PAUL SERRET

Solution de la question 156

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 98-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__98_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 156 (1847, p. 394).

PAR M. PAUL SERRET.
(Lycée Monge, classe de M. VINCENT.)

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\omega}{3} \quad \text{(W. Roberts).}$$

Démonstration. L'équation polaire de la lemniscate de Bernoulli est $\rho = a \,.\, \cos^{\frac{1}{2}} 2\omega$.

Soit P la projection orthogonale du centre O de la courbe sur la tangente au point M.

Soit OX l'axe polaire, et posons $\mathrm{OM} = \rho'$; $\mathrm{MOX} = \omega'$; $\mathrm{OP} = \rho$; $\mathrm{POX} = \omega$.

Appelons α l'angle PMO; on sait que l'on aura :

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{\rho'}{\text{dérivée de } \rho'}.$$

Or,

$$\rho' = a\sqrt{\cos 2\omega'} = a\sqrt{1-2\sin^2\omega'};\quad \mathrm{D}.\rho' = \frac{-4a^2\sin\omega'.\cos\omega'}{2a\sqrt{\cos 2\omega'}} =$$

$$= -\frac{a \sin 2\omega'}{\sqrt{\cos 2\omega'}};$$

on aura donc :

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\cos 2\omega'}{\sin 2\omega'} = \frac{1}{\operatorname{tang} 2\omega'}.$$

D'où il suit que l'angle α est le complément de l'angle $2\omega'$;

mais l'angle α est aussi le complément de l'angle POM, donc ang. POM $= 2\omega'$; et de plus $\omega' = \frac{1}{3}\omega$.

Or le triangle rectangle POM donne

$$\rho = \rho' . \cos \text{POM} = \rho' \cos \frac{2}{3}\omega \,; \quad \rho' = a\sqrt{\cos \frac{2\omega}{3}};$$

on a donc

$\rho = a \cos^{\frac{3}{2}} . \frac{2}{3}\omega$, ou bien $\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\omega}{3}$ pour l'équation du lieu cherché, c. q. f. d.