NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ADRIEN LAFOND

Question d'examen. Lieu géométrique du centre d'un cercle tangent aux côtés d'un triangle inscrit dans une circonférence

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 318-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__318_0>

QUESTION D'EXAMEN.

Lieu géométrique du centre d'un cercle tangent aux côtés d'un triangle, inscrit dans une circonférence,

PAR M. ADRIEN LAFOND,
élève du lycée Monge (classe de M. VINCENT).

Théorème. Un triangle inscrit dans un cercle donné ayant un angle constant, et le sommet de ce même angle fixe; le lieu du centre du cercle qui touche les côtés du triangle est un *limaçon* de Pascal. (Paul Serret.)

Démonstration (*). *Équation polaire.* Soit C le centre du cercle donné, ABD le triangle inscrit, B l'angle constant et aussi le sommet fixe. Soit O le centre d'un cercle inscrit, et H, H' les points de contact de ce cercle avec les côtés AD, AB; menons la droite BO rencontrant de nouveau le cercle donné en N; prenons le diamètre BOM pour axe polaire; posons $BC = R$; $BO = \rho$; $OBM = \omega$; $BN = \rho_1$; $AH = AH' = \beta$; $BH' = \alpha = \rho\cos\frac{1}{2}B$; $AD = 2c$, menons AN et DN; les triangles ABN, DBN donnent:

$$\overline{AN}^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\rho_1(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}B + \rho_1^2;$$

$$\overline{DN}^2 = (2c-\beta+\alpha)^2 - 2\rho_1(2c-\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}B + \rho_1^2.$$

Mais $AN = DN$; faisant la soustraction et divisant par $4(c-\beta)$, il vient:

$$\rho_1\cos\frac{1}{2}B - c - \alpha = 0;$$

(*) Le lecteur est prié de vouloir bien faire la figure.

or, $\rho_1 = 2R\cos\omega$; $c = R\sin B$; donc

$$\rho = 2R(\omega - \sin\frac{1}{2}B), \qquad (1)$$

équation polaire cherchée. Telle est aussi l'équation du *limaçon* de Pascal; on sait que cette courbe est du genre conchoïde; la base est ici le cercle donné, B le point fixe, et $ON = BN - BO = 2R\sin B$ est la longueur fixe, qu'on porte en dedans et au dehors du cercle. (*Voir* t. II, p. 290.)

La discussion de la courbe ne présente aucune difficulté; la courbe appartient aussi aux cercles inscrits et ex-inscrits.

Équation aux coordonnées rectangulaires :

$$(y^2 + x^2 - 2Rx)^2 - 4R^2(y^2 + x^2)\sin^2\frac{1}{2}B = 0.$$

Observation. Lorsqu'on prend l'angle supplémentaire de B, il faut remplacer $\sin\frac{1}{2}B$ par $\cos\frac{1}{2}B$.

Note. Construisant le cercle $y^2 + (x - 2R)^2 = 4R^2\sin\frac{1}{2}B$ et abaissant de l'origine des perpendiculaires sur les tangentes, les pieds des perpendiculaires forment le limaçon de Pascal (t. IV, p. 426); autrement le limaçon de Pascal est la *podaire* de l'origine de ce cercle.

Tm.