NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Méthode des homogènes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 5-11
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

MÉTHODE DES HOMOGÈNES.

—

I. Suivant la notation en usage, les coordonnées d'un point sur un plan sont représentées par les lettres x et y, et les coordonnées d'un point dans l'espace, par x, y, z; dans la méthode des *homogènes*, les coordonnées d'un point sur un plan sont représentées par les rapports $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; et celles d'un point dans l'espace, par les rapports $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$; z et u étant des nombres quelconques. Ainsi, pour passer de la notation ordinaire à celle des homogènes, il suffit de remplacer dans les équations x et y par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, ou bien x, y, z par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$; et il suffit de supposer $z=1$ ou $u=1$ pour venir de la nouvelle notation à l'ancienne. L'avantage de cette nouvelle notation est de donner aux résultats une forme *symétrique* et de pouvoir appliquer aux équations les propriétés analytiques des fonctions homogènes. Nous allons donner quelques exemples. C'est dans l'ouvrage de M. Plucker, contenant son système de géométrie analytique (1835), que je trouve les premières applications de cette méthode.

II. *Problème.* Trouver l'équation d'une droite passant par les deux points $\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right)$ et $\left(\frac{x''}{z''}, \frac{y''}{z''}\right)$.

Solution. Soit $dy+ex+fz=0$, l'équation de la droite, on aura

$$dy'+ex'+fz'=0$$
$$dy''+ex''+fz''=0,$$

Il faut éliminer entre ces trois équations les deux rapports $\frac{d}{f}, \frac{e}{f}$; il faut donc, en considérant d, e, f comme trois inconnues, que le *déterminant* soit nul; ainsi on a de suite

$$y[x'z'']+x[y''z']+z[y'x'']=0.$$

Les crochets indiquent le binôme alterné ou le déterminant (*) de deux lettres, le terme entre crochets étant positif; si l'on fait $z=z'=z''=1$, on trouve la forme non symétrique ordinaire.

III. *Problème.* Trouver l'équation d'un plan passant par les trois points $\left(\frac{x'}{u'}, \frac{y'}{u'}, \frac{z'}{u'}\right)$, $\left(\frac{x''}{u''}, \frac{y''}{u''}, \frac{z''}{u''}\right)$, $\left(\frac{x'''}{u'''}, \frac{y'''}{u'''}, \frac{z'''}{u'''}\right)$.

Solution. Soit l'équation du plan $dx+ey+fz+gu=0$; remplaçant successivement x, y, z, u par x', y', z', u'; x'', y'', z'', u'', on obtient trois autres équations. Entre ces quatre équations, il faut éliminer les trois rapports $\frac{d}{g}, \frac{e}{g}, \frac{f}{g}$. Ces quatre dernières quantités étant considérées comme des inconnues, il faut que le déterminant soit nul; on a donc

$$x[y'z''u''']+y[x'''z'u'']+z[x''y'''u']+u[x'y''z''']=0.$$

Les crochets indiquant le déterminant de trois lettres,

(*) C'est ainsi qu'on désigne aujourd'hui les *fonctions cramériennes*, nom que, selon toute justice, devraient porter ces fonctions, les plus remarquables qu'on rencontre dans l'analyse.

renferment par conséquent six termes; celui qui est entre les crochets étant positif, les signes des autres sont complétement déterminés.

IV. *Théorème*. Soit une fonction *algébrique*, *entière*, *homogène*, de degré m, de n variables, $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$; si l'on multiplie par x_1 la dérivée de cette fonction prise par rapport à x_1; puis par x_2, la dérivée de la même fonction prise par rapport à x_2, et ainsi des autres variables; la somme de tous ces produits est *identiquement* égale à m fois la fonction.

Démonstration. Soit $Ax_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_n^r = M$, un des termes de cette fonction; on a, d'après la définition de l'homogénéité, $a+b+c \ldots\ldots r = m$; A étant un coefficient constant, et a, b, c, r, des exposants entiers positifs, pouvant avoir toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à m; opérant sur ce monôme comme il est énoncé dans le théorème, on a pour résultat mM; donc le théorème subsiste pour l'ensemble des termes.

Observation 1. Le même théorème subsiste encore pour des fonctions algébriques fractionnaires homogènes. En effet, soit F une fonction homogène entière de degré m, de n variables $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$; et f une fonction entière de degré m', des mêmes variables; la fonction fractionnaire $\frac{F}{f}$ est de degré $m-m'$; la dérivée par rapport à x_1, multipliée par x_1; donne

$$\frac{x_1\left[f\dfrac{dF}{dx_1} - F\dfrac{df}{dx_1}\right]}{f^2};$$

de même pour $x_2, x_3 \ldots\ldots$ etc.

Réunissant tous ces résultats, on obtient $(m-m')\frac{F}{f}$.

Observation 2. Le théorème s'applique aussi aux fonctions homogènes irrationnelles.

V. ***Problème.*** **Soit X une fonction algébrique homogène de degré m, de n variables $x_1, x_2 \ldots\ldots x_4$; et soit chacune de ces variables une fonction linéaire de cette forme**

$$x_k = a_k x + b_k y + c_k z,$$

a_k, b_k, c_k, étant des constantes données pour chaque variable; et $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, les coordonnées du point d'un plan ; alors $X = 0$ (1) est l'équation d'une ligne de degré m; trouver l'équation de la tangente à cette ligne, menée par le point $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ située sur la ligne.

Solution. On a l'identité

$$x_1 \frac{dX}{dx'} + x_2 \frac{dX}{dx_2} + \ldots . x_n \frac{dX}{dx_n} = mX = 0. \qquad (2)$$

Représentons par X_1, $X_2 \ldots\ldots X_n$ les valeurs que prennent les dérivées $\frac{dX}{dx_1}$, $\frac{dX}{dx_2} \ldots\ldots$ au point donné et écrivons l'équation

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + \ldots\ldots X_n x_n = 0\,; \qquad (3)$$

C'est l'équation cherchée de la tangente. En effet, $x_1, x_2, \ldots x_n$ étant des fonctions linéaires, cette équation est celle d'une droite. Si l'on donne aux variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ les valeurs qui conviennent au point donné, l'équation (3) rentre dans l'identité (2) ; donc la droite passe par le point donné; et de ce point, passant au point infiniment voisin, soit sur la courbe, soit sur la droite, on a la même équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots\ldots X_n dx_n = 0\,;$$

donc cette droite est tangente.

Observation. M. Plucker donne cette belle démonstration dans l'ouvrage cité ci-dessus. Rien n'empêche ceux qui aiment les *limites* de les invoquer. Il est vrai qu'au dernier instant, à la limite expirante, si l'on peut parler ainsi, on est en plein *infiniment petit*; mais on passe par dessus les yeux fermés. On a bien la chose, mais avec l'avantage de ne pas en prononcer le nom; avantage considérable, qui compense ce que la méthode a de long et de pénible.

VI. *Exemple.* 1° Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dyz + Exz + Fz^2 = X = 0,$$

l'équation rendue homogène d'une conique, on a pour équation de la tangente

$$y(2Ay'+Bx'+Dz')+x[2Cz+By+Ez]+z[2Fz'+Dy'+Ex']=0;$$

$\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ sont les coordonnées du point de contact; en faisant $z = z' = 1$, on a l'équation ordinaire.

2° Soit $px_1x_2 + qx_3x_4 = X = 0$, l'équation d'une conique; p et q des constantes; x_1, x_2, x_3, x_4 des fonctions linéaires de x, y, z; l'équation de la tangente est

$$pX_1x_1 + pX_2x_2 + qX_3x_3 + qX_4x_4 = 0.$$

X_1, X_2, X_3, X_4, sont les valeurs que prennent les dérivées $\frac{dX}{dx_1}$, $\frac{dX}{dx_2}$ ..... etc., au point donné.

Remarque. En 1844, M. Finck a attiré l'attention des professeurs français sur cette manière de représenter les courbes par des fonctions de facteurs linéaires, dont M. Plucker surtout a tiré de si fécondes conséquences (voir *Nouv. Annales*, t. III, p. 147). Les ouvrages du célèbre professeur de Bonn méritent à tous égards les honneurs de la traduction; utile à la science, mais ne servant pas aux examens, qui achèterait cette traduction?

7. *Problème.* Mêmes données qu'au problème 5; mais l'on a $x_k = a_k x + b_k y + c_k z + d_k u$; a_k, b_k, c_k, d_k sont

des constantes; $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$ des coordonnées d'un point dans l'espace; $X=0$ représente l'équation d'une surface de degré m; quelle est l'équation du plan tangent mené par le point de la surface, ayant pour coordonnées $\frac{x'}{u'}$, $\frac{y'}{u'}$, $\frac{z'}{u'}$?

Solution. L'équation (3) du problème 5 représente l'équation du plan tangent. Même démonstration.

Observation. Lorsque toutes les quantités X, X_1, $X_2 \ldots X_n$ sont nulles simultanément, l'équation (3) disparaît; c'est le cas des *points singuliers* dont la théorie sera donnée plus loin.

8. *Définition.* Soit $py+qx=1$ l'équation d'une droite mobile, et $F(p, q)=0$ (1) une relation de degré m entre p et q; la droite est évidemment l'enveloppe d'une ligne plane; l'équation (1) est l'équation *enveloppe* de cette ligne; et M. Plucker donne aux variables p, q, le nom de *coordonnées linéaires* pour les distinguer des coordonnées ordinaires, qu'il nomme *coordonnées de point* (Punkt-Coordinaten). On voit que les coordonnées linéaires sont les valeurs réciproques des coordonnées à l'origine de la droite mobile. A une même valeur de p répondent m valeurs de q; donc par un même point passent m tangentes; et la courbe est dite de $m^{ème}$ *classe*, dénomination introduite par M. Gergonne.

9. *Théorème.* Lorsque l'équation enveloppe est linéaire, l'enveloppe est un point fixe.

Démonstration. Soit $ap+bq=1$ l'équation enveloppe de la droite mobile $py+qx=1$; il est évident que cette droite passe constamment par le point qui a pour coordonnées a et b, car on a $ap+bq=1$.

Observation. Dans le système usité, un point est représenté par deux équations et une droite par une équation; c'est le contraire dans le système des coordonnées linéaires : une droite est représentée par deux équations, $p=a$, $q=b$, et un point par une équation, $ap+bq=1$.

10. *Problème.* Mêmes données qu'au problème 5; l'on a $x_k = a_k p + b_k q + c_k r$; a_k, b_k, c_k sont trois constantes; $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ sont les *coordonnées linéaires* de la droite mobile $\frac{p}{r}y + \frac{q}{r}x = 1$; $X = 0$ (1) est l'équation enveloppe d'une courbe de $m^{ème}$ classe; étant données les coordonnées linéaires $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$, satisfaisant à l'equation $X=0$, trouver l'équation correspondante du point de contact.

Solution. L'équation (3) du problème 5 représente l'équation enveloppe du point de contact. En effet, cette équation est linéaire en p et q; elle représente donc un point (9); et on démontre, comme pour le problème 5, que ce point appartient à deux droites mobiles infiniment voisines.

Observation. L'équation (3) peut se mettre sous la forme $Pp+Qq=1$, P et Q étant des fonctions de $\frac{p'}{r'}$ et de $\frac{q'}{r'}$; donc $x=Q$; $y=P$ sont les coordonnées ordinaires du point de contact, éliminant $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$ entre ces deux équations et l'équation $X=0$, où p, q, r sont remplacés par p', q', r', on obtient une équation en x, y, qui est celle de l'enveloppe en coordonnées ordinaires.

(*La suite prochainement.*)