'}(d'^2 + e'^2) + 2f'(d' + ve') = 0;$$

ces deux équations du premier degré entre v et $\frac{l}{k'}$ donnent les valeurs de ces inconnues : il n'y a donc qu'une solution.

Solution géométrique. Du foyer on abaisse une perpendiculaire sur une tangente, on la prolonge doublée, ce qui donne un point de la directrice; l'autre tangente donne un second point.

Problème VI. *Étant donnés le foyer, une tangente et le point de contact, trouver une équation de la courbe.*

Solution. En prenant les mêmes notations, soient x', y' les coordonnées du point de contact; on a les deux équations

$$v^2y'^2 + 2x'v\frac{l}{k'} + \frac{l^2}{k'^2} - 2x'y'v + 2y'\frac{l}{k'} = 0,$$

$$\frac{l}{k'}(d^2 + e^2) + 2f(d + ve) = 0,$$

qui donnent deux valeurs pour les inconnues $\frac{l}{k'}$ et v; on peut choisir les axes de manière qu'on ait $e = 0$, ce qui abrége le calcul.

Solution géométrique. La solution géométrique ne présente aucune difficulté.

Problème VII. *Étant donnés trois points et la direction de l'axe, trouver l'équation de la courbe.*

Solution. Prenons le point A pour origine, le diamètre qui y passe pour axe des x, et les axes rectangulaires. Soient x', y', x'', y'' les coordonnées des deux autres points; l'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 + Dy + Ex = 0.$$

On détermine D et E au moyen des deux équations du premier degré

$$Dy' + Ex' = -y'', \quad Dy'' + Ex' = -y''^2,$$

lesquelles donnent

$$D(y'x'' - x'y'') = x'y''^2 - x''y'^2,$$
$$E(y'x'' - x'y'') = y''x'^2 - y'x''^2$$

On a

$$k = 2E, \quad k' = 0, \quad l = D^2, \quad l' = E^2, \quad L = E^2, \quad N = 1;$$

donc α et β étant les coordonnées du foyer, on a

$\alpha = \frac{D^2 - E^2}{4E}$, $\beta = -\frac{D}{2}$ (t. II, p. 432) et pour le sommet,

$$\alpha' = \frac{D^2}{4E}, \quad \beta' = -\frac{D}{2},$$

$$4Ex + D^2 - E^2 = 0, \text{ équation de la directrice.}$$

La solution géométrique s'obtient en faisant passer le diamètre par le milieu d'une des cordes données.

Problème VIII. *Étant donnés deux points et la direction de l'axe, trouver* 1° *le lieu du foyer;* 2° *le lieu du sommet.*

Solution. Même notation et même système de coordonnées que pour le problème précédent. On a

$$Dy' + Ex' = -y'^2, \quad D = -2\beta,$$
$$E^2 + 4\alpha E = 4\beta^2, \quad Ex' = 2\beta y' - y'^2.$$

Éliminant E, on obtient, pour le lieu du foyer,

$$4\beta^2(y'^2 - x'^2) + 8x'y'\alpha\beta - 4y'^3\beta - 4x'y'^2\alpha + y'^4 = 0,$$

équation d'une hyperbole.

Les coordonnées du centre sont $\frac{1}{2}x'$, $\frac{1}{2}y'$, et les équations des asymptotes sont

$$2\beta - y' = 0,$$
$$2\beta(x'^2 - y'^2) - 4\alpha x'y' + y'(y'^2 + x'^2),$$
$$x'\beta^2 - 2y'\beta\alpha + y'^2\alpha = 0, \text{ hyperbole, lieu du sommet.}$$

Les coordonnées du centre sont $\frac{1}{2}x'$ et $\frac{1}{2}y'$, et les asymptotes sont parallèles aux droites $\beta = 0$, $\beta x' - 2\alpha y' = 0$.

Problème IX. *Étant donnés deux points, une tangente, la direction de l'axe, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Même notation et même système d'axes qu'au problème précédent. Soit $dy + ex + f = 0$ l'équation de la tangente.

