Nouvelles annales de mathématiques

Babinet

Note sur l'action statique de la force dans le parallélogramme articulé de Watt

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 256-259

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__256_0>

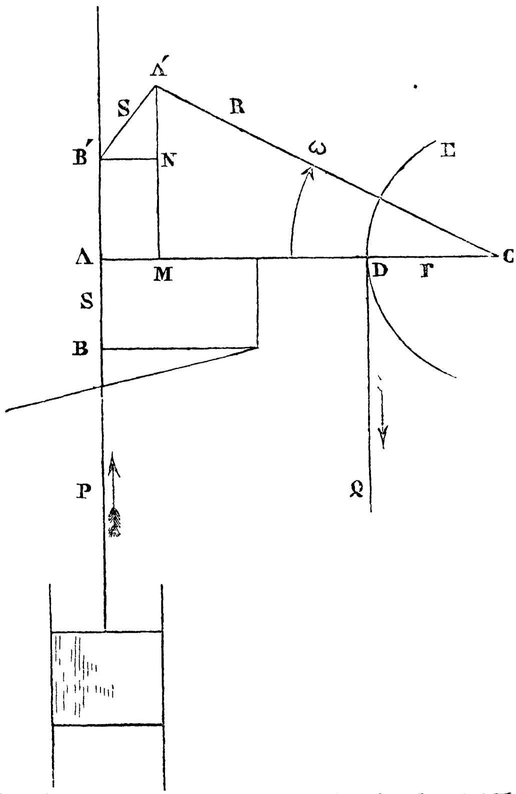
NOTE

sur l'action statique de la force dans le parallélogramme articulé de Watt (voy. p. 68) (*).

PAR M. BABINET.

—

D'après le principe des vitesses virtuelles, si, dans un



(*) M. Babinet ayant eu l'obligeance de nous communiquer la démonstration de la formule à laquelle il est fait allusion à la page 68 de ce volume, nous nous faisons un plaisir d'en faire part à nos lecteurs.

système quelconque en équilibre, on produit un des mouvements que comporte la liaison de tous les points du système, de manière que les déplacements des points d'application des forces soient très-petits, on aura :

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0,$$

P, P', P'', etc. étant les forces, et p, p', p'', etc. les projections des petits espaces parcourus par les points d'application de ces forces sur leurs directions respectives ; p, p', p'', etc. étant pris positivement quand la projection tombe dans le sens même suivant lequel la force agit, et négativement dans le cas contraire.

Par exemple, dans la position rectangle du parallélogramme de Watt, soit P la force ascensionnelle du piston, Q une force dirigée de haut en bas et agissant sur un arc de cercle ou poulie DE à une distance $CD = r$ du point C, et mesurant ainsi l'action P du piston qu'elle équilibre. Le piston agit à une distance $CA = R$ du point fixe C. Si je donne un mouvement angulaire $d\omega$ infiniment petit au bras de levier AC, le point A parcourra l'espace $Rd\omega$ de A vers B' dans le sens de la force P ; le point D parcourra un espace $rd\omega$ dans le sens contraire à la force Q ; et l'on aura :

$$PRd\omega - Qrd\omega = 0\,;$$

d'où

$$PR = Qr,$$

ou bien

$$\frac{Q}{P} = \frac{R}{r}\,;$$

c'est l'équation ordinaire d'équilibre du levier.

Pour le cas où le point d'application de la force ascensionnelle P du piston est en B', il faut calculer la hauteur $AB' = h$ en fonction de l'angle $A'CA = \omega$, et ensuite différencier l'expression de h ; c'est ce qui est très-simple.

En effet, en supposant rectiligne et verticale la course BAB′ de l'articulation sur laquelle agit la force P, on a :

$$AB' = A'M - A'N,$$

$$A'M = R\sin\omega,\quad A'N = \sqrt{A'B'^2 - B'N^2};$$

mais $\qquad B'N = AM = AC - MC = R - R\cos\omega,$

et $\qquad A'B' = AB = S;$

donc

$$A'N = \sqrt{S^2 - R^2(1-\cos\omega)^2} = R\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2};$$

ainsi $\qquad h = R\sin\omega - R\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}.$

Soit maintenant Q′ la force qui, appliquée au bras de levier r, ferait équilibre à la force P du piston agissant dans la nouvelle forme du système ; on aura $rd\omega$ pour le déplacement du point d'application de la force Q′, et dh pour celui de la force P ; d'où :

$$Pdh - Q'rd\omega = 0.$$

Mais, d'après l'expression de h, on a par la différentiation :

$$dh = R\cos\omega d\omega + R\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega d\omega}{\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}};$$

donc

$$PR\cos\omega d\omega + PR\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega}{\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}}d\omega - Q'rd\omega = 0;$$

d'où $\qquad \frac{Q'}{P} = \frac{R}{r}\left[\cos\omega + \frac{(1-\cos\omega)\sin\omega}{\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}}\right].$

Mais dans la position rectangulaire du parallélogramme, on avait :

$$\frac{Q}{P}=\frac{R}{r};$$

le coefficient $\cos\omega+\dfrac{(1-\cos\omega)\sin\omega}{\sqrt{\dfrac{S^2}{R^2}-(1-\cos\omega)^2}}=\dfrac{Q'}{Q}$ exprimera donc le rapport de l'action statique Q' du piston dans une position quelconque, à l'action Q qu'il exerce quand le parallélogramme est rectangle.

Quant à l'action dynamique, elle dépend, non-seulement de l'intensité de la force modifiée par le système où elle est engagée, et du chemin que parcourt son point d'application, mais encore du temps employé à produire le déplacement de ce point.

Note. Pour faire une application de la formule qui précède, il faut commencer par la rendre calculable au moyen des logarithmes. A cet effet, remplaçons $1-\cos\omega$ par $2\sin^2\frac{1}{2}\omega$, et posons :

$$\cos\varphi=2\frac{R}{S}\sin^2\frac{1}{2}\omega;$$

il en résultera

$$\frac{Q'}{Q}=\cos\omega+\frac{\cos\varphi\sin\omega}{\sin\varphi}=\frac{\sin\varphi\cos\omega+\sin\omega\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

ou

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\varphi}.$$

Cela posé, soit $R=2{,}515$, $S=0{,}762$, $\omega=17^\circ\,35'\,30''$. (Nous empruntons ces données à M. de Prony : *Rapport sur les machines à vapeur du Gros-Caillou*; Paris, 1826.)

On tire de là, d'abord $\varphi=81^\circ\,7'\,16''$, d'où $\varphi+\omega=98^\circ 42' 46''$, et par suite $\dfrac{Q'}{Q}=1{,}0005$.

(A. J. H. Vincent.)