J. Murent

Solution de la question 185

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 300-302
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__300_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 185 (p. 239),

PAR M. J. MURENT,
Bachelier ès sciences, à Clermont-Ferrand.

P étant la limite de la fraction continue :

$$a : a + b : b + c : c + d : d + \ldots,$$

et Q la limite de la fraction continue :

$$a : b + b : c + c : d + d : e + \ldots,$$

on a :

$$\mathrm{P}(a + \mathrm{Q} + 1) = a + \mathrm{Q}.$$

Démonstration. Posons d'abord $\frac{1}{a} = a'$, $\frac{1}{b} = b'\ldots$, d'où $aa' = 1$, $bb' = 1\ldots$; en multiplant par a' les deux termes de la fraction qui exprime la valeur de P, on aura :

$$\mathrm{P} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a'b}{b + \cfrac{c}{c + \ldots}}};$$

si dans la partie $\dfrac{a'b}{\left(b + \cfrac{c}{c + \ldots}\right)}$, on multiplie les deux termes par ab', P deviendra :

$$\mathrm{P} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{ab'c}{c + \cfrac{d}{d + \ldots}}}}.$$

De même si dans la partie $\dfrac{ab'c}{\left(c + \cfrac{d}{d + \ldots}\right)}$ de cette dernière expression de P, on multiplie les deux termes par $a'bc'$, on trouvera :

$$P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a'b + \cfrac{a'bc'd}{d + \cfrac{e}{e + \ldots;}}}}}$$

multipliant encore les deux termes de $\dfrac{a'bc'd}{\left(d + \cfrac{e}{e + \ldots}\right)}$ par $ab'cd'$, on trouvera :

$$P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a'b + \cfrac{1}{ab'c + \cfrac{ab'cd'e}{e + \cfrac{f}{f + \ldots.}}}}}}$$

En continuant ainsi, l'équation de P se changera en la suivante :

$$P = 1 : 1 + 1 : a + 1 : a'b + 1 : ab'c + 1 : a'bc'd + 1 : ab'cd'e + \ldots \quad (p)$$

Faisant sur Q les mêmes opérations, il viendra successivement :

$$Q = \cfrac{1}{a'b + \cfrac{a'b}{c + \cfrac{c}{d + \ldots}}}, \quad Q = \cfrac{1}{a'b + \cfrac{1}{ab'c + \cfrac{ab'c}{d + \cfrac{d}{e + \ldots}}}},$$

et enfin :

$$Q = 1 : a'b + 1 : ab'c + 1 : a'bc'd + 1 : ab'cd'e + \ldots;$$

substituant cette valeur dans (p), on obtiendra :

$$P = 1 : 1 + 1 : a + Q \quad \text{ou} \quad P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + Q}},$$

d'où
$$P = \frac{a+Q}{a+Q+1},$$

ou enfin
$$P(a+Q+1) = a+Q. \qquad \text{c. q. f. d.}$$