PAUL SERRET

Nouvelle méthode analytique pour la détermination des coordonnées des foyers et des longueurs des axes de coniques à centre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 302-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__302_1>

NOUVELLE MÉTHODE ANALYTIQUE

pour la détermination des coordonnées des foyers et des longueurs des axes de coniques à centre,

PAR M. PAUL SERRET.

I. On sait, et l'on peut d'ailleurs le démontrer facilement, que le carré d'un demi-diamètre quelconque d'une conique à centre est égal au produit de la corde parallèle menée par l'un des foyers, multipliée par un coefficient constant $K = \frac{a}{2}$, a désignant soit le demi-grand axe de l'ellipse, soit le demi-axe transverse de l'hyperbole; or, on peut démontrer en prenant pour axes des coordonnées les deux axes principaux, que les deux foyers *seuls* jouissent de cette propriété, quelle que soit d'ailleurs la valeur *arbitraire* que l'on donne au coefficient K, pourvu qu'il demeure constant.

C'est précisément cette propriété des foyers qui va nous servir à déterminer par un calcul très-simple les coordonnées des foyers, et l'équation qui donne les carrés des demi-axes en fonction des coefficients de la courbe dans le cas le plus général.

II. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 = F$ (1) l'équation de la conique rapportée à deux diamètres parallèles aux axes primitifs, et faisant un angle γ; $F = -\frac{L}{m}$ valeur que nous lui restituerons dans les résultats définitifs.

Soit α, β l'un des foyers cherché, menons par l'origine un diamètre sous la direction m; soit D la valeur de ce demi-diamètre, soit C la longueur de la corde parallèle menée par (α, β), on aura :

$$D^2 = K.C;$$

or on trouve, en faisant momentanément $n = \beta - m\alpha$:

$$D^2 = \frac{F(1 + m^2 + 2m\cos\gamma)}{Am^2 + Bm + C};$$

$$C.K = K\frac{\sqrt{1 + m^2 + 2m\cos\gamma} \times \sqrt{4AFm^2 + 4BFm + (B^2 - 4AC)n^2 + 4CF}}{Am^2 + Bm + C};$$

égalant ces deux quantités, simplifiant et élevant au carré, il viendra :

$$F^2(1 + m^2 + 2m\cos\gamma) =$$
$$= K^2[4AFm^2 + 4BFm + (B^2 - 4AC)(\beta - m\alpha)^2 + 4CF];$$

ordonnant cette équation de condition par rapport à la variable m, il viendra :

$$(2) \qquad \begin{aligned} & m^2 \{ K^2[4AF + (B^2 - 4AC)\alpha^2] - F^2 \} + \\ & + 2m \{ K^2[2BF - (B^2 - 4AC)\alpha\beta] - F^2\cos\gamma \} + \\ & + K^2 \{ 4CF + (B^2 - 4AC)\beta^2 \} - F^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette relation (2) devant exister pour toutes les valeurs de m, les trois coefficients doivent être nuls séparément; donc on aura les trois équations suivantes pour déterminer K, α, β :

$$K^2[(B^2 - 4AC)\alpha^2 + 4AF] = F^2 \qquad (a)$$
$$K^2[2BF - (B^2 - 4AC)\alpha\beta] = F^2\cos\gamma \qquad (b)$$
$$K^2[(B^2 - 4AC)\beta^2 + 4CF] = F^2. \qquad (c)$$

Or, en divisant alternativement l'équation (a) par chacune des équations (b) et (c), et ne perdant pas de vue que $F = -\frac{L}{m}$, on retrouve les équations (b) et (c) de la page 429 tome II, dont M. Terquem déduit les coordonnées des foyers.

III. Supposons d'abord que l'on connaisse l'équation qui donne les carrés des demi-axes principaux de la courbe :

$$m^3.z^2 - 4mL.z - 4L^2 \sin^2\gamma = 0,$$

d'où l'on tire, comme on sait :

$$a^2 = \frac{2L}{m^2}\left[N + \sqrt{N^2 + m \sin^2\gamma}\right];$$

Comme on sait *à priori* que $K^2 = -\frac{a^2}{4}$, l'équation (a) nous donnera successivement :

$$\alpha^2 = \frac{F^2 - 4AFK^2}{mK^2} = \frac{L^2 + 4mAL.K^2}{m^3K^2} =$$

$$= \frac{2L[m + 2A(N + \sqrt{N^2 + m\sin^2\gamma})]}{m^2[N + \sqrt{N^2 + m\sin\gamma^2}]}.$$

Multipliant les deux termes de la valeur de α^2 par

$$N - \sqrt{N^2 + m\sin\gamma},$$

il viendra :

$$\alpha^2 = \frac{2Lm[N - \sqrt{\quad}] - 4mAL\sin^2\gamma}{-m^3\sin^2\gamma} =$$

$$= \frac{4AL}{m^2} - \frac{1}{\sin^2\gamma}.\frac{2L}{m^2}[N - \sqrt{N^2 + m\sin^2\gamma}];$$

mais b étant le demi-petit axe de l'ellipse, ou le demi-axe non transverse de l'hyperbole, on a :

$$b^2 = \frac{2L}{m^2}[N - \sqrt{N^2 + m\sin^2\gamma}];$$

on aura donc :

$$\text{(A)} \qquad \alpha^2 = \frac{4AL}{m^2} - \frac{b^2}{\sin^2\gamma}.$$

Comparant les équations (a) et (c), on voit que la première est composée en A et α, comme la deuxième l'est en C et β; on aura donc immédiatement :

$$\text{(B)} \qquad \beta^2 = \frac{4CL}{m^2} - \frac{b^2}{\sin^2\gamma}.$$

Ce sont les formules données par M. Terquem, t. II, p. 430.

Observation. Remarquons que l'équation (b) donne immédiatement dans le cas particulier où $\gamma = 90°$, $\alpha\beta = -\frac{BF}{m} = -\frac{n}{m}$; relation qu'emploie aussi M. Terquem, t. IV, p. 376, dans une solution généralisée du problème du concours général pour l'année 1845.

IV. Supposons maintenant que nous voulions déduire des trois équations (a), (b), (c) l'équation dont les racines soient les carrés des demi-diamètres principaux.

En éliminant α et β des équations (a), (b), (c), et remplaçant K^2 par $\frac{a^2}{4}$ dans l'équation résultante, nous arrivons assez facilement à l'équation :

$$m^3a^4 - 4m.NLa^2 - 4L^2\sin^2\gamma = 0; \qquad \text{(H)}$$

donc le carré de l'un des demi-axes principaux a^2, est racine de l'équation :

$$m^3z^2 - 4mNL.z - 4L^2\sin^2\gamma = 0. \qquad \text{(L)}$$

Il s'agit de prouver que le carré du second demi-axe est aussi racine de la même équation. Or, soit c la distance du foyer au centre, on aura :

$$b^2 = a^2 - c^2;$$

or $c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\gamma$; donc vu la forme des équations (a), (b), (c), nous pourrons très-facilement obtenir la valeur de c^2; on trouve en effet successivement :

$$c^2 = \frac{2F^2 - 4F(A+C).K^2 + 4BF\cos\gamma\, K^2 - 2F^2\cos^2\gamma}{mK^2} =$$

$$= \frac{-4NF.K^2 + 2F^2\sin^2\gamma}{mK^2},$$

remplaçant K^2 et F par leurs valeurs : $\frac{a^2}{L}$, $\frac{-L}{m}$, on obtient :

$$c^2 = \frac{4mNL.a^2 + 8L^2 \sin^2\gamma}{m^3 a^2},$$

d'où l'on tire :

$$a^2 - c^2 = b^2 = \frac{m^2 a^4 - 4mNLa^2 - 8L^2 \sin^2\gamma}{m^3 a^2},$$

ou bien, en ayant égard à la relation (H) :

$$b^2 = -\frac{4L^2 \sin^2\gamma}{m^3 a^2}, \text{ d'où } a^2 b^2 = -\frac{4L^2 \sin^2\gamma}{m^3 a^2}.$$

Mais le produit des racines de l'équation (L) est aussi égal à $-\frac{4L^2 \sin^2\gamma}{m^3}$; a^2 est l'une de ces racines, donc b^2 est l'autre racine.

Donc enfin l'équation aux carrés des demi-axes principaux d'une conique à centre est bien l'équation (L) :

$$m^3 z^2 - 4mNL.z - 4L^2 \sin^2\gamma = 0.$$

V. On pourrait encore chercher les coordonnées des foyers, en s'appuyant sur cette propriété dont ils jouissent, à l'exclusion de tout autre point, et qui consiste en ce que :

— Si d'un point *quelconque* M de la polaire d'un foyer F, on mène deux tangentes à la conique et leur corde de contact, puis du même point M une perpendiculaire sur la corde des contacts, le pied de cette perpendiculaire sera constamment le point F lui-même.

— Cette dernière propriété *caractéristique* des foyers peut servir à mettre facilement en évidence les conditions $DE - 2BF = 0$, $D^2 - 4AF = E^2 - 4CF$, nécessaires pour que l'origine des coordonnées soit un foyer quand les axes sont rectangulaires. Mais si les axes deviennent obliques, la mise en évidence des conditions précédentes modifiées, ne peut plus se faire commodément par cette méthode.