NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BRASSINE

Note sur le développement de e^x en série

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 30-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__30_0>

NOTE

sur le développement de e^x en série.

PAR M. BRASSINE.

1° Le développement de l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ se met sous la forme :

$$(1)\ldots\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3\alpha}{4}\right)+\text{etc., etc...}$$

Si la quantité α devient infiniment petite, il sera nécessaire de prouver rigoureusement qu'on peut la négliger dans le second membre, parce que les facteurs binômes devenant en nombre infini, leur produit pourrait donner pour coefficients de α des quantités assez grandes pour compenser la petitesse de ce facteur ; d'où il résulterait que la série du second membre, qui a évidemment pour limite supérieure

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots\text{ etc.},$$

vaudrait moins que cette quantité. Pour lever cette difficulté, on peut faire usage d'un procédé applicable à d'autres cas, et qui est fondé sur le lemme suivant.

Lemme. 1° Si on multiplie entre eux deux polynômes $a-b\alpha+c\alpha^2-\ldots$, $a'-b'\alpha+c'\alpha^2-\ldots$, ordonnés par rapport aux puissances ascendantes de α, et dont les termes sont alternativement positifs ou négatifs, on obtiendra un produit $a''-b''\alpha+c''\alpha^2-\ldots$ de même forme. Si de plus on augmentait sans changer leurs signes, les coefficients a, b, c, ... a', b', c', ..., tous les termes du produit seraient augmentés; enfin si on réunissait dans une même somme plusieurs produits semblables au précédent, cette somme de la forme $A - B\alpha + C\alpha^2$ ... aurait des coefficients d'autant plus grands que ceux des divers produits seraient plus grands.

2° Si les termes d'une suite $a - b\alpha + c\alpha^2 - \ldots$ indéfinie peuvent devenir aussi petits que l'on voudra, en multipliant cette suite par un polynome $a' - b'\alpha + c'\alpha^2 \ldots \pm h'\alpha^{m-1}$ d'un nombre fini de termes, on obtiendra un produit $a'' - b''\alpha + c''\alpha^2 \ldots$ dont chaque terme pourra devenir aussi petit que l'on voudra. Cela tient à ce que m quantité infiniment petites, ε, ε', ε'' multipliées par des quantités finies on infiniment petites, p, q, r, s ... donnent une somme

$$p\varepsilon + q\varepsilon' + r\varepsilon'' + \ldots$$

aussi petite que l'on veut.

Cela posé, les termes du second membre de la suite (1) après les deux premiers, sont moindres que $\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)$, $\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^2$, $\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^3$, etc...; leur somme aura pour limite supérieure :

$$2 + \left(\frac{2}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^2 + \ldots = 2 + \frac{\frac{2}{3} - \alpha}{1 - \frac{2}{3} + \alpha} =$$

$$= 2 + 2 - 3(3\alpha) + 3(3\alpha)^2 - 3(3\alpha)^3 + \ldots;$$

3α pouvant devenir très-petit, les termes successifs de cette suite peuvent devenir aussi faibles qu'on voudra, et être décroissants. Mais la suite (1) étant composée de produits tout à fait analogues à ceux que donnent les divers termes de la progression, les termes en α, α^2 ... de cette suite sont limités par $-3(3\alpha)$, $3(3\alpha)^2$ ... qui peuvent devenir aussi petits que l'on voudra et dont la somme algébrique sera aussi nulle , puisqu'elle forme une série décroissante et alternée de signes ; d'où résulte que dans le cas de α infiniment petit, on trouve :

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots$$

On aurait obtenu une limite supérieure bien plus rapprochée du second membre de l'équation (1) et de ses termes successifs, en remarquant que les binômes entre parenthèses sont tous limités par $\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)$, δ étant une quantité finie très-petite; d'où il résulterait que ce second membre et chacun de ses termes auraient pour limites le développement

$$2+\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)+\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)^2+\cdots$$

La série

$$\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^p+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^p\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)^p+$$
$$+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^p\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)^p\left(\frac{1}{4}-\frac{3\alpha}{4}\right)^p+\cdots \qquad (2)$$

serait limitée pour son ensemble et ses termes par la somme et les termes de la progression

$$\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)^p+\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)^{2p}+\cdots$$

Mais cette progression est une partie de la progression dont le premier terme et la raison sont $\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)$; d'où il résulte que les termes de cette dernière servent de limite à ceux de la suite (2), qui se réduit pour δ infiniment petit à

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{(2.3)^p}+\frac{1}{(2.3.4)^p}.+\text{etc.}\ldots$$

2° Considérons l'expression

$$(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}=1+x+x\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+x\left(\frac{x}{2}-2\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right),$$

supposons la suite prolongée jusqu'à un terme tel que x soit plus petit que m, la suite à partir de $m+1$ terme aura pour expression :

$$x\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)\cdots\left(\frac{x}{m}-\frac{(m-1)\alpha}{m}\right)$$

$$\left[1+\left(\frac{x}{m+1}-\frac{m\alpha}{m+1}\right)+\left(\frac{x}{m+1}-\frac{m\alpha}{m+1}\right)\left(\frac{x}{m+2}-\frac{\overline{(m+1)}\alpha}{m+2}\right)+\ldots\right];$$

en augmentant $\frac{x}{m+1}$ d'une quantité finie très-petite δ, on formera une progression qui aura pour premier terme et pour raison $\frac{x}{m+1}+\delta-\alpha$, et qui limitera

$$1+\left(\frac{x}{m+1}-\frac{m\alpha}{m+1}\right)+\ldots;$$

donc pour α infiniment petit, tous les termes en α, α^2, ... seront aussi faibles qu'on voudra ; le produit de cette suite par le polynôme $x\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(\frac{x}{m}-\frac{\overline{m-1}\alpha}{m}\right)$ d'un nombre fini de termes, ne produira que des termes en α négligeables; comme d'ailleurs on peut négliger cette quantité dans les m premiers termes qui n'ont qu'un nombre limité de facteurs, il résulte que $(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$

M. Liouville avait déjà démontré rigoureusement, dans le *Journal de mathématiques*, t. V, p. 280, que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ lorsque α est infiniment petit. Le procédé qu'il emploie est aussi simple que possible. Les considérations précédentes, qui n'exigent que la formation de progressions géométriques, peuvent s'appliquer à d'autres cas.