LEBESGUE

Remarque sur la question 161

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 225-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__225_1>

REMARQUE SUR LA QUESTION 161.

(*Théorème Joachimsthal*, p. 114)

PAR M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

Dans les équations $np+n'p'=2d^2$ et $np+n'p'+n''p''+ +n'''p'''=$ const. $=2(a^2+b^2)$ relatives à l'ellipse $a^2y^2+ +b^2x^2=a^2b^2$, on reconnaît de suite que les facteurs n, n' pouvant devenir aussi grands qu'on voudra, du moins pour la première équation, les produits np, $n'p'$, $n''p''$, $n'''p'''$ ne sont pas essentiellement positifs. Cela tient à ce que p, qui n'est autre chose que la projection du rayon central AO sur la normale AN, peut tomber sur AN ou sur son prolongement; de là une discussion nécessaire pour déterminer les signes.

Pour plus de généralité, prenons la surface à centre $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$. Le plan tangent en A (x, y, z) ayant pour équation, en représentant par X, Y, Z les coordonnées courantes $\frac{Xx}{a}+\frac{Yy}{b}+\frac{Zz}{c}=1$, il en résultera :

$$p=\frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right\}}}.$$

De même, la normale en A, ayant pour équation

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c}}.$$

Si l'on représente par α, β, γ les coordonnées d'un point N de la normale en A, en posant de plus $AN=n$, on aura :

$$(x-\alpha)^2+(y-b)^2+(z-\gamma)^2=n^2;$$

et par conséquent,

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a}}=\frac{y-\beta}{\frac{y}{b}}=\frac{z-\gamma}{\frac{z}{c}}=\frac{\pm n}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}}}=\pm np=u;$$

de là encore :

$$\frac{x}{a}=\frac{\alpha}{a-u},\quad \frac{y}{b}=\frac{\beta}{b-x},\quad \frac{z}{c}=\frac{\gamma}{c-u};$$

ce qui change l'équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

en

$$\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2}+\frac{b\beta^2}{(b-u)^2}+\frac{c\gamma^2}{(c-u)^2}=1; \qquad (a)$$

ou bien encore :

$$u^6-2(a+b+c)u^5+\ldots.+a^2b^2c^2\left\{1-\frac{\alpha^2}{a}-\frac{\beta^2}{b}-\frac{\gamma^2}{c}\right\}=0.$$

Donc

1° La somme des u ou $\pm np$ est constante.

2° Le produit des u reste le même tant que le point N se trouve sur une surface $\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = K$ concentrique et semblable à la surface donnée.

On demande une discussion complète de l'équation (a).

En rapportant la conique à centre à deux axes obliques tangents à la courbe aux points A et A', on trouve très-simplement $np \pm n'p' = 2b^2$. Le signe est mis en évidence. Comme b^2 est $<$ ou $= a^2$, puisque np peut surpasser $2a^2$, il faut bien que le terme $n'p'$ puisse devenir négatif. Le signe — se présente quand N est hors de l'ellipse. Même démonstration pour l'hyperbole.