Théorème sur les diagonales des polygones

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 91-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__91_1>

THÉORÈME

sur les diagonales des polygones.

Théorème. Le nombre des points intérieurs d'intersection des diagonales d'un polygone convexe est égal au nombre des sommets pris *quatre à quatre* (*).

Démonstration. Je remarque d'abord que si je savais passer du nombre des points d'intersection formés par un polygone de $m-1$ côtés au nombre des points d'intersection formés par le polygone de m côtés, comme le quadrilatère n'ayant que deux diagonales a un point d'intersection, je pourrais de là m'élever au nombre des points d'intersection formés par un polygone de cinq côtés, puis en six et généraliser la formule pour résoudre le problème proposé. Nous avons donc d'abord un problème auxiliaire à résoudre.

(*) Ce théorème a été énoncé et démontré au lycée Charlemagne, classe de M. Delorme.

Pour cela soit proposé le polygone convexe ABCDEF, fig. 25, de n côtés et désignons par P_n le nombre des points d'intersection. Dans ce polygone menant la diagonale FB, qui sépare le triangle FAB, je nomme A opposé à BF, le sommet extérieur; il restera, le polygone FBCDE de $n-1$ côtés et qui donnera un certain nombre P_{n-1} de points d'intersection. Si je joints AC, je séparerai de même un triangle ABC, où B est sommet extérieur, et il restera un polygone de $n-1$ côtés donnant aussi P_{n-1} intersections, et comme il y a n sommets j'aurai n fois P_{n-1} intersections. Or, si je considère la formule $+ n P_{n-1}$ je remarque facilement que tous les points d'intersection des diagonales du polygone donné s'y trouvent, mais qu'elles s'y trouvent répétées plusieurs fois.

Voyons donc par quoi il faut diviser $n P_{n-1}$. Un point d'intersection est donné par deux diagonales et chaque diagonale par deux sommets; donc un point est donné par quatre sommets. D'après cela, il est facile de voir que ce point se trouvera dans tous les polygones de $n-1$ côtés dont le triangle séparé n'a pas pour sommet extérieur l'un des quatre sommets d'où dépend le point considéré. *Ainsi ce point d'intersection se trouve dans* n—4 *polygones de* n—1 *côtés.* Donc dans la formule $n P_{n-1}$ chaque point est compté $n-4$ fois. Ainsi, nous aurons le nombre des points en divisant $n P_{n-1}$ par $n-4$.

Donc $$P_n = \frac{n P_{n-1}}{n-4}$$

ou bien $$(n-4) P_n = n P_{n-1}$$

et delà
$$\begin{aligned}
(n-5) P_{n-1} &= n-1 P_{n-2} \\
(n-6) P_{n-2} &= n-2 P_{n-3} \\
&\vdots \\
2 P_6 &= 6 P_5 \\
1 P_5 &= 5 P_4
\end{aligned}$$

multipliant par ordre, il vient :

$$1.2\ 3.4\ P_n = n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ P_4;\ \text{mais}\ P_4 = 1$$

donc
$$P_n = \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Observation I. Le nombre des diagonales est

$$\frac{n\,(n-3)}{2} = n'\,;$$

le nombre total des intersections, tant intérieures que hors du polygone, est donc $\frac{n'\,(n'-1)}{2}$; retranchant de ce nombre total le nombre des points d'intersection intérieurs, il reste, réduction faite, pour les points d'intersection extérieurs

$$\frac{n+1.\ n.\ n-3.\ n-4.}{3.\ 4.}$$

Observation II. Les mêmes théorèmes subsistent pour les polygones sphériques.