NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Théorème de statique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 34-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__34_0>

THÉORÈME DE STATIQUE.

PAR E. CATALAN.

Pour que quatre forces, P, Q, S, T, *situées ou non situées dans un même plan, mais non appliquées en un même point, se fassent équilibre, il faut et il suffit :*

1° *Que deux de ces forces, par exemple les forces* P *et* Q, (fig. 4) *soient représentées en grandeur et en direction par les deux côtés opposés* AB, CD *d'un quadrilatère ;*

2° *Que les deux autres forces,* S *et* T, *soient représentées par des droites respectivement égales et parallèles aux deux autres côtés* AD, BC *de ce quadrilatère ;*

3° *Que les directions de ces deux dernières forces rencontrent les côtés* BC, AD *en des points* E, F, *tels que l'on ait*

$$\frac{BE}{CE}=\frac{DF}{AF};$$

4° *Enfin que les forces* P *et* Q *agissent en sens contraires, et qu'il en soit de même pour les forces* S, T.

Pour démontrer ce théorème, supposons d'abord qu'avec les deux droites AB, CD, qui représentent en grandeur et en direction deux forces données P, Q, agissant en sens contraires, on construise un quadrilatère ABCD. Je dis que si, en un point quelconque E, du côté BC, on applique une force S, représentée en grandeur et en direction par la droite EH, égale et parallèle à AD, les trois forces P, Q, S auront une résultante unique.

Appliquons aux points B, C, deux forces S′, S″, parallèles à S, et telles que l'on ait

$$S' = S\frac{CE}{BC},\quad S'' = S\frac{BE}{BC};$$

elles pourront tenir lieu de la force S.

Les deux forces P et S′, appliquées en B, auront une résultante unique R′, située dans le plan DAB, et dont la direction rencontrera AD en un point F, déterminé par la proportion $\frac{AF}{AB} = \frac{S'}{P}$; donc, à cause de AB=P, l'on aura

$$AF = S'.$$

De la même manière, la résultante R″ des deux forces Q et S″ rencontre AD en un point F′, déterminé par la relation

$$DF' = S''.$$

On conclut, de ces deux valeurs, AF+DF′=S=AD; c'est-à-dire que les points F et F′ se confondent, et que les forces R′, R″ ont une résultante R, dont la direction rencontre AD en un point F, qui divise cette droite AD en deux parties AF, DF, inversement proportionnelles à BE, CE.

Pour obtenir la grandeur et la direction de R, il suffit d'observer que les forces R′, R″, étant représentées en grandeur et en direction par les droites FB, FC, leur résultante R sera représentée par une droite égale et parallèle à BC. Cette force R, résultante des forces P, Q, S, est donc égale et directement opposée à la force T; donc les quatre forces P, Q, S, T se font équilibre. La condition énoncée est donc suffisante.

Afin de faire voir que cette condition est nécessaire, supposons qu'étant donné un quadrilatère ABCD (*fig.* 5), dans lequel les deux côtés AB, CD représentent en grandeur et en direction deux forces données P, Q, on applique une force S, égale et parallèle à celle qui serait représentée par

AD, mais de manière que la direction de cette force S ne rencontre pas le côté BC. Je dis que les forces P, Q, S ne pourront pas se réduire à une force unique.

Menons une droite GH, qui rencontre en G, H, E les directions des forces Q, P, S : projetons la figure sur le plan BAD, à l'aide des droites parallèles à AD ; la direction de la force S rencontre G'H en un point E' non situé sur BC'.

Cela posé, si nous reprenons les décompositions de tout à l'heure, nous obtiendrons :

$$AF = AH \cdot \frac{S}{P} \cdot \frac{G'E'}{G'H}, \quad BF' = DG \cdot \frac{S}{Q} \cdot \frac{HE'}{G'H}.$$

Si les points F et F' se confondaient, on trouverait, en ajoutant ces deux valeurs :

$$G'H = \frac{AH}{P} \cdot G'E' + \frac{DG}{Q} \cdot HE'.$$

Mais, K' étant le point de rencontre de G'H avec BC', on a :

$$G'H = \frac{AH}{P} \cdot G'K' + \frac{DG}{Q} \cdot K'H;$$

retranchant membre à membre, on obtient :

$$O = \frac{AH}{P} \cdot E'K' - \frac{DG}{Q} E'K',$$

ou encore

$$\frac{AH}{AB} = \frac{DG'}{DC'}.$$

Or, cette proposition est absurde tant que les droites BC', HG' se coupent. Et si elles étaient parallèles, on démontrerait encore plus facilement que nous ne venons de le faire, que les forces P, Q, S n'ont pas de résultante unique.

Le théorème est donc démontré.

(*Juin* 1846.)