Nouvelles annales de mathématiques

Lebesgue

Sur l'équation qui donne les axes principaux des surfaces à centre du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 404-407

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__404_0>

SUR L'ÉQUATION

qui donne les axes principaux des surfaces à centre du second degré.

PAR M. LEBESGUE.

(1) Le calcul de cette équation est presque aussi simple en partant de coordonnées obliques qu'en partant de coordonnées rectangulaires; on doit même dire qu'il est plus simple en ce sens que l'équation générale conduit immédiatement à des théorèmes que ne donnerait pas l'équation particulière.

Soit la surface à centre

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2+2ayz+2bxz+2cxy=1. \qquad (a)$$

Si l'on rend maximum ou minimum

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2xz\cos\beta+2xy\cos\gamma; \qquad (b)$$

sous la condition (a) on aura les équations

$$\frac{x+y\cos\gamma+z\cos\beta}{\mathrm{A}x+cy+bz}=\frac{y+z\cos\alpha+x\cos\gamma}{\mathrm{B}y+az+cx}=\frac{z+x\cos\beta+y\cos\alpha}{\mathrm{C}z+bx+ay}, \qquad (c)$$

que l'on obtient encore en exprimant que le plan tangent en (x, y, z) est perpendiculaire sur la droite $\frac{\mathrm{X}}{x}=\frac{\mathrm{Y}}{y}=\frac{\mathrm{Z}}{z}$.

Le système des équations (b), (c) fait trouver les axes principaux.

(2) Si l'on voulait éviter l'emploi du calcul différentiel, voici l'ordre de propositions qu'on pourrait adopter.

1° Valeur de la distance des points $(0, 0, 0)$, (x, y, z) pour un système de coordonnées obliques, on a :

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2yx\cos\gamma.$$

2° Valeur des cosinus de l'angle de deux droites;

3° Valeur des cosinus des angles qu'une droite fait avec les trois axes;

4° Équation d'un plan perpendiculaire à une droite qui fait avec les axes des angles λ, μ, ν, et à une distance r de l'origine c'est encore :

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = r.$$

5° Condition de perpendicularité du plan

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

et de la droite $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$, c'est précisément :

$$\frac{x+y\cos\gamma+z\cos\beta}{A}=\frac{y+z\cos\alpha+x\cos\gamma}{B}=\frac{z+x\cos\beta+y\cos\alpha}{C}.$$

Si l'on suppose que le plan soit tangent à la surface d'équation (a) on a les équations (c). J'ajouterais à ce qui précède que le volume du parallélipipède $H=xyz$ devient pour les coordonnées obliques :

$$H=xyz\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.$$

(3) Ceci posé, pour résoudre les équations (b) (c), multiplions les trois fractions (c) respectivement par $\frac{x}{x}$, $\frac{y}{y}$ et $\frac{z}{z}$; puis ajoutant terme à terme, suivant le procédé de M. Cauchy, nous aurons r^2 pour valeur commune des trois fractions; de là les équations

$$x(1-Ar^2)+y(\cos\gamma-cr^2)+z(\cos\beta-br^2)=0;$$
$$x(\cos\gamma-cr^2)+y(1-Br^2)+z(\cos\alpha-ar^2)=0;$$
$$x(\cos\beta-br^2)+y(\cos\alpha-ar^2)+z(1-cr^2)=0.$$

L'élimination des rapports $\frac{x}{z}=\frac{P}{R}$, $\frac{y}{z}=\frac{Q}{R}$ donnera une équation de la forme

$$Kr^6-Lr^4+Mr^2-N=0; \qquad (d)$$

car P, Q, R sont des fonctions de r^2.

Ayant trouvé les trois valeurs de r^2, l'équation

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2xz\cos\beta+2xy\cos\gamma$$

devient, à cause de $x=\frac{Pz}{R}$, $y=\frac{Q}{R}z$:

$$r^2=\frac{z^2}{R^2}(P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2PR\cos\beta+2PQ\cos\gamma)=\frac{z^2U^2}{R^2}.$$

On aura donc :

$$z^2=\frac{r^2R^2}{U^2},\ y^2=\frac{r^2Q^2}{U^2},\ x^2=\frac{r^2P^2}{U^2},$$

ce qui complète la solution.

Calcul fait, les valeurs de K, L, M, N sont :

$$K=ABC+2abc-Aa^2-Bb^2-Cc^2,$$
$$L=AB+BC+CA-c^2-b^2-a^2$$
$$+2(bc-aA)\cos\alpha+2(ac-)\qquad\beta+2(ab-cC)\cos\gamma,$$
$$M=A\sin^2\alpha+B\sin^2\beta+C\sin^2\gamma$$
$$-a(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)-b(\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma)-c(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta),$$
$$N=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

(4) Si l'on pose $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=0$, d'où

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=1$$

et qu'on change r en $\frac{1}{s}$, on aura l'équation ordinaire.

Si l'on pose $a=b=c=0$, ce qui suppose que l'équation $Ax^2+By^2+Cr^2=1$ représente la surface rapportée à un système de diamètres conjugués, l'équation devient, en divisant par ABC :

$$r^6-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)r^4+\left(\frac{1}{BC}\sin^2\alpha+\frac{1}{AC}\sin^2\beta+\frac{1}{AB}\sin\gamma\right)r$$
$$-\frac{1}{ABC}(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)=0,$$

qui donne de suite trois théorèmes relatifs au parallélipipède des diamètres conjugués.

Sans entrer dans plus de détails, il est aisé de reconnaître qu'il y a réellement simplification.

L'équation générale (d) a été trouvée d'une autre manière par M. Jacobi (J. de Crelle, t. II, p. 227) ; elle aura probablement déjà été exposée comme il a été fait plus haut, car c'est l'imitation d'une solution bien connue. L'objet de cette note ne peut donc être que de recommander l'application des méthodes générales, ce qui est ordinairement le meilleur moyen de simplification.