On a pour condition de tangence

$$[Ed - De]^2 + 4efE = 0 \quad \text{(t. II, p. 108)}$$

et

$$Dy' + Ex' = -y'^2.$$

Par l'élimination de D, il vient

$$E^2[dy' + ex']^2 + 2Eey'^2[dy' + ex' + 2f] + e^2y'^4 = 0;$$

d'où

$$E[dy' + ex']^2 = -ey'^2\left[dy' + ex' + 2f \pm 2\sqrt{f(dy' + ex' + f)}\right].$$

Problème X. *Étant donnés un point, une tangente et la direction de l'axe, trouver* 1° *le lieu du foyer;* 2° *le lieu du sommet.*

Solution. Prenons le point pour origine, la direction de l'axe pour axe des x, et les coordonnées rectangulaires; l'équation de la parabole est

$$y^2 + Dy + Ex = 0.$$

Même notation qu'au problème précédent; ainsi on a, pour condition du contact,

$$(Ed - De)^2 + 4efF = 0.$$

On a, en outre (*voir* Problème VII),

$$\alpha = \frac{D^2 - E^2}{4E}, \quad \beta = -\frac{D}{2}.$$

Éliminant D et E entre ces trois équations, on obtient une équation du quatrième degré qui se décompose en ces deux autres,

$$\beta^2 = 0, \quad \beta^2(d^2 - e^2)^2 + 4\alpha\beta(d^2 - e^2)de + 4\alpha^2 d^2 e^2 - 8de^2 f\beta - 4e^3 f\alpha - 4e^2 f^2 = 0.$$

Cette dernière représente une parabole dont la direction de l'axe est donnée par l'équation

$$\beta(d^2 - e^2) + 2\alpha de = 0.$$

Lorsque $f = 0$, l'origine devient un point de contact; la parabole se réduit à cette droite, ce qui est évident à priori, et cette droite fait, avec l'axe des x, un angle double de celui que fait la tangente avec cet axe.

Le sommet (voir Problème VII), $D = -2\beta$; $E = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Substituant ces valeurs dans l'équation de contact, et divisant par β^2, on obtient

$$\beta^2 d^2 + 4de\alpha\beta + 4e^2\alpha^2 + 4def = 0,$$

équation d'une parabole.

Problème XI. *Étant données trois tangentes et la direction de l'axe, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Prenons pour origine le point d'intersection de deux de ces tangentes, et pour axe des x, le diamètre qui passe par ce point. Soient

$$dy + ex + f = 0, \quad d'y + e'x = 0, \quad d''y + e''x = 0$$

les équations des trois tangentes, et

$$y^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Les trois conditions de tangence sont exprimées par les équations

(1) $E^2 d^2 - 2deDE + (D^2 - 4F)e^2 + 4feF = 0,$

(2) $E^2 d'^2 - 2d'e'DE + (D^2 - 4F)e'^2 = 0,$

(3) $E^2 d''^2 - 2d''e''DE + (D^2 - 4F)e''^2 = 0.$

Éliminant $D^2 - 4F$ entre (2) et (3), et faisant disparaître le facteur commun $d'e'' - d''e'$, on obtient

(4) $E(d'e'' + d''e') = 2e'e''D.$

Éliminant $D^2 - 4F$ entre (1) et (3), on obtient de même

$$E(d^2e''^2 - d''^2e^2) + 2Dee''[d''e - de''] + 4fee''^2 = 0.$$

Faisons, pour abréger,

$$(de' - d'e)(de'' - d''e) = M;$$

d'où

$DM + 2fe[d'e'' + d''e'] = 0;$

$EM + 4fee'e'' = 0;$

$FM^2 - f^2e^2[d''e' - d'e'']^2 = 0;$

$\left.\begin{array}{l} \alpha M + fe[d'd'' - e'e''] = 0 \\ \beta M + fe(d'e'' + d''e') = 0 \end{array}\right\}$ coordonnées du foyer (*voir* t. II, p. 432);

$Mx + 2fe[d'd'' + e'e''] = 0$, équation de la directrice (*voir* t. II, p. 433).

Observation. Lorsque $d'd'' + e'e'' = 0$, les deux tangentes sont perpendiculaires, et l'équation de la directrice se réduit à $x = 0$, ce qui est évident à priori.
