Nouvelles annales de mathématiques

Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'équations, d'après M. Plucker, professeur à Bonn

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 263-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__263_1>

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'équations, d'après M. Plucker, professeur à Bonn (Crelle, t. XVI, p. 47, 1837), *en français.*

I. *Lemme.* Une équation algébrique complète a deux variables, de degré n à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=N$ coefficients.

II. *Théorème I.* Si l'on donne à deux quantités variables successivement $N-1$ couples de valeurs, et si l'on suppose que ces valeurs satisfont a une équation quelconque de degré n entre les deux variables, il y aura $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, nouveaux couples de valeurs qui satisfont à la même équation et qui dépendent uniquement des couples précédents.

Démonstration. Soit $F_n = 0$ l'équation générale de degré n entre deux inconnues et à laquelle satisfont $N - 1$ couples de valeurs ; toutes les équations de degré n, auxquelles ces mêmes couples de valeurs satisfont, peuvent être représentées par $F_n + \mu f_n = 0$, où μ est un coefficient arbitraire et f_n une autre fonction quelconque de degré n ; il est évident que les $N-1$ couples de valeurs satisferont aussi à l'équation $f_n = 0$; or les deux équations $F_n = 0$, $f_n = 0$ admettent n^2 couples de valeurs communes et pas davantage, et

$$n^2 = N - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2};$$

donc l'équation $F_n = 0$ est satisfaite par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nouveaux couples de valeurs.

III. *Théorème II.* Si l'on connaît $N - 1$ couples des racines de deux équations du $n^{ème}$ degré entre deux inconnues, on obtiendra les $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ couples de racines restantes sans avoir recours à ces équations.

Démonstration. Éliminant une des inconnues, on obtient une équation de degré n^2 de la seconde inconnue ; on connaît $N - 1$ racines ; les autres $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ racines dépendent donc d'une équation de ce degré.

IV. *Théorème III.* Si m des coefficients de l'équation d'un degré n quelconque entre deux variables sont donnés, ou bien encore s'il existe m équations linéaires entre ces coefficients, il suffira de connaître $N - 1 - m$ couples de valeurs de deux variables qui satisfont à l'équation du $n^{ème}$ degré pour en déduire $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + m$ nouveaux couples.

Démonstration. $N-1-m+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+m=n^2.$

V. *Théorème IV.* Si l'on connaît $\left(nq-\frac{(q-1)(q-2)}{2}\right)$ couples de racines de deux équations du $n^{éme}$ et du $q^{ème}$ degré entre deux inconnues, n étant plus grand que q et q plus grand que 2, on en déduira $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$ couples des racines restantes sans recourir aux équations proposées, en fonction des racines connues et par la résolution de deux équations du degré $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$.

Démonstration. Parmi les $N-1$ couples de valeurs qui satisfont à l'équation $F_n=0$, choisissons à volonté :

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2}-1$$

couples qui déterminent complétement une équation de degré p, représentée $f_p=0$; supposons $n=p+q$, les couples sont au nombre de

$$N-1-\left[\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1\right]=nq-\frac{(q-1)(q-2)}{2}.$$

Supposons que ces couples restants satisfassent à une équation de degré q ou à $\varphi_q=0$; or les équations $F_n=0$, $\varphi_{(q)}=0$ ont en commun nq couples de racines; donc, etc.

VI. *Lemme.* L'équation générale du degré n entre trois inconnues contient $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1=N$ constantes.

VII. *Théorème V.* Si l'on donne à trois quantités variables successivement $N-1$ groupes de valeurs quelconques, et si l'on suppose que ces variables satisfont à une équation générale du n^{eme} degré entre les trois variables, il y aura une infinité de tels groupes, dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont tous à cette même équation.

Démonstration. Car ces N — 1 groupes déterminent tous les coefficients en fonction d'un seul, qui reste indéterminé.

VIII. *Théorème VI*. Si l'on donne à trois quantités variables successivement N — 2 groupes de valeurs, et si l'on suppose que ces groupes satisfont à une équation quelconque du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y aura toujours n^3 — N + 2 nouveaux groupes de valeurs et dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont à cette même équation.

IX. *Théorème VII*. Si l'on connaît N — 1 groupes de valeurs qui satisfont en même temps à deux équations du $n^{ème}$ degré entre trois inconnues, l'on obtiendra une infinité de tels groupes sans avoir recours aux deux équations proposées.

X. *Théorème VIII*. Si l'on connaît (N — 2) groupes de racines de trois équations données du n^{eme} degré entre trois inconnues, l'on en déduira les (n^3—N+2) groupes de racines restantes sans avoir recours aux équations données.

XI. *Théorème IX*. Si parmi les coefficients de l'équation générale du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y en a m de donnés, ou bien encore si m équations linéaires de condition ont lieu entre ces coefficients, il en résultera :

1° Que N — m — 1 groupes donnés des trois variables qui vérifient l'équation générale en comportent un nombre infini;

2° Que N — m — 2 groupes donnés en comportent n^3—N+m+2 groupes nouveaux.

XII. *Théorème X*. Si l'on connaît

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-\frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{1.2.3}-1$$

groupes de trois valeurs qui satisfont en même temps à deux équations entre trois variables, dont l'une s'élève au degré n et l'autre au degré q, l'on en déduira une infinité de pareils groupes sans avoir recours à ces équations.

XIII. *Théorème XI.* Si l'on connaît

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-$$
$$-\frac{(n-q+1)(n-q+2)(n+q+3)}{1.2.3}-\frac{(n-s+1)(n-s+2)(n-s+3)}{1.2.3}-1$$

groupes des racines de trois équations entre trois inconnues et dont les degrés s'élèvent respectivement à n, q et s, l'on en déduira tous les autres groupes sans avoir recours aux trois équations proposées.

Observations. Les deux derniers théorèmes se démontrent comme on a fait pour le théorème IV.

XIV. *Lemme.* Le nombre des coefficients d'une équation de degré n entre g variables est :

$$S_n = ng + \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{g.g-1}{1.2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{g.g-1.g-2}{1.2.3} + \text{etc.}$$

XV. Si parmi les coefficients de l'équation générale du $n^{ème}$ degré entre g variables il y en a m de donnés, il en résultera :

1° Que si $S_n - m - (g-h)$ groupes donnés de g variables, qui vérifient l'équation générale, en comportent un nombre infini de pareils groupes, de sorte que dans tous ces groupes l'on peut prendre à volonté les valeurs de $(h-1)$ des g variables, où h est un nombre arbitraire >1 et $<g$;

2° Que $S_n - m - (g-1)$ groupes donnés en comportent $n^g - s + m + g - 1$ groupes nouveaux.

XVI. *Théorème général.* Si l'on connaît

$$S_n - S_{(n-p)} - S_{(n-q)} \dots - (g-1)$$

groupes de racines de g équations entre g inconnues, et s'élevant respectivement aux degrés $n, p, q\dots$, l'on en déduit tous les autres sans avoir recours à ces équations qui restent complétement déterminées.