NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré ; théorie des polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 308-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__308_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré (*V.* t. VI, p. 618) ; *théorie des polaires réciproques.*

Pour la commodité des lecteurs, s'il y en a, nous allons transcrire de nouveau ces relations :

$\gamma =$ angle des axes ; $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$
fonction principale $= L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC)$.

Fonctions dérivées.

$$\frac{dL}{dA} = E^2 - 4CF = l' ; \; \frac{dL}{dC} = D^2 - 4AF = l ;$$

$$\frac{dL}{dB} = -DE + 2BF = -n ; \; \frac{dL}{dD} = 2CD - BE = k' ;$$

$$\frac{dL}{dE} = 2AE - BD = k ; \; \frac{dL}{dF} = B^2 - 4AC = m.$$

Fonction auxiliaire.

$$N = A + C - B\cos\gamma ;$$

Relations d'identité.

$$k^2 - ml = 4AL ; \quad 2kk' + 2mn = -4BL ; \quad k'^2 - ml' = 4CL ;$$

$$k'l + kn = 2DL ; \; kl' + k'n = 2EL ; \; n^2 - ll' = 4FL.$$

$$Cl - Al' + Ek + mF = Al' - Cl + Dk' + mF = L ;$$

$$2Al' - Bn + Dk' = 2Cl - Bn + Ek = 2L.$$

$$Ak'^2 + Bkk' + Ck^2 + mDk' + mEk + m^2F = mL;$$
$$k^2 + k'^2 + 2kk'\cos\gamma = 4NL.$$
$$k^2l' + k'^2l + 2kk'n + m(n^2 - ll') = 4L^2 \text{ (coniques à centre).}$$

On obtient cette relation en mettant dans $B^2 - 4AC$, pour A,B,C leurs valeurs en fonctions dérivées.

$$2Ck + Bk' + Em = 2Ak' + Bk + Dm = -2An + Bl + Dk = -$$
$$= -2Cn + Bl' + Ek' = 0.$$
$$(A - C)^2 + (B - 2A\cos\gamma)(B - 2C\cos\gamma) = N^2 + m\sin^2\gamma =$$
$$= (A - C)^2\sin^2\gamma + [B - (A + C)\cos\gamma]^2.$$
$$(2Ay + Bx + D)^2 - (2Cx + By + E)^2 = mx^2 - 2kx + l -$$
$$- (my^2 - 2k'y + l').$$
$$mx^2 - 2kx + l = m\left[\left(x - \frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4AL}{m^2}\right];$$
$$my^2 - 2k'y + l' = m\left[\left(y - \frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{4CL}{m^2}\right].$$
$$(2Ay + Bx + D)(2Cx + By + E) = ky + k'x - mxy + n.$$
$$A(2Cx + By + E)^2 + C(2Ay + Bx + D)^2 - B(2Cx + By + E)$$
$$(2Ay + Bx + D) = L - m(Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F).$$

LXXXII. *Théorème.* Soit une courbe A, située dans le plan d'une conique C; l'*enveloppe* des polaires des points de la courbe A relativement à la conique C est la même courbe que le *lieu* des pôles des tangentes à la courbe A relativement à la même conique.

Démonstration. Désignons l'enveloppe des polaires par A', et le lieu des pôles par A''; soient M et M' deux points de la courbe A, et MT, M'T les deux tangentes se rencontrant en T; et soit μ le pôle de MT, et μ' le pôle de M'T; de sorte que μ et μ' sont deux points de la courbe A'', et T est le pôle de la corde $\mu\mu'$; M' s'approchant de M, le point T s'en approche également et finit par se confondre avec M; alors μ' se confond avec μ et la corde $\mu\mu'$ devient une tangente à la courbe A'' en μ, et dont M est alors le pôle. Donc μ appartient aussi à la courbe A'; c. q. f. d.

Corollaire. Les points M et μ sont liés par cette relation géométrique; la polaire de M est tangente en μ à la courbe A' et la polaire de μ est tangente en M à la courbe A; c'est ce qui a fait donner aux courbes A et A' le nom de *polaires réciproques*. On désigne la conique qui sert d'intermédiaire sous le nom de *Directrice*, et les points M et μ sont dits points *correspondants*.

Remarque I. On peut parvenir aux mêmes conclusions par des considérations purement analytiques; soient $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$; $\frac{x''}{z''}$, $\frac{y''}{z''}$ (*Voir* p. 5), les coordonnées des points correspondants, et $F(x,y,z)=0$ l'équation rendue homogène de la courbe donnée; la polaire du point $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ est

$$y(2Ay'+Bx'+Ez')+x(2Cx'+By'+Ez')+z(Dy'+Ex'+2Fz')=0,$$

donc $y''[2Ay'+Bx'+Dz']+x''[2Cx'+By'+Ez']+$
$$+z''[Dy'+Ex'+2Fz']=0.$$

La polaire du point $\frac{x''}{z''}$, $\frac{y''}{z''}$ est $y[2Ay''+Bx''+Dz'']+$ $+x[2Cx''+By''+Ez'']+z[2Fz''+Dy''+Ex'']=0$, et le point $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ est évidemment sur cette polaire. Le point infiniment voisin est aussi sur cette polaire; elle est donc tangente à la courbe donnée.

Remarque II. Autant la courbe donnée a de points situés à l'infini, autant la polaire réciproque a de tangentes passant par le centre de la directrice; mais il faut se rappeler que les points situés à l'infini sur la même droite ne comptent que pour un point.

Remarque III. Autant la courbe donnée a des tangentes situées à l'infini (branches paraboliques), autant la polaire réciproque a de points multiples au centre de la directrice; les tangentes parallèles à l'infini ne comptent que pour une tangente.

Remarque IV. A chaque tangente de la courbe donnée passant par le centre de la directrice correspondent deux points de la polaire réciproque situés à l'infini. Lorsque aucune tangente ne passe par le centre, la polaire réciproque est toujours une courbe fermée.

Remarque V. Aux points et aux droites imaginaires répondent des polaires et des pôles imaginaires; mais à une ligne réelle correspond une polaire réciproque réelle, même lorsque la directrice est une ellipse imaginaire. Car, dans une telle ellipse, les coordonnées du centre, les directions des diamètres conjugués sont réelles, et la construction des pôles et polaires ne dépend que de ces données. D'ailleurs l'équation de la polaire d'un point ne renferme que les *coefficients* de l'équation de la conique directrice, et ces coefficients sont réels, lors même que la conique devient imaginaire.

Remarque VI. La courbe donnée A étant du degré m sera tout au plus de la *classe* $m(m-1)$; c'est-à-dire qu'on pourra d'un point donné mener à la courbe *au plus* $m(m-1)$ tangentes, donc la polaire réciproque peut être rencontrée par une droite *au plus* en $m(m-1)$ points, elle est donc *au plus* de ce degré; mais elle est toujours de la $m^{ème}$ classe; d'après le degré, elle pourrait être de la classe $m(m-1)(m^2-m-1)$; mais elle descend toujours à la classe m et perd ainsi $m^3(m-2)$ tangentes dans le faisceau issu d'un même point. M. Plücker est le premier, comme nous verrons plus tard, qui ait donné une explication *complétement* satisfaisante de ce fait singulier.

Remarque VII. A un point *multiple*, c'est-à-dire par lequel passent plusieurs branches de la courbe, correspond une tangente *multiple*, dans la polaire réciproque, c'est-à-dire une droite tangente à plusieurs branches et *vice versâ.*

Remarque VIII. A un point conjugué isolé, c'est-à-dire un point réel d'intersection de deux branches devenues imaginaires, correspond une polaire réelle, droite conjuguée isolée tangente à des branches imaginaires et *vice versâ.*

Remarque IX. A un point de rebroussement, c'est à-dire un point où deux branches de la courbe se *touchent*; correspond un point d inflexion dans la polaire réciproque; en effet, dans un point de rebroussement, le point décrivant change subitement de direction; donc la tangente doit aussi changer subitement de direction dans la polaire réciproque, ce qui a lieu aux points d'inflexion.

LXXXIII. *Historique*. De La Hire (Philippe) est le premier qui ait énoncé, en 1685, les deux propriétés géométriques qui, dans une conique, lient le pôle à sa polaire et celle-ci à son pôle (Sectiones conicæ in novem libros distributæ. In-fol., Paris, 1685, lib. 1, prop. 26, 27, 28; et lib. 2, prop. 23, 24, 26, 27).

Monge, généralisant les théorèmes de De La Hire, et probablement sans les connaître, découvrit, en 1795, les relations géométriques qui existent dans les surfaces du second degré, entre le pôle et le plan polaire et *vice versâ*, et aussi entre deux droites correspondantes. Il y parvient par des considérations graphiques et nullement métriques (Séances des écoles normales, t. II, p. 357, éditon de 1800, la première est de l'an III (1795)).

Livet et M. Brianchon ont démontré, en 1806, que la surface réciproque d'une surface du second degré est encore une surface de même degré (*Journal de l'École polytechnique*, cahier XIII, 270 et 297, 1806).

Cette théorie a été cultivée et augmentée, spécialement dans les Annales de M. Gergonne, où cette théorie occupe le plus grand espace. Servois a introduit le nom de *Pôle* (T. I, 337, 1810) et M. Gergonne celui de *Polaire* (III, 297, 1813).

Dualité. A tout théorème sur des *points* dans une courbe correspond un théorème sur des *droites* dans la polaire réciproque, et *vice versâ*; c'est ce qu'on désigne par le mot *dualité.* Le premier emploi de ce genre et le plus célèbre est celui de M. Brianchon, qui a trouvé le théorème correspondant de l'hexagramme de Pascal (Journal de l'École polytechnique, cahier XIII, 297, 1806). Depuis, cette dualité a reçu une grande extension, surtout par les travaux de M. Poncelet qui, le premier, s'est servi de la théorie des polaires réciproques pour la transformation des relations de grandeur métrique et angulaire, dans son *Traité des propriétés projectives*, publié en 1822. Là, le célèbre géomètre a établi la dénomination de *polaires réciproques* et de *directrices*, et en a donné la théorie fondamentale (p. 121) et l'a appliquée à la recherche des propriétés des courbes et des surfaces en général. (*Voir* Chasles, *Histoire des méthodes*, p. 219, et note XXVII, p. 370, 1837.)

LXXXIV. *Problème.* Étant données l'équation d'une courbe plane algébrique et celle de la conique directrice, trouver l'équation *enveloppe* de la polaire réciproque.

Solution. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe de degré m; et $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \xi = 0$, l'équation de la conique directrice. Nous désignons de même par les lettres grecques Λ, $\varkappa$, ν', etc., les fonctions analogues à L, k, k', etc. Soit $py + qx = 1$ l'equation d'une tangente à la polaire réciproque; les coordonnées du pôle de cette droite par rapport à la conique sont :

$$x = \frac{-\nu p + \lambda q - \varkappa}{\nu' p + \nu q - \mu}; \quad y = \frac{\lambda' p - \nu q - \varkappa'}{\nu' p + \nu q - \mu}; \qquad \text{(T. II, p. 305.)}$$

substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe, on a l'équation enveloppe cherchée ; elle est en p et q de même degré que la proposée ; ce qu'on peut voir *à priori*.

Application 1. La courbe donnée est une conique à équation hexanome ordinaire.

Soit $a_1p^2 + b_1q^2 + c_1q^2 + d_1p + e_1q + f_1 = 0$, l'équation enveloppe de la polaire réciproque ; on a

$$a = A\lambda'^2 - B\lambda'\nu + C\nu^2 + D\lambda'\varkappa' - E\varkappa'\nu + F\varkappa'^2,$$
$$b = -2A\lambda'\nu + B(\lambda\lambda' + \nu^2) - 2C\lambda\nu + D(\lambda'\varkappa - \nu\varkappa') + E[\lambda\varkappa' - \nu\varkappa] + 2F\varkappa\varkappa',$$
$$d = -2A\lambda'\varkappa' - B(\lambda'\varkappa - \nu\varkappa') + 2C\nu\varkappa - D(\mu\lambda' + \varkappa'^2) - E[-\mu\nu + \varkappa\varkappa'] - 2F\mu\varkappa',$$
$$f = A\varkappa'^2 + B\varkappa\varkappa' + C\varkappa^2 + D\mu\varkappa' + E\mu\varkappa + F\mu^2.$$

On conclut c et e respectivement de a et d en changeant A, D, $\varkappa$, λ en C, E, $\varkappa'$, λ' et *vice versâ*. On connaît l'espèce de la polaire réciproque d'après ce qui a été dit ci-dessus p. 278.

Application 2. Si la directrice est une circonférence, ayant son centre à l'origine ; prenant les axes rectangulaires, l'équation de cette directrice est $y^2 + x^2 + \zeta = 0$; d'où $\mu = -4$; $\varkappa = \varkappa' = \nu = 0$; $\lambda = \lambda' = -4\zeta$; on trouve pour équation enveloppe de la polaire réciproque :

$$(Ap^2 + Bpq + Cq^2)\zeta^2 - (Dp + Eq)\zeta + F = 0.$$

L'espèce de la polaire dépend du signe de FL (*V.* p. 278) ; ce qui est évident *à priori*, car, suivant que le centre de la directrice, qui est ici l'origine, est dans l'intérieur de la courbe donnée, dessus ou dehors, la polaire réciproque est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Mêmes données.

Application 3. Pour que l'enveloppe soit un cercle, l'on doit avoir, axes rectangulaires $e^2 = 4cf$; $d^2 \mp 4af$; $de = 4bf$ (p. 278) ; si l'on prend pour directrice un cercle décrit d'un foyer de la conique comme centre, un calcul facile fait voir que l'équation de l'enveloppe satisfait aux trois conditions, et par conséquent la polaire réciproque est un cercle; et la polaire réciproque d'un cercle par rapport à un autre cercle directeur est une conique ayant pour foyer le centre du cercle directeur, et pour axe focal la droite qui réunit les centres des deux cercles.

(*La suite prochainement.*)