NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Discussion d'une surface du 4ème degré, donnant une valeur approchée du radical $\sqrt{x^2+y^2}$, d'après M. Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 39-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__39_1>

DISCUSSION

d'une surface du 4ème degré, donnant une valeur approchée du radical $\sqrt{x^2+y^2}$, *d'après M. Poncelet* (Crelle, t. XIII, p. 277. 1835, en français).

—

I. Soit $(z+1)^2(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ l'équation d'une surface du quatrième degré.

1° Faisant $x=y=0$, on a $z=\frac{0}{0}$; donc l'axe des z est sur la surface;

2° Tout plan parallèle au plan xy rencontre la surface suivant deux droites, qui se coupent sur l'axe des z ; donc la surface est engendrée par une droite qui se meut suivant une certaine loi le long de l'axe des z, parallèlement au plan xy;

3° On a $\frac{y}{x} = \frac{ab \pm (z+1)\sqrt{a^2+b^2-(1+z)^2}}{(z+1)^2-b^2} = \tang \varphi$.

Ainsi, à une même valeur de z répondent deux valeurs de φ, qui donnent deux droites conjuguées. Les deux se réunissent en une seule, lorsque $z = -1$; alors $\tang \varphi = -\frac{a}{b}$;

et lorsque $z = -1 \pm \sqrt{a^2+b^2}$, alors $\tang \varphi' = \frac{b}{a}$; prises positivement, ces deux dernières valeurs de z sont des maximums;

4° On a $z = -1 \pm (a \cos \varphi + b \sin \varphi)$; lorsque $\varphi = 0$, $z' = -1 \pm a$; si l'on veut que z et z' soient conjugués, l'on doit poser

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = a, \text{ d'où } \frac{b}{a} = \frac{1-\cos \varphi}{\sin \varphi} = \cot \frac{1}{2} \varphi$$

ainsi $\tang \varphi' < \tang \varphi$; $\varphi' < \varphi$;

5° a et b diminuant, z' et z'' augmentent négativement, et par conséquent diminuent étant pris positivement, la plus grande diminution ayant lieu lorsque ces valeurs atteignent le maximum Z; on doit donc poser

$$1 - a = 1 - a \cos \varphi - b \sin \varphi = -1 + \sqrt{a^2+b^2};$$

on déduit

$$a = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}{1 + \sin \frac{1}{2} \varphi}; \quad b = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \varphi}{1 + \sin \frac{1}{2} \varphi};$$

faisant $\varphi + \psi = 2q$, il vient

$$a = 1 - \tang^2 \frac{1}{4} \psi; \quad b = 2 \tang \frac{1}{4} \psi; \quad 1 - a = \tang^2 \frac{1}{4} \psi.$$

Applications numériques.

6° Soit à extraire la racine carrée de x^2+y^2 ; supposons qu'elle soit égale à $ax+by$; l'erreur totale sera $ax+by-\sqrt{x^2+y^2}$, et l'erreur *relative* est $\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}-1=z$; on cherche les valeurs de a et b, qui donnent à z une valeur minimum dans l'intervalle de o à φ; faisant par exemple $\varphi=1^q$, on obtient $a=b=0{,}8284$; $1-a=0{,}1716$; on a donc, à moins d'un 0,1716 ou $\frac{1}{6}$ près, $\sqrt{x^2+y^2}=0{,}83\ (x+y)$, et x et y étant quelconques, faisant successivement

$$\text{tang}\ \varphi = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ 10,$$

on obtient pour le radical $\sqrt{x^2+y^2}$, d'une manière approchée.

0 — $0{,}8284\ (x+y)$ à $\frac{1}{6}$ près x et y quelconques.

		Erreurs.	
1	— $0{,}96046x + 0{,}39783y$	— $\frac{1}{25}$	— $x > y$
2	— $0{,}98592x + 0{,}23270y$	— $\frac{1}{71}$	— $x > 2y$
3	— $0{,}99350x + 0{,}16123y$	— $\frac{1}{154}$	— $x > 3y$
4	— $0{,}99625x + 0{,}12260y$	— $\frac{1}{200}$	— $x > 4y$
5	— $0{,}99757x + 0{,}09878y$	— $\frac{1}{417}$	— $x > 5y$
6	— $0{,}99826x + 0{,}08261y$	— $\frac{1}{589}$	— $x > 6y$
7	— $0{,}99875x + 0{,}07098y$	— $\frac{1}{800}$	— $x > 7y$

$$8 - 0{,}99905x + 0{,}06220y - \frac{1}{1049} - x > 8y$$

$$9 - 0{,}99930x + 0{,}05535y - \frac{1}{1428} - x > 9y$$

$$10 - 0{,}99935x + 0{,}04984y - \frac{1}{1578} - x > 10y$$

Ce tableau, que nous avons copié dans le mémoire de M. Poncelet, est extrêmement utile dans la pratique.