NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions d'examen sur des lieux géométriques polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 437-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__437_1>

QUESTIONS D'EXAMEN

sur des lieux géométriques polaires.

I. *Notation.* Nous désignons par P_r la fonction homogène de deux variables x, y de degré r, et par Q_r la fonction homogène trigonométrique de degré r suivante :

$$A\sin^r\varphi + B\sin^{r-1}\varphi\cos\varphi + C\sin^{r-2}\varphi\cos^2\varphi + \ldots R\sin^2\varphi\cos^{r-2}\varphi + S\sin\varphi\cos^{r-1}\varphi + T\cos^r\varphi,$$

où A, B, C... R, S, T sont des constantes données.

II. Soit $P_m + P_{m-1} + P_{m-2} + \ldots P_2 + P_1 + P_0 = 0$ (1) l'équation d'une ligne plane de degré m, axes rectangulaires ; prenant l'origine pour pôle et l'axe des x pour axe polaire, l'équation polaire de la courbe est

$$z^m Q_m + z^{m-1}Q_{m-1} + z^{m-2}Q_{m-2} + \ldots z^2 Q_2 + zQ_1 + P_0 = 0 \quad (2).$$

III. *Problème.* **Par un point fixe donné dans le plan d'une courbe de degré m, on mène une sécante qui la rencontre en m points ; sur cette sécante, on prend un point tel que sa distance au point fixe soit égale à la somme des distances de l'origine aux points d'intersection ; trouver le lieu de ce point.**

Solution. Prenons le point fixe pour origine et les axes rectangulaires ; soient (1) et (2) l'équation aux coordonnées rectangulaires et l'équation polaire de la courbe ; pour la même valeur φ, la somme de toutes les valeurs de z est $\frac{-Q_{m-1}}{Q_m}$; donc l'équation polaire de la courbe cherchée est

$$z = \frac{-Q_{m-1}}{Q_m}, \text{ ou bien } z = \frac{-z.z^{m-1}Q_{m-1}}{z^m Q_m} = \frac{-zP_{m-1}}{P_m};$$

d'où $P_m + P_{m-1} = 0$, équation aux coordonnées rectangulaires.

IV. *Problème.* Mêmes données ; trouver un point tel que le carré de sa distance à l'origine soit égal à la somme des carres des distances de l'origine aux m points d'intersection.

Solution. On a

$$z^2 = \frac{Q^2{}_{m-1} - 2Q_m Q_{m-2}}{Q^2{}_m} = \frac{z^2.[z^{2m-2}Q^2{}_{m-1} - 2z^{2m-2}Q_m Q_{m-2}]}{z^{2m}Q_m{}^2}$$
$$= \frac{z^2[P^2{}_{m-1} - 2P_m P_{m-2}]}{P_m{}^2},$$

d'où $P_m{}^2 + 2P_m P_{m-2} - P^2{}_{m-1} = 0$.

V. *Problème.* Mêmes données ; trouver un point tel que sa distance *réciproque* à l'origine soit égale à la somme des distances réciproques des points d'intersection à l'origine.

Solution. Dans l'équation (2) remplaçons z par $\frac{1}{z}$, on obtient

$$P_0 z^m + Q_1 z^{m-1} + Q_2 z^{m-2} + \ldots Q_m = 0;$$

donc

$$\frac{1}{z} = \frac{-Q_1}{P_0}; \quad z = \frac{-P_0}{Q_1};$$

d'où $P_1 + P_0 = 0$, équation d'une droite.

VI. *Problème.* Mêmes données; trouver un point tel que le carré de sa distance réciproque à l'origine soit égale à la somme des carrés des distances réciproques des points d'intersection à l'origine.

Solution. On a

$$\frac{1}{z^2} = \frac{Q_1^2 - 2P_0Q_2}{P_0^2}; \; z^2[Q_1^2 - 2P_0Q_2] = P_0^2 \text{ ou } P_1^2 - 2P_0P_2 - P_0^2 = 0,$$

équation d'une conique.

VII. Même procédé pour d'autres questions de ce genre et qui s'applique facilement aux surfaces